

회전하는 보의 유한요소해석을 위한 유리형상함수의 확장

Extension of Rational Interpolation Functions for FE Analysis of Rotating Beams

김 용 우* · 정 재 호*

Yong-Woo Kim and Jaeho Jeong

(2009년 3월 20일 접수 ; 2009년 5월 6일 심사완료)

Key Words : Rotating Beam(회전하는 보), Rational Interpolation Function(유리형상함수), Finite Element Method(유한요소법), Euler-Bernoulli Beam(오일러-베르누이 보), Hermitian Shape Function(헤르미티안 형상함수)

ABSTRACT

Starting from the rotating beam finite element in which the interpolating shape functions satisfy the governing static homogeneous differential equation of Euler-Bernoulli rotating beams, we derived new shape functions that satisfy the governing differential equation which contains the terms of hub radius and setting angle. The shape functions are rational functions which depend on hub radius, setting angle, rotational speed and element position. Numerical results for uniform and tapered cantilever beams with and without hub radius and setting angle are compared with the available results. It is shown that the present element offers an accurate method for solving the free vibration problems of rotating beams.

기 호 설 명

$A(x)$: 보의 단면적
 E : 종탄성계수
 EL_0 : $x=0$ 에서의 굽힘강성
 $EI(x)$: 굽힘강성
 L : 보의 길이
 l : 보요소의 길이
 m_0 : $x=0$ 에서의 보의 단위길이 당 질량
 $m(x)$: 보의 단위길이 당 질량
 r : $x=0$ 에서 관성반경, $r = \sqrt{I_0/A_0}$
 R : 허브의 반경
 T : 보의 운동에너지
 $T(x)$: 원심력

U : 보의 변형에너지
 $w(x,t)$: 횡방향 변위
 w', w'', w^{iv} : x 에 관한 w 의 1차, 2차, 4차 도함수
 \dot{w}, \ddot{w} : 시간(t)에 관한 w 의 1차, 2차 도함수
 λ : 무차원 회전속도($\lambda^2 = m_0 \Omega^2 L^4 / EI_0$)
 ψ : 회전축에 대한 보의 설치각
 Ω : 보의 회전속도

1. 서 론

회전하는 보는 윈드 터빈이나 가스 터빈의 블레이드, 비행체의 프로펠러, 헬리콥터의 로터 등에서 볼 수 있는 중요한 기계구조요소이다. 헬리콥터 로터와 같이 가늘고 긴 구조물은 오일러-베르누이 보(Euler-Bernoulli beam)로 모델링할 수 있는데, 로터가 고속으로 회전할 때의 고유진동수와 고유진동형과 같은 보의 진동특성값을 정확히 예측할 필요가 있다. 회전하는 보의 진동에 관한 운동방정식은 그 이론해를

† 교신저자; 정회원, 순천대학교 기계공학과
 E-mail : kyw@sunchon.ac.kr
 Tel : (061)750-3536, Fax : (061)750-3530
 * 순천대학교 대학원 기계공학과

정확히 구할 수 없기 때문에 여러 가지의 근사해법을 사용하고 있다. 근사해법으로는 미분방정식의 급수해(series solution)을 구하기 위한 Frobenius 법⁽¹⁾을 사용하거나, 동적강성법(dynamic stiffness method)⁽²⁾을 사용, 또는 유한요소법⁽³⁻⁹⁾을 사용하여 회전하는 보의 고유진동수를 구하고 있다.

최근의 유한요소법을 이용한 해석에서는 정확한 해를 구하기 위해 지배미분방정식의 정적 부분(static part)을 만족하도록 형상함수를 선택하는 방법이 제안되었다⁽⁶⁾. 이러한 방법에서 형상함수는 요소의 길이뿐만 아니라 보의 길이, 요소의 위치 등의 함수가 된다.

좀더 최근에는 허미시안(Hermitian) 형상함수를 수정하여 회전하는 오일러-베르누이 보에 적용하는 방법이 제안되었다. 일반적으로 허미시안 형상함수는 회전하지 않는 오일러-베르누이 보에 사용되고 있다. 이 형상함수는 회전하지 않는 보의 지배방정식의 정적 부분의 제차미분방정식(homogeneous differential equation)을 만족시키는 3차 다항식이어서 정확도가 높은 근사해를 준다. Gunda와 Ganguli⁽⁷⁾는 회전하는 보의 지배방정식의 정적 부분을 만족시키도록 허미시안 형상함수를 수정하여 유한요소법에 적용함으로써 해의 정확도와 수렴도를 향상시켰다. 그러나 그들의 형상함수는 허브의 반경(hub radius)이 영인 경우 그리고 회전축에 대한 보의 설치각(setting angle)이 영인 경우에 한정하였다.

이 연구에서는 허브의 반경이 영이 아닌 경우뿐만 아니라 회전축에 대한 보의 설치각이 영이 아닌 오일러-베르누이 보의 운동방정식을 유도하고, 이 운동방정식의 정적부분의 제차미분방정식을 만족시키는 새로운 형상함수를 유도하였다. 새로운 형상함수를 사용하여 얻은 수치해를 다른 연구자들에 의해 발표되어 있는 몇 가지 예에 적용하여 수치해의 정확도를 비교 검토하였다.

2. 지배방정식과 형상함수

2.1 지배방정식의 유도

(1) 변형에너지

Fig. 1과 같이 회전하는 보는 임의의 위치 x 의 단면에서 다음과 같은 원심력을 받는다.

$$T(x) = \int_x^L m(x)\Omega^2(R+x)dx \quad (1)$$

이때, 축방향의 힘, $T(x)$ 에 의한 축방향의 변위를 $u_0(x)$ 라 하면 다음의 관계가 성립한다.

$$u_0' = \frac{du_0}{dx} = \frac{T(x)}{EA(x)} \quad (2)$$

Fig. 2의 미소 보요소의 길이 \overline{PQ} 의 변형을 고려

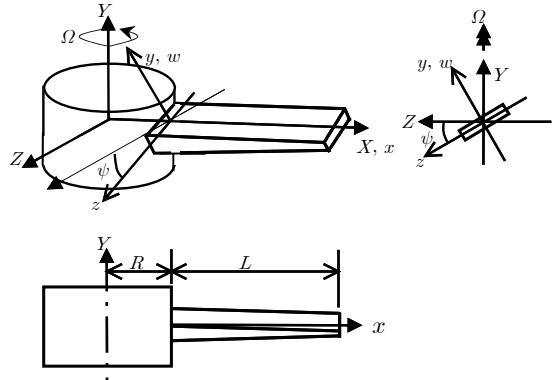


Fig. 1 Configuration of a tapered beam mounted on a rotating hub; coordinate system

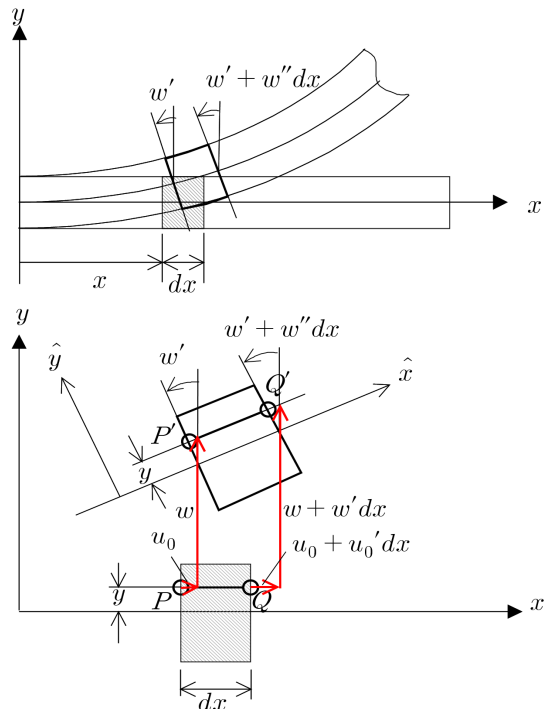


Fig. 2 Configurations of a beam before and after deformation; \overline{PQ} is displaced to $\overline{P'Q'}$ after bending deformation

하면, 보의 축방향 변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{P'Q - PQ}{PQ} \\ &= \sqrt{(1+u_0' - yw'')^2 + (w')^2} - 1 \\ &\approx u_0' - yw'' + \frac{1}{2}(w')^2 \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 보의 변형에너지는 다음과 같다⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A \int_o^L E(\epsilon_x)^2 dx dA \\ &= \int_0^L \frac{EI(x)}{2} (w'')^2 dx \\ &\quad + \int_0^L \frac{T(x)}{2} (w')^2 dx + C_1 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 C_1 은 다음과 같이 표현되는 상수이다.

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^L \frac{\{T(x)\}^2}{2EA(x)} dx \\ &= \int_0^L \frac{\left\{ \int_x^L m(x)\Omega^2(R+x) dx \right\}^2}{2EA(x)} dx \end{aligned} \quad (5)$$

(2) 운동에너지

위치 x 에 있는 임의의 미소 보요소의 도심에서, 병진운동의 속도성분들은 다음과 같다.

$$v_x = \Omega w \sin\psi, \quad (6)$$

$$v_y = \dot{w} \quad (7)$$

$$v_z = -\Omega \cos\psi(x + u_0) \quad (8)$$

따라서 오일러-베르누이 보의 운동에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \{ (v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2 \} dx \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 \sin^2\psi \int_0^L m(x) w^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (\dot{w})^2 dx + C_2 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 C_2 는 다음과 같은 상수이다.

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2} \Omega^2 \cos^2\psi \int_0^L m(x) (x + u_0)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 \cos^2\psi \int_0^L m(x) \left(x + \int_0^L \frac{T(x)}{EA(x)} dx \right)^2 dx \end{aligned} \quad (10)$$

(3) 운동방정식

식 (4)와 식 (9)를 이용하여 다음의 해밀톤의 원리 (Hamilton's principle)를 적용하면,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0 \quad (11)$$

다음과 같은 회전하는 보의 운동방정식을 얻는다.

$$m(x)\ddot{w} + (EI(x)w'')'' - (T(x)w')' - m(x)\Omega^2 \sin^2\psi w = 0 \quad (12)$$

식 (12)의 정적 부분의 제차미분방정식은 다음과 같다.

$$\{EI(x)w''\}'' - \{T(x)w'\}' - m(x)\Omega^2 \sin^2\psi w = 0 \quad (13)$$

단면이 균일한 보에 대해 $EI(x) = EI$, $m(x) = m$ 의 상수이므로, 식 (13)은 다음과 같이 표현된다.

$$EIw^{iv} - T(x)w'' - \{T(x)\}'w' - m\Omega^2 \sin^2\psi w = 0 \quad (14)$$

그런데 식 (1)의 원심력 $T(x)$ 는

$$T(x) = m\Omega^2 \{ (RL + L^2/2) - Rx - x^2/2 \} \quad (15)$$

와 같이 표현되므로

$$\{T(x)\}' = m\Omega^2(-R-x) \quad (16)$$

이다.

식 (15)와 식 (16)을 식 (14)에 대입하면 다음과 같은 단면이 균일한 보의 운동방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} EIw^{iv} - m\Omega^2 \{ (RL + L^2/2) - Rx - x^2/2 \} w'' \\ + m\Omega^2(R+x)w' - m\Omega^2 \sin^2\psi w = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)의 양변을 EI 로 나누고 정리하면 다음과 같다.

$$w^{iv} + \frac{a}{2}(x^2 + 2Rx - \Delta)w'' + a(x + R)w' + a\Gamma w = 0 \quad (18)$$

여기서 $a = m\Omega^2/EI$, $\Delta = 2RL + L^2$, $\Gamma = -\sin^2\psi$ 이다.

2.2 형상함수의 유도

Fig. 3에서와 같이 i 번째 요소에서 요소좌표계(\bar{x})와 전체좌표계(x) 사이의 관계는 다음과 같다.

$$x = x_i + \bar{x} \quad (19)$$

여기서 $x_i = \sum_{j=1}^{i-1} l_j$ 이다.

요소좌표계를 이용하여 식 (18)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4w}{d\bar{x}^4} + \frac{A}{2} [(\bar{x})^2 + 2(R+x_i)\bar{x} + \{(x_i)^2 + 2Rx_i - \Delta\}] \frac{dw^2}{d\bar{x}^2} \\ + A\{\bar{x} + (R+x_i)\} \frac{dw}{d\bar{x}} + A\Gamma w = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 $A = (m\Omega^2/EI)_i$ 로서 i 번째 요소의 평균값이다.

(1) 전통적인 허미시안 형상함수

$\Omega = 0$ (즉, $A = 0$)일 때, 식 (20)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d^4w}{d\bar{x}^4} = 0 \quad (21)$$

위 식은 회전하지 않는 오일러-베르누이 보의 지배방정식으로 다음과 같은 3차 다항식을 일반해로

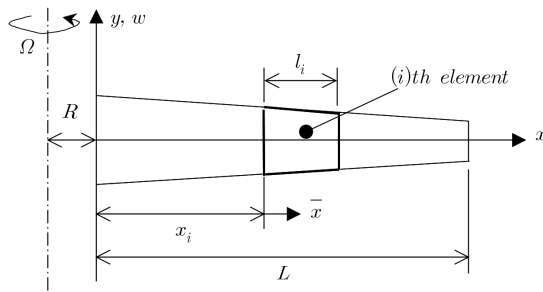


Fig. 3 Rotating tapered beam element geometry

찾는다.

$$w(\bar{x}) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{x} + \bar{a}_2\bar{x}^2 + \bar{a}_3\bar{x}^3 \quad (22)$$

이 식에 다음과 같은 요소의 경계조건들을 적용하여

$$\begin{aligned} w|_{\bar{x}=0} = w_1, \quad \frac{dw}{d\bar{x}}|_{\bar{x}=0} = w_2, \\ w|_{\bar{x}=l} = w_3, \quad \frac{dw}{d\bar{x}}|_{\bar{x}=l} = w_4 \end{aligned} \quad (23)$$

식 (22)의 계수 \bar{a}_k ($k=0,1,2,3$)을 결정하면 다음과 같은 형상함수를 구할 수 있다.

$$w = N_{1c}w_1 + N_{2c}w_2 + N_{3c}w_3 + N_{4c}w_4 \quad (24)$$

여기서 N_{kc} ($k=1,2,3,4$)는 전통적인 허미시안 형상함수(Hermitian shape function)로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_{1c} &= (2\bar{x}^3 - 3l\bar{x}^2 + l^3)/l^3 \\ N_{2c} &= (\bar{x}^3 - 2l\bar{x}^2 + l^2\bar{x})/l^2 \\ N_{3c} &= (-2\bar{x}^3 + 3l\bar{x}^2)/l^3 \\ N_{4c} &= (\bar{x}^3 - l\bar{x}^2)/l^2 \end{aligned} \quad (25)$$

(2) 새로운 형상함수

$\Omega \neq 0$ 일 때, 식 (20)의 해를 다음과 같이 4차 다항식으로 가정하여

$$w(\bar{x}) = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + a_3\bar{x}^3 + a_4\bar{x}^4 \quad (26)$$

식 (26)이 식 (20)과 요소의 경계조건식 (23)을 만족시키도록 계수 a_k ($k=0,1,2,3,4$)를 결정하면 다음과 같은 유리함수형태의 새로운 형상함수 N_k ($k=1,2,3,4$)를 얻는다.

$$w = N_1w_1 + N_2w_2 + N_3w_3 + N_4w_4 \quad (27)$$

여기서

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{R_1(\bar{x})}{lD(\bar{x})}, \quad N_2 = \frac{R_2(\bar{x})}{D(\bar{x})}, \\ N_3 &= \frac{R_3(\bar{x})}{lD(\bar{x})}, \quad N_4 = \frac{R_4(\bar{x})}{D(\bar{x})} \end{aligned} \quad (28)$$

이고, $R_k(\bar{x})$ ($k=1,2,3,4$)와 $D(\bar{x})$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 D(\bar{x}) = & l^2 \left[(10 + \Gamma) A \bar{x}^4 \right. \\
 & + 2 \{ 8(R + x_i) - 6l - \Pi \} A \bar{x}^3 \\
 & + \{ 6(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \\
 & - 18l(R + x_i) + 3l^2 + \Gamma l^2 \} A \bar{x}^2 \\
 & + \{ -6l(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) + 4l^2(R + x_i) \} A \bar{x} \\
 & \left. + (x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) Al^2 + 24 \right] \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_1(\bar{x}) = & 8A \bar{x}^7 + 7 \{ 2(R + x_i) - 3l \} A \bar{x}^6 \\
 & + 6 \{ (x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \\
 & - 6l(R + x_i) + 2l^2 \} A \bar{x}^5 \\
 & + 5 \{ -3(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \\
 & + 4l(R + x_i) + 2l^2 \} A \bar{x}^4 \\
 & + 4 \left[\{ 2(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \right. \\
 & \left. + 4l(R + x_i) - 3l^2 \} Al^2 + 12 \right] \bar{x}^3 \\
 & + 3 \left[\{ 2(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \right. \\
 & \left. - 6l(R + x_i) + l^2 \} Al^3 - 24l \right] \bar{x}^2 \\
 & + 2 \{ -3(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) + 2l(R + x_i) \} Al^4 \bar{x} \\
 & \left. + (x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) Al^5 + 24l^3 \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_2(\bar{x}) = & 4A \bar{x}^7 + 7 \{ (R + x_i) - 2l \} A \bar{x}^6 \\
 & + 3 \{ (x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \\
 & - 8l(R + x_i) + 6l^2 \} A \bar{x}^5 \\
 & + 10 \{ -(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \\
 & + 3l(R + x_i) - l^2 \} A \bar{x}^4 \\
 & + 2 \left[\{ 6(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \right. \\
 & \left. - 8l(R + x_i) + l^2 \} Al^2 + 12 \right] \bar{x}^3 \\
 & + 3 \left[\{ -2(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \right. \\
 & \left. + l(R + x_i) \} Al^3 - 16l \right] \bar{x}^2 \\
 & \left. + \{ (x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) Al^4 + 24l^2 \} \bar{x} \right] \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_3(\bar{x}) = & - \left[8a \bar{x}^7 + 7 \{ 2(R + x_i) - 3l \} A \bar{x}^6 \right. \\
 & + 6 \{ (x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \\
 & \left. - 6l(R + x_i) + 2l^2 \} A \bar{x}^5 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 5 \{ -3l(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) \\
 & + 4l^2(R + x_i) \} A \bar{x}^4 \\
 & \left. + 8 \{ (x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) Al^2 + 6 \} \bar{x}^3 - 72l \bar{x}^2 \right] \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_4(\bar{x}) = & 4a \bar{x}^7 + 7 \{ (R + x_i) - l \} A \bar{x}^6 \\
 & + 3 \{ (x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) - 4l(R + x_i) + l^2 \} A \bar{x}^5 \\
 & + 5 \{ -l(x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) + l^2(R + x_i) \} A \bar{x}^4 \\
 & + 2 \{ (x_i^2 + 2Rx_i - \Delta) Al^2 + 12 \} \bar{x}^3 - 24l \bar{x}^2 \quad (33)
 \end{aligned}$$

위의 새로운 형상함수에서 $\Omega \neq 0$ 이고 동시에 $R=0$, $\psi=0$ 이면 이 형상함수는 참고문헌 (7)의 형상함수와 동일하게 된다. 또한 $\Omega=0$ 이면 새로운 형상함수는 식 (25)의 전통적인 허미시안 형상함수로 된다.

3. 유한요소 수식화

(i)-번째 요소에 식 (11)의 Hamilton의 원리를 적용하면 다음의 유한요소 운동방정식을 얻는다.

$$[M^{(i)}] \{ \ddot{u}^{(i)} \} + ([K^{(i)}] - \Omega^2 \sin^2 \psi [M^{(i)}]) \{ u^{(i)} \} = 0 \quad (34)$$

여기서

$$[M^{(i)}] = \int_0^l m_i(\bar{x}) [N]^T [N] d\bar{x} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 [K^{(i)}] = & \int_0^l EI(\bar{x}) [N'']^T [N''] d\bar{x} \\
 & + \int_0^l T^{(i)}(\bar{x}) [N']^T [N'] d\bar{x} \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{(i)}(\bar{x}) = & \sum_{j=i}^{\neq l} \int_{x_j}^{x_{j+1}} m_j(x) \Omega^2 (R+x) dx \\
 & - \int_{x_i}^{x_i+\bar{x}} m_i(x) \Omega^2 (R+x) dx \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\{ \ddot{u}^{(i)} \}^T = \{ \ddot{w}_1^{(i)} \quad \ddot{w}_2^{(i)} \quad \ddot{w}_3^{(i)} \quad \ddot{w}_4^{(i)} \} \quad (38)$$

$$\{ u^{(i)} \}^T = \{ w_1^{(i)} \quad w_2^{(i)} \quad w_3^{(i)} \quad w_4^{(i)} \} \quad (39)$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (40)$$

$$[N'] = \frac{d[N]}{dx}, \quad [N''] = \frac{d^2[N]}{dx^2} \quad (41)$$

따라서 전체방정식은 다음과 같은 형태가 된다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + ([K] - \Omega^2 \sin^2 \psi [M])\{u\} = 0 \quad (42)$$

위의 전체방정식 (41)에 $\{u\} = \{u^*\}e^{i\omega t}$ 를 대입하면 다음과 같은 고유값 문제(eigenvalue problem)로 된다.

$$([K] - \Omega^2 \sin^2 \psi [M] - \omega^2 [M])\{u^*\} = 0 \quad (43)$$

4. 수치실험 및 검토

4.1 $R=0, \psi=0^\circ$ 인 균일 보(uniform beam)

보의 길이가 $L=1, L/r=100$ (여기서 $r = \sqrt{I_0/A_0}$)인 단면이 균일한 보(이 경우, $m(x) = m_0, EI(x) = EI_0$ 로 일정)에 대하여, 요소 20개를 사용하여 모델링하고 새로운 형상함수를 적용하여 얻은 수치해를 기존에 발표되어 있는 수치해와 함께 Table 1에 비교 정리하였다.

Table 1 Comparison of first, second and third mode frequency of a uniform cantilever beam ($L/r=100, R=0, \psi=0^\circ$)

λ	1st mode		2nd mode		3rd mode	
	New shape function	Reference [3]	New shape function	Reference [3]	New shape function	Reference [3]
0	3.5160155	3.5160153	22.034538	22.034492	61.698224	61.697214
2	4.1373199	4.1373196	22.614972	22.614922	62.274223	62.273184
10	11.202334	11.202328	33.640533	33.640366	74.651097	74.649295

Table 2 Comparison of first, second and third mode frequency of a tapered cantilever beam ($L/r=100, R=0, \psi=0^\circ$)

λ	1st mode		2nd mode		3rd mode	
	New shape function	Reference [5]	New shape function	Reference [5]	New shape function	Reference [5]
0	3.8238	3.8238	18.3173	18.3173	47.2656	47.2648
2	4.4368	4.4368	18.9366	18.9366	47.8724	47.8716
10	11.5015	11.5015	30.1828	30.1827	60.5651	60.5639

Table 3 Comparison of first, second and third mode frequency of a uniform cantilever beam ($L/r=100, R=0, \psi=90^\circ$)

λ	1st mode		2nd mode		3rd mode	
	New shape function	Reference [4]	New shape function	Reference [4]	New shape function	Reference [4]
0	3.5160	3.516	22.0345	22.036	61.698	-
2	3.6218	3.622	22.5264	22.528	62.242	-
10	5.0490	5.050	32.1198	32.123	73.978	-

Table 4 Comparison of first, second and third mode frequency of a uniform cantilever beam ($L/r=100, R=1, \psi=90^\circ$)

λ	1st mode		2nd mode		3rd mode	
	New shape function	Reference [4]	New shape function	Reference [4]	New shape function	Reference [4]
0	3.5160	3.516	22.0345	22.036	61.6982	-
2	4.4005	4.401	23.2803	22.282	63.0369	-
10	13.2578	13.261	43.2269	43.237	88.5968	-

4.2 $R=0, \psi=0^\circ$ 인 테이퍼 보(tapered beam)

보의 길이가 $L=1, L/r=100, m(x)=m_0(1-0.5x), EI(x)=EI_0(1-0.5x)^3$ 인 오일러-베르누이 보에 대하여, 요소 20개를 사용하여 모델링하고 새로운 형상함수를 적용하여 얻은 수치해를 기존에 발표되어 있는 수치해와 함께 Table 2에 비교 정리하였다.

4.3 허브 반경 및 설치각이 영이 아닌 균일 보

보의 길이가 $L=1, L/r=100$ 그리고 설치각이 $\psi=90^\circ$ 인 보를 요소 20개로 모델링한 경우, 새로운 형상함수를 사용하여 얻은 수치해를 다른 연구자의 수치해와 함께 Table 3($R=0, \psi=90^\circ$)과 Table 4 ($R=1, \psi=90^\circ$)에 각각 비교 정리하였다.

Tables 1~4에서 보는 바와 같이 새로운 형상함수를 사용하여 얻은 유한요소해석 결과가 매우 정확함을 알 수 있다.

4.4 파라미터 변화에 따른 고유진동수의 변화

$L=1, L/r=100$ 이고 단면이 균일한 오일러-베르누이 보에 대하여, 허브 반경(R) 및 설치각(ψ)의 변화가 보의 고유진동수에 미치는 영향을 알아보기 위하여 수치해석을 실시하여 그 결과들을 Fig. 4와 Fig. 5에 각각 도시하였다. Fig. 4와 Fig. 5의 결과로부터 다음의 사실을 확인할 수 있다. 첫째, 허브 반경이 증가할수록 고유진동수가 증가하나 그 효과

는 고차 모드일수록 민감하다. 둘째, 설치각(ψ)이 클수록 고유진동수는 감소하며, 그 효과는 고차 모드일수록 둔감하다.

또한, $R=0, \psi=0^\circ, L=1, L/r=100$ 이고 $m(x)=m_0(1-\alpha x), EI(x)=EI_0(1-\alpha x)^3$ 의 테이퍼 보(tapered beam)에서 테이퍼 파라미터(taper parameter, α)의 변화가 고유진동수에 미치는 효과를 알아보기 위해 수치해석을 실시하고 그 결과를 Fig. 6에 도시하였다. Fig. 6의 2차 및 3차 모드에서는 테이퍼 파라미터(α)가 증가할수록 고유진동수가

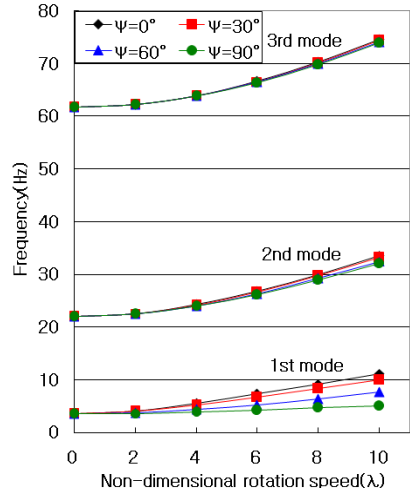


Fig. 5 Variation of the first three frequencies of the rotating uniform beam with $R=0$ and $\alpha=0$

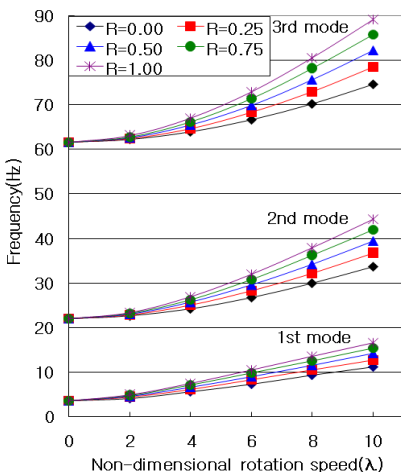


Fig. 4 Variation of the first three frequencies of the rotating uniform beam with $\psi=0^\circ$ and $\alpha=0$

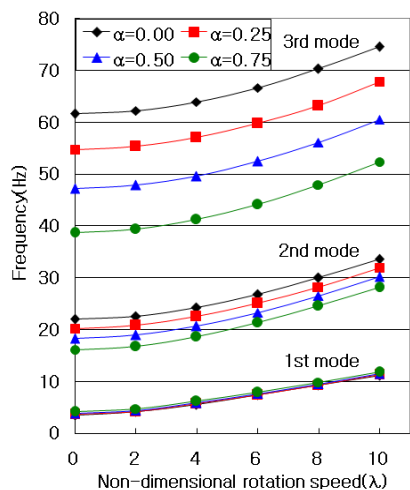


Fig. 6 Variation of the first three frequencies of the rotating tapered beam with $R=0$ and $\psi=0^\circ$

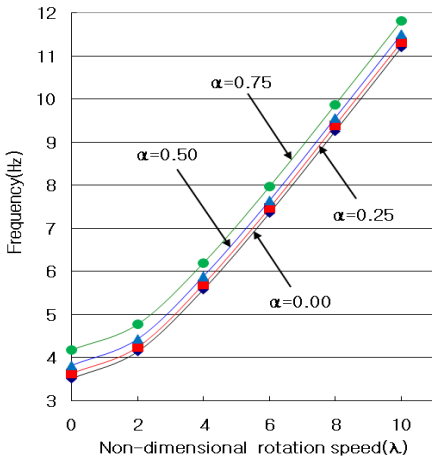


Fig. 7 Variation of the fundamental frequency of the rotating tapered beam with $R=0$ and $\psi=0^\circ$

감소함을 알 수 있다. 그러나 Fig. 7(Fig. 6의 첫 번째 모드를 확대하여 다시 그린 그림)에서 보인 바와 같이, 첫 번째 모드에서는 α 가 증가할수록 고유진동수도 증가함을 알 수 있다. 이러한 경향은 참고 문헌 (4)의 결과와 일치한다.

Figs. 4~6을 전체적으로 보면, 무차원 회전속도 (λ)가 증가할수록 고유진동수는 증가한다. 이는 회전속도가 증가함에 따라 원심력에 의해 보의 강성이 증가하기 때문이다.

5. 결 론

이 연구에서는, 회전하는 허브에 부착되어 있는 블레이드를 오일러-베르누이 보로 가정하여, 허브 반경 및 설치각이 영이 아닌 보의 운동방정식과 유한요소 방정식을 유도하였다. 그리고 이 운동방정식의 정적 부분의 체차미분방정식을 만족하는 새로운 형상함수를 유도하였다, 이 형상함수는 유리함수의 형태로서 요소의 길이, 회전속도, 요소의 위치, 허브 반경, 블레이드의 설치각 등의 함수이다. 이 형상함수는 회전속도, 허브 반경, 설치각이 영일 경우, 전통적인 허미시안 형상함수로 된다. 그러므로 이 요소는 전통적인 유한요소법에서 사용하는 형상함수를 확장한 경우로서 기존의 유한요소 프로그램에 쉽게 적용할 수 있는 장점이 있다.

참 고 문 헌

- (1) Giurgiutiu, V. and Stafford, R. O., 1977, "Semi-analytic Methods for Frequencies and Mode Shapes of Rotor Blades," *Veritica*, Vol. 1, No. 4, pp. 291~306.
- (2) Banerjee, J. R., 2000, "Free Vibration of Centrifugally Stiffened Uniform and Tapered Beams Using the Dynamic Stiffness Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 5, pp. 857~875.
- (3) Hodges, D. J. and Rutkowski, M. J., 1981, "Free Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable order Finite Element Method," *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 11, pp. 1459~1466.
- (4) Yokoyama, T., 1988, "Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 30, No. 10, pp. 743~755.
- (5) Wang, G. and Wereley N. M., 2004, "Free Vibration Analysis of Rotating Blades with Uniform Tapers," *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 12, pp. 2429~2437.
- (6) Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S. and Reddy, J. N., 2003, "A New Finite Element for the Analysis of Functionally Graded Materials," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, pp. 519~539.
- (7) Gunda, J. B. and Ganguli, R., 2008, "New Rational Interpolation Functions for Finite Element Analysis of Rotating Beams," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, pp. 578~588.
- (8) Ozgumus, O. O. and Kaya, M. O., 2007, "Energy Expressions and Free Vibration Analysis of a Rotating Double Tapered Timoshenko Beam Featuring Bending-Torsion Coupling," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, pp. 562~586.
- (9) Yoo, H. H. and Shin, S. H., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, No. 5, pp. 807~828.