

단순지지 경계조건을 가진 임의 형상 평판의 효율적인 고유진동수 추출을 위한 NDIF법의 대수 고유치 문제로의 정식화

A Formulation of NDIF Method to the Algebraic Eigenvalue Problem for Efficiently Extracting Natural Frequencies of Arbitrarily Shaped Plates with the Simply Supported Boundary Condition

강 상 욱† · 김 진 곤*

S. W. Kang and J. G. Kim

(2009년 3월 30일 접수 ; 2009년 5월 11일 심사완료)

Key Words : NDIF Method(무차원 동영향 함수법), Algebraic Eigenvalue Problem(대수 고유치 문제), Simply Supported Plate(단순지지단 평판), Free Vibration(자유 진동), Natural Frequency(고유진동수), Arbitrarily Shaped Plate(임의 형상 평판)

ABSTRACT

A new formulation of NDIF method to the algebraic eigenvalue problem is introduced to efficiently extract natural frequencies of arbitrarily shaped plates with the simply supported boundary condition. NDIF method, which was developed by the authors for the free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes and plates, has the feature that it yields highly accurate natural frequencies compared with other analytical methods or numerical methods(FEM and BEM). However, NDIF method has the weak point that it needs the inefficient procedure of searching natural frequencies by plotting the values of the determinant of a system matrix in the frequency range of interest. A new formulation of NDIF method developed in the paper doesn't require the above inefficient procedure and natural frequencies can be efficiently obtained by solving the typical algebraic eigenvalue problem. Finally, the validity of the proposed method is shown in several case studies, which indicate that natural frequencies by the proposed method are very accurate compared to other exact, analytical, or numerical methods.

1. 서 론

임의 형상 평판의 진동 해석을 위해 가장 일반적으로 사용되는 해석 기법인 유한요소법⁽¹⁾과 경계요소법⁽²⁾은 해석 대상물의 내부 영역 또는 경계를 여러 개의 요소로 분할한 후 노드와 노드 사이의 변위를 보간 함수로 근사화시키는 방법을 이용한다. 그러나 이들 보간 함수들이 해석 대상 물체의 운동

지배 방정식을 만족하지 않는 단점으로 인해, 유한요소법과 경계요소법은 해의 정밀도 확보에 있어서 한계를 가지며 많은 수치 계산량을 필요로 하는 단점을 가지고 있다.

상기와 같은 유한요소법과 경계요소법의 정밀도 한계 및 수치 계산량 증가 문제를 극복하기 위한 새로운 해석 기법으로, 저자는 NDIF법(method of non-dimensional dynamic influence function)을 1999년 처음으로 개발/소개 하였다⁽³⁾. NDIF법은 임의 형상 구조물의 고정밀도 고유진동수 및 고유 모드를 적은 수치 계산량으로 정확하게 추출할 수 있는 자유 진동 해석 기법으로, 지난 10년간 임의 형

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과
E-mail : swkang@hansung.ac.kr

Tel : (02)760-4228, Fax : (02)760-4329

* 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

상 멤브레인^(3,4), 임의 형상 음향 공동⁽⁵⁾, 다양한 경계조건을 가진 임의 형상 평판^(6,7,9,13-15)에 대한 NDIF법 이론 정식화가 저자에 의해 성공적으로 이루어졌다. 이와 더불어 저자는 NDIF법을 응용/확장하여 비균일 물성치와 비대칭 형상을 가진 멤브레인^(8,10,11,16), 임의 다각형 형상 평판⁽¹²⁾에 대한 고정밀도 자유 진동 해석 기법도 개발/완료하였다.

NDIF법의 가장 큰 특징은 경계요소법과 마찬가지로 해석 대상 물체의 경계만을 이산화하나, 노드와 노드 사이에는 어떠한 보간 함수도 사용하지 않는다는 것이다⁽³⁾. 대신에 전체 노드들 사이의 변위 상관 관계를 정의하기 위해, 지배방정식을 정확히 만족하는 NDIF를 사용한다⁽³⁾. 이러한 방법에 의해 유한요소법이나 경계요소법에 비해 수치 계산량을 최소화하고 고정밀도 계산 결과를 도출하는 것이 NDIF법의 중요한 특징이자 장점이다.

그러나, NDIF법은 유한요소법이나 경계요소법과는 달리 최종 시스템 행렬식이 식 (1)과 같이 시스템 행렬 SM 이 주파수 파라미터(Λ)에 독립적인 대수 고유치 문제(algebraic eigenvalue problem)로 정식화^(1,2,17,18)가 되지 않는 단점을 가진다.

$$SM \mathbf{v} = \Lambda \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} : \text{고유벡터} \quad (1)$$

왜냐하면, NDIF법에서 정의되는 NDIF가 주파수 파라미터 종속 함수이기 때문에, 주파수 파라미터가 독립적으로(explicitly) 시스템 행렬 밖으로 분리되지 않아서 시스템 행렬 성분들이 주파수 파라미터의 함수가 되어 식 (2)와 같은 최종 시스템 행렬식이 구성되게 된다^(3,14). 즉, 대수 고유치 문제로 정식화가 되지 않게 된다.

$$SM(\Lambda) \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

결과적으로 NDIF법의 최종 시스템 행렬식 식 (2)에서 고유치를 추출하기 위해서는 주파수 파라미터를 증가시키면서(sweeping) 시스템 행렬의 판별식 $\det[SM(\Lambda)]$ 가 극소가 되는(즉, 시스템 행렬이 특이치를 갖는) 주파수 파라미터 값을 일일이 찾아야 하는 비효율적인 과정이 필요하다. 반면에 유한요소법이나 경계요소법의 경우, 최종 시스템 행렬식이 식 (1)과 같은 대수 고유치 문제로 정식화가 되기 때문에 범용 고유치 문제 솔버(solver)에 의해 원하는 주파수 범위 내에서 원하는 개수의 고유치를 일

시에 구할 수 있는 장점을 가진다.

상술한 바와 같이, NDIF법이 유한요소법이나 경계요소법에 비해 적은 수치 계산량으로도 고정밀도 고유치 해석 결과를 제공하는 장점이 있으나, 아직까지 유한요소법이나 경계요소법에 비해 범용/상용으로 이용되지 않는 이유는 최종 시스템 행렬식이 대수 고유치 문제로 정식화가 되지 않는 단점이 있기 때문이다. 이 논문에서는 이러한 NDIF법의 단점을 해결하기 위해 NDIF법의 대수 고유치 문제로의 정식화 기법을 개발하고자 한다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

단순지지 경계조건을 가진 평판은 고정 경계(fixed edges)를 가진 멤브레인⁽³⁾과 유사성(analogy)을 가지기 때문에, 평판의 자유 진동 지배방정식은 식 (3)과 같이 멤브레인 지배방정식(헬름홀츠 방정식)으로 대체될 수 있다^(19,20).

$$\nabla^2 W + \Lambda^2 W = 0 \quad (3)$$

여기서 W 는 평판의 진동변위를 나타낸다.

식 (3)에 고정 경계 조건(변위가 0인 조건),

$$W_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma : \text{경계} \quad (4)$$

를 적용하는 방법에 의해 구해진 고유치 Λ_i 를 식 (5)에 적용하여 최종적으로 평판의 고유진동수 f_i 를 구할 수 있다^(19,20).

$$f_i = \frac{\Lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho_s}} \quad (5)$$

여기서 ρ_s 는 평판의 면밀도, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 는 평판의 강성(flexural rigidity)을 뜻한다.

2.2 NDIF법⁽³⁾

Fig. 1은 이 논문에서의 해석 대상인 단순지지 경계조건을 가진 임의 형상 평판을 보여준다. NDIF법에서는 Fig. 1에서와 같이 해석 대상 평판의 경계 Γ 는 N 개의 노드들로 이산화된다. 그리고 위치 벡터 \mathbf{r} 로 표시된 평판 내부의 임의의 한 점 P 에서의 진동 변위는 다음과 같이 무차원 동영향 함수들의

선형 결합으로 가정된다⁽³⁾.

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N A_k J_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|) \quad (6)$$

여기서 J_0 는 각각 제1종 0차 베셀 함수(Bessel function)를 나타내며, A_k 는 미지 상수이다. 그리고 \mathbf{r}_k 는 Fig. 1에서 알 수 있듯이 평판 경계에 위치한 노드 P_k 에 대한 위치 벡터를 뜻한다. 참고로 식 (6)은 지배방정식 식 (3)을 정확히 만족한다.

가정된 자유진동 해 식 (6)이 평판의 경계에 위치한 노드들 위에서 주어진 경계 조건을 만족하도록 하기 위해, 경계 조건 식 (4)를 다음과 같이 이산화된 경계 조건으로 재정의 한다.

$$W(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

여기서 \mathbf{r}_i 는 Fig. 1에서 알 수 있듯이 평판의 경계에 놓인 노드 P_i 에 대한 위치벡터를 뜻한다.

다음으로 이산 경계조건 식 (7)을 가정 진동 변위 식 (6)에 대입하고, 일련의 과정⁽³⁾을 거치게 되면 다음과 같은 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}(\Lambda) \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

최종적으로 평판의 고유치는 식 (8)에서 주어진 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(\Lambda)$ 의 판별식의 해, 즉 식 (9)의 해로부터 구해질 수 있다.

$$\det[\mathbf{SM}(\Lambda)] = 0. \quad (9)$$

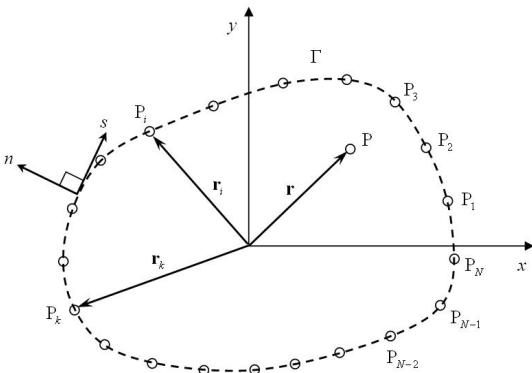


Fig. 1 Arbitrarily shaped plate discretized with boundary nodes P_1, P_2, \dots, P_N .

서론부에서 언급한 바와 같이 식 (9)의 해를 찾기 위해서는, 관심 주파수 범위에서 주파수 파라미터 Λ 을 증가시키면서 $\det[\mathbf{SM}(\Lambda)]$ 의 함수 값을 그래프로 그린 후, 그래프에서 극소가 되는 점을 일일이 찾아야 하는 비효율성이 존재한다.

2.3 대수 고유치 문제로의 정식화

위에서 언급한 NDIF법의 단점(비효율성)을 극복하기 위해 이 절에서는 NDIF법에 대한 대수 고유치 문제로의 정식화가 수행된다. 이를 위해 식 (6)에 포함되어 있는 베셀 함수는 다음과 같이 테일러 시리즈 전개(Taylor series expansion)에 의해 근사화된다⁽²¹⁾.

$$J_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|) \approx \sum_{j=0}^M \frac{(-1)^j (\Lambda R_k / 2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2} = \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j(R_k) \quad (10)$$

여기서 R_k 와 $\phi_j(R_k)$ 는 다음과 같다.

$$R_k = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|, \quad (11)$$

$$\phi_j(R_k) = \frac{(-1)^j (R_k / 2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}. \quad (12)$$

식 (10)을 진동해 식 (6)에 대입한 후 정리하면 다음과 같이 된다.

$$W(R_k) = \sum_{k=1}^N A_k \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \phi_j(R_k) = \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \sum_{k=1}^N A_k \phi_j(R_k) \quad (13)$$

다음으로 경계조건 식 (7)을 식 (13)에 적용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$W(R_{ik}) = \sum_{j=0}^M \Lambda^{2j} \sum_{k=1}^N A_k \phi_j(R_{ik}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

여기서

$$R_{ik} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|. \quad (15)$$

식 (14)를 주파수 파라미터 λ 에 대한 다항식(polynomial equation)의 형태로 다음과 같이 재작성한다.

$$\sum_{k=1}^N A_k \phi_0(r_{ik}) + \lambda \sum_{k=1}^N A_k \phi_1(r_{ik}) + \lambda^2 \sum_{k=1}^N A_k \phi_2(r_{ik}) + \dots + \lambda^M \sum_{k=1}^N A_k \phi_M(r_{ik}) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

(16)

여기서

$$\lambda = \Lambda^2. \tag{17}$$

다음으로 식 (16)을 행렬식의 형태로 다시 적으면 다음과 같이 고차 다항 고유치 문제(higher order polynomial eigenvalue problem)⁽²²⁾로 표현될 수 있다.

$$\Phi_0 \mathbf{A} + \lambda \Phi_1 \mathbf{A} + \lambda^2 \Phi_2 \mathbf{A} + \dots + \lambda^M \Phi_M \mathbf{A} = \mathbf{0} \tag{18}$$

여기서 행렬 Φ_j 의 i 번째 행과 k 번째 열에 위치한 성분은 다음과 같이 구해진다.

$$\Phi_j(i, k) = \phi_j(r_{ik}) = \frac{(-1)^j (r_{ik}/2)^{2j}}{[\Gamma(j+1)]^2}. \tag{19}$$

이제, 식 (18)을 다음과 같이 재작성하는 방법에 의해 선형화시킨다⁽²²⁾.

$$\mathbf{SM}_L \mathbf{B} = \lambda \mathbf{SM}_R \mathbf{B}, \tag{20}$$

여기서 시스템 행렬 \mathbf{SM}_L 과 \mathbf{SM}_R 그리고 미지 벡터 \mathbf{B} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{SM}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} \\ -\Phi_0 & -\Phi_1 & -\Phi_2 & \dots & -\Phi_{M-1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\mathbf{SM}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \Phi_M \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{A}^T \ \lambda \mathbf{A}^T \ \lambda^2 \mathbf{A}^T \ \dots \ \lambda^{M-1} \mathbf{A}^T\}. \tag{23}$$

마지막으로 식 (20)은 다음과 같이 변경된다.

$$\mathbf{SM}_R^{-1} \mathbf{SM}_L \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} \tag{24}$$

식 (24)를 다시 작성하면, 최종 시스템 행렬식은 다음과 같이 대수 고유치 문제로 정식화된다.

$$\mathbf{SM} \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}, \tag{25}$$

여기서

$$\mathbf{SM} = \mathbf{SM}_R^{-1} \mathbf{SM}_L. \tag{26}$$

서론부에서 기언급한 바와 같이, 최종 시스템 행렬식 식 (25)에 포함된 시스템 행렬 \mathbf{SM} 은 주파수 파라미터의 함수가 아니며, 그 성분은 모두 상수로 구성되어 있다. 평판의 고유진동수는 식 (25)를 Matlab과 같은 일반적인 대수 고유치 문제 solver(solver)를 이용해 푸는 방법에 의해 쉽게 구해질 수 있다. 그러나 대수 고유치 문제로 정식화하는 과정에서 시스템 행렬의 크기가 $NM \times NM$ 으로 증가되는 단점은 존재한다. (참고로 기존 NDIF법에 의해 구해지는 시스템 행렬의 크기는 $N \times N$ 이다.)

한편 시스템 행렬의 크기가 $NM \times NM$ 이기 때문에 식 (25)로부터 NM 개의 고유치가 구해지게 되며, 구해진 고유치가 원래의 고차 다항식(식 (18))을 만족하는지 확인하는 과정을 통해 잉여고유치(spurious eigenvalues)를 제거할 수 있다.

현재 저자는 상기와 같은 불편함을 제거하기 위한 방안으로 시스템 행렬식으로부터 진짜 고유치(real eigenvalues)를 바로 얻을 수 있도록 하기 위하여, Ruhe⁽²³⁾와 Davis⁽²⁴⁾의 방법을 이 논문에 적용하는 방안을 연구 중에 있다.

3. 검증 예제

이 논문에서 대수 고유치 문제로 새로이 정식화된 NDIF법의 정확성을 검증하기 위해, 두 가지 형상의 평판에 대해 이 논문에서 개발한 기법을 적용하였다. 두 예제에서는 두께(h)가 0.005 m, 영률(E)이 210 GPa, 푸이송 비(ν)가 0.3, 밀도(ρ_s/h)가 7800 kg/m³인

물성치를 가진 평판이 사용되었다.

3.1 직사각형 평판

이 예제에서는 Fig. 2와 같이 가로 길이가 1.2 m, 세로 길이가 0.9 m인 직사각형 평판을 24개의 노드로 이산화하여 고유치 해석이 이루어졌다. 참고로 이 예제에서 고려하고 있는 단순지지 경계단을 가진 직사각형 평판은 엄밀해를 가지므로 해석 결과는 이들 엄밀해와 비교되었다.

Table 1은 이 논문에서 개발한 방법(MNDIF method, modified NDIF method), 기존의 NDIF법, FEM(NASTRAN), 엄밀해 방법(exact method⁽¹⁹⁾)에 의해 구해진 고유진동수 결과를 보여준다. 그리고 표에서 고유진동수값 바로 밑에 괄호로 표시된 값은

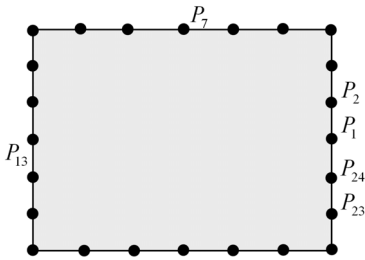


Fig. 2 Rectangular plate discretized by 24 nodes

Table 1 Natural frequency f_i (Hz) of the rectangular plate(parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by the exact method)

f_i	MNDIF method ($M=30$)	NDIF method	FEM (1089 nodes)	Exact method ⁽¹⁹⁾
	24 nodes			
1	23.79 (0.00)	23.79 (0.00)	23.81 (0.08)	23.79
2	49.47 (0.02)	49.48 (0.00)	49.60 (0.24)	49.48
3	69.44 (0.03)	69.46 (0.00)	69.67 (0.30)	69.46
4	92.29 (0.01)	92.30 (0.00)	92.87 (0.62)	92.30
5	95.21 (0.05)	95.16 (0.00)	95.46 (0.32)	95.16
6	138.00 (0.01)	137.98 (0.00)	138.73 (0.54)	137.98
7	145.53 (0.04)	145.59 (0.00)	146.59 (0.69)	145.59
8	152.29 (0.03)	152.26 (0.00)	154.03 (1.17)	152.25

엄밀해(exact method에 의한 해석 결과)에 대한 오차를 보여준다. 표에서 단지 24개의 노드를 사용한 MNDIF법 결과를 엄밀해와 비교해보면 오차가 0.05 % 이내로 이 논문에서 제안하는 방법(MNDIF법)이 아주 정확함을 확인할 수 있다.

반면에 1089개의 많은 노드를 사용한 FEM 결과는 단지 24개의 노드를 사용한 MNDIF법 결과에 비해 상대적으로 큰 오차를 가짐을 확인할 수 있다. 그리고 NDIF법이 MNDIF법에 비해 정확한 것으로 확인되는데, 이는 MNDIF법이 식 (10)에서 베셀 함수를 시리즈 함수로 근사화하는 과정을 이용하기 때문이다.

3.2 임의의 형상 평판

이 예제에서는 Fig. 3에서와 같은 임의의 사각형

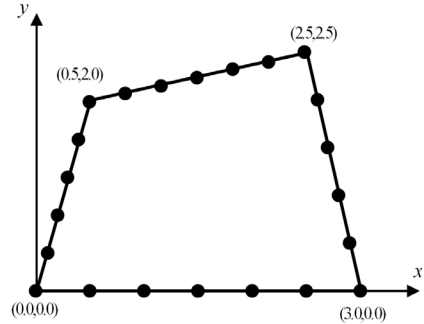


Fig. 3 Arbitrarily shaped plate discretized by 22 nodes

Table 2 Natural frequency f_i (Hz) of the arbitrarily shaped plate(parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by NDIF method)

f_i	MNDIF method ($M=30$)	NDIF method	FEM		
	22 nodes		1812 nodes	1060 nodes	438 nodes
1	4.513 (0.36)	4.497	4.410 (1.93)	4.410	4.410
2	10.40 (0.10)	10.39	10.24 (1.44)	10.24	10.17
3	11.89 (0.17)	11.87	11.71 (1.35)	11.71	11.64
4	18.02 (0.00)	18.02	17.83 (1.05)	17.73	17.55
5	20.06 (0.05)	20.07	19.75 (1.59)	19.65	19.65
6	23.72 (0.04)	23.73	23.36 (1.56)	23.36	23.25

평판에 대해 이 연구에서 제안한 방법을 적용하였으며, NDIF법 및 MNDIF법을 적용하기 위하여 평판의 경계는 그림과 같이 22개의 노드들로 이산화되었다.

Table 2는 MNDIF법, NDIF법 및 FEM(NASTRAN)에 의해 구해진 고유진동수 결과들을 보여준다. 그리고 고유진동수 하단에 있는 괄호 속의 값들은 NDIF법에 대한 오차를 보여준다. 표에서 확인할 수 있듯이, 이 논문에서 제시된 MNDIF법은 기존의 NDIF법과 비교해볼 때 오차가 0.5% 이내로 매우 정확한 해석 결과를 제공함을 알 수 있다. 반면에 FEM은 MNDIF법에 비해 상대적으로 큰 오차를 보여주고 있음이 확인된다. 참고로 NDIF법은 정밀도는 FEM 보다 훨씬 더 우수한 것으로 기존의 저차 연구⁽³⁻⁷⁾에서 증명되었기 때문에, Table 2에서 오차의 기준 값으로 NDIF법에 의해 구해진 고유진동수를 이용하였다.

4. 결 론

이 논문에서는 단순 지지 경계조건을 가진 임의 형상 평판의 고유진동수를 효율적으로 구하기 위한 방안으로, 기존의 NDIF법을 대수 고유치 문제로 정식화하는 방법(MNDIF법)이 성공적으로 개발되었다.

개발된 MNDIF법은 기존의 NDIF법에 비해 매우 효율적으로 평판의 고유진동수를 제공함이 보여졌다. 더 나아가 MNDIF법에 의해 구해진 결과는 기존의 NDIF법 결과에 비해 거의 오차가 없을 뿐만 아니라, FEM에 비해 매우 정확한 고유진동수를 제공함이 두 가지 예제를 통해 검증되었다.

후 기

이 연구는 2009년도 한성대학교 교내연구비 지원 과제임.

이 논문은 2008년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2008-313-D00034).

참 고 문 헌

(1) Bathe, K., 1982, "Finite Element Procedures in

Engineering Analysis," Prentice-Hall, New Jersey.

(2) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, "Boundary Element Techniques," Springer-Verlag, New York.

(3) Kang, S. W. and Lee, J. M., 1999, "Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membrane Using Non-dimensional Dynamics Influence Function," Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, pp. 117~132.

(4) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, "Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function," Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.

(5) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, "Eigenmode Analysis of Arbitrarily Shaped Two-dimensional Cavities by the Method of Point-matching," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 107, No. 3, pp. 1153~1160.

(6) Kang, S. W. and Lee J. M., 2001, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges Using Wave-type Functions," Journal of Sound and Vibration, Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 9~26.

(7) Kang, S. W., 2002, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition Using Non-dimensional Dynamic Influence Functions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.

(8) Kang, S. W. and Lee J. M., 2002, "Free Vibration Analysis of Composite Rectangular Membranes with an Oblique Interface," Journal of Sound and Vibration, Vol. 251, No. 3, pp. 505~517.

(9) Kang, S. W., Kim, I. S. and Lee, J. M., 2003, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Free Edges Using Non-dynamic Influence Functions," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 10, pp. 821~827.

(10) Kang, S. W. 2004, "Free Vibration Analysis of Composite Rectangular Membranes with a Bent Interface," Journal of Sound and Vibration, Vol. 272,

No. 1, pp. 39~53.

(11) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2004, "Free Vibration Analysis of an Unsymmetric Trapezoidal Membrane," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272, No. 2, pp. 450~460.

(12) Kang, S. W., 2007, "Free Vibration Analysis of Clamped Plates with Arbitrary Shapes Using Series Functions," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 13, No. 10, pp. 531~538.

(13) Kang, S. W., 2007, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates with Free Edges by Considering the Phenomenon of Stress Concentration at Corners," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 220~225.

(14) Kang, S. W., Kim, I. S. and Lee, J. M., 2008, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Smoothly Varying Free Edges Using NDIF Method," *Transaction of ASME*, Vol. 130, No. 4, pp. 041010.1~041010.8.

(15) Kang, S. W. and Atluri, S. N., 2008, "Development of Meshless Method for Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Free Plates Using Local Polar Coordinates," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 18, No. 6, pp. 674~680.

(16) Kang, S. W. and Kim, S. H., 2008, "Vibration Analysis of Simply Supported Rectangular

Plates with Unidirectionally, Arbitrarily Varying Thickness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 312, pp. 551~562.

(17) Nardini, D. and Brebbia C. A., 1982, "A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements," *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 7, No. 3, pp. 157~162.

(18) Banerjee, P. K. and Ahmad, S., 1988, "A New Approach for the Acoustic Eigenfrequency Analysis," *International Journal of Numerical Methods Engineering*, Vol. 26, pp. 1299~1309.

(19) Blevins, R. D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," *Litton Educational Publishing*, New York.

(20) Conway, H. D. and Farnham, K. A., 1965, "The Free Flexural Vibration of Triangular, Rhombic and Parallelogram Plates and Some Analogies," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 7, pp. 811~816.

(21) Spiegel, M. R., 1983, "Advanced Mathematics," *McGraw-Hill, Inc*, Singapore.

(22) Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L., 1982, "Matrix Polynomials," *Academic Press*, New York.

(23) Ruhe, A., 1973, "Algorithms for the Non-linear Eigenvalue Problem," *Journal of Numerical Analysis*. Vol. 10, pp. 674~689.

(24) Davis, G. J., 1981, "Numerical Solution of a Quadratic Matrix Equation," *Journal of Scientific Computing*, Vol. 2, pp. 164~175.