

# 등간격의 좁은 반경방향 슬롯을 가진 환형 박판의 고유진동 특성

## Modal Vibration Characteristics of an Annular Disk Containing Evenly Spaced Narrow Radial Slots

이 형 일\*

Hyeongill Lee

(2009년 2월 25일 접수 ; 2009년 5월 20일 심사완료)

**Key Words** : Annular Disk(환형 디스크), Free Vibration(고유진동), Radial Slot(반경방향 슬롯)

### ABSTRACT

Modal vibration characteristics of a thin annular disk containing narrow radial slots are studied numerically and experimentally. Existing analytical solution is examined based on these results revealing that it can not precisely predict eigenvalues of the disk with slots since it does not accurately consider change in the vibration modes and change in strain energy density distributions due to the slots. Parametric study on slot length found that distortions in the mode shape as well as changes in the corresponding natural frequencies are proportional to the slot length. Consequently, errors in the calculated eigenvalues are also proportional to the slot length and accurate data can not be obtained with existing analytical solution above a certain level of slot length. Same phenomena can be observed in both free-free disk and fixed-free disk.

### 1. 서 론

굽힘진동은 원형 또는 환형 디스크 형상을 갖는 기계 또는 구조물 부품의 대표적인 진동이며 중요한 소음발생의 원인이다. 많은 경우, 디스크는 의도적으로 만들어지거나 불가피하게 발생한 기하학적 비대칭성을 가지며, 이에 따라 디스크의 진동 특성이 영향을 받게 된다. 이 연구에서는 좁은 반경방향 슬롯을 중심으로 기하학적인 비대칭성이 환형 디스크의 고유진동 특성에 미치는 영향을 검토하였다.

박판이론에 기초한 섭동법(perturbation method)을 이용한 기존 해법의 정확도를 유한요소법을 이용한 전산해석 및 실험을 통하여 검증하였다. 자유-자유 및 고정-자유 경계조건을 갖는 디스크의 고유진동 특성을 대상으로 한 검증을 통하여 기존의 접

근 방법이 슬롯으로 인한 고유진동 모드 및 변형 에너지의 변동을 충분히 반영하지 못함에 따라 고유진동 특성을 정확하게 예측할 수 없음을 확인하였다. 다른 방법으로, 슬롯을 가진 디스크의 모드를 균일한 디스크의 모드들의 중첩으로 나타내고 이를 바탕으로 고유치를 구하면 기존 방법에 비해 제한적이지만 개선된 결과를 얻을 수 있었다. 또한 유한요소법으로 슬롯 길이 및 경계조건이 고유진동 특성에 미치는 영향도 검토하였다.

원형 또는 환형 디스크의 진동 특성에 대한 다양한 연구가 진행되었으며, 관련 논문도 다수 발표되었다<sup>(1-6)</sup>. 반경방향 슬롯을 가진 디스크의 진동에 대한 논문도 다수 발표되었다<sup>(7-11)</sup>. Mote<sup>(7)</sup> 유한요소법을 이용하여 반경방향 슬롯을 가진 환형 디스크의 안정성을 검토하였다. Yu와 Mote<sup>(8)</sup> 섭동법을 이용하여 기하학적인 비대칭성을 갖는 환형 디스크의 동특성을 연구하고 반경방향 슬롯이 디스크의 고유진동 모드 중 일부를 두 개의 모드로 분리시킨

\* 교신저자; 정회원, 경북대학교 기계자동차공학부  
E-mail : hilee@knu.ac.kr  
Tel : (054)530-1406, Fax : (054)530-1407

다는 것을 밝혀냈다. Shen과 Mote는<sup>(9)</sup> 등간격으로 반경방향 방향 이물질 섹터를 가진 원형 디스크의 고유진동 특성을 분석, 이물질 섹터로 인하여 중복된 고유진동 모드가 분리됨을 확인하였으며, 균일한 디스크의 고유진동 특성을 이용한 섭동법으로 이물질 섹터를 포함한 디스크의 고유진동 특성을 표시하였다. Honda 등은<sup>(10)</sup> 반경방향 슬롯을 가진 원형 또는 환형의 디스크의 표면을 회전하는 조화력에 대한 디스크의 응답을 모드 합성법을 이용하여 구하였다. Rim과 Mote는<sup>(11)</sup> 반경방향 슬롯을 가진 원형 톱의 불안정 현상(kick-off)을 실험, 유한요소법, 수치해석을 이용한 안정성 해석 등으로 분석하여 이 현상의 주요 원인을 확인하였다.

이 연구에 이용된 4개의 동일한 반경방향 슬롯을 가진 환형 디스크가 Fig. 1에 설명되어 있다. 디스크 재질은 감쇠가 아주 작은 등방성 재질로 가정하고, 디스크의 내경 및 외경부 모두 자유 경계조건을 가지며, 정지하여 있다고 가정한다. 디스크의 기하학적 치수와 물성은 Table 1에 설명되어 있다.

이 연구에 적용된 가정들은 다음과 같다. (1) 디

스크는 선형시불변(LTI) 시스템으로 가정할 수 있다. (2) 디스크는 슬롯 외의 다른 비대칭 요인은 없다. 이 연구의 목적은 다음과 같다. (1) 좁은 반경방향 슬롯이 환형 디스크의 고유진동 특성에 미치는 영향을 분석한다. (2) 디스크의 고유진동 특성에 대한 슬롯 길이의 영향을 검토한다. (3) 내경부가 고정된 디스크의 고유진동 특성에 미치는 영향을 검토한다.

## 2. 고유진동 특성

### 2.1 이론적 해법

슬롯을 포함하지 않은 균일한 환형 디스크의 굽힘 진동 특성은 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다<sup>(3)</sup>.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w - \lambda^4 w = 0 \quad (1)$$

여기서  $\lambda$ 는 무차원화된 고유치이며  $w$ 는 굽힘에 의해 면에 수직으로 발생하는 변위를 표시한다. 진동 모드는 다음과 같이 가정할 수 있다<sup>(3)</sup>.

$$w_{mn}(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi$$

$$W(r) = C_1 J_n(\lambda_{mn} r) + C_2 Y_n(\lambda_{mn} r) + C_3 I_n(\lambda_{mn} r) + C_4 K_n(\lambda_{mn} r) \quad (2)$$

식 (2)에서  $J_n$  및  $Y_n$ 은 각각 제 1종 및 제 2종 베셀함수이며,  $I_n$  및  $K_n$ 은 각각 제 1종 및 제 2종 변형 베셀함수이다.  $n$ 은 파절직경(nodal diameter)을 나타내는 베셀함수의 차수이며  $m$ 은 파절원(nodal circle)의 수를 나타내는 고유치의 차수이다. 내·외경부가 모두 자유단인 디스크의 경우, 경계조건은 다음의 식으로 나타낼 수 있다<sup>(3)</sup>.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{(1-\nu^2)}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \times \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (3)$$

슬롯이 없는 균일한 디스크의 경우, 고유치( $\lambda_0$ )<sub>mn</sub> 과 해당 진동 모드  $\phi_{mn}$ 은 식 (1)~(3)을 이용하여 구

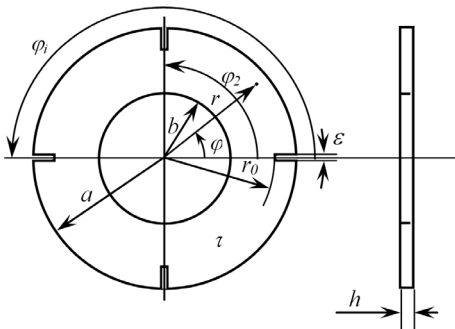


Fig. 1 Annular disk containing 4 equally spaced, identical narrow radial slots

Table 1 Disc dimensions and material properties

Outer radius ( $a$ )	139.0 mm
Inner radius ( $b$ )	82.5 mm
Thickness ( $h$ )	3.2 mm
Slot length ( $a-r_0$ )	25.0 mm
Slot sector angle ( $\epsilon$ )	1.1°
Mass density ( $\rho_d$ )	7905.9 kg/m <sup>3</sup>
Young's ratio ( $E$ )	205 GPa
Poisson's ratio ( $\nu$ )	0.29
Plate stiffness ( $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ )	611.2 Nm

$$\lambda_{mn} = (\lambda_0)_{mn} + \varepsilon(\lambda_1)_{mn} + O(\varepsilon^2)$$

$$(\lambda_1)_{mn} = \frac{(\lambda_0)_{mn} \sum_{i=1}^4 \int_{r_0}^a (w_0)_{mn}^2(r, \varphi_i) r dr - \sum_{i=1}^4 \int_{r_0}^a P((w_0)_{mn}(r, \varphi_i)) r dr}{\int_{\tau} (w_0)_{mn}^2 d\tau} \quad (4)$$

$$P(w) = (\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

할 수 있으며, 이 경우 하나 이상의 파절직경을 가진 모든 진동 모드는 중복된 고유치를 갖는다<sup>(3)</sup>.

이전에 수행된 연구에 따르면, 균일한 디스크에 반경방향 슬롯을 도입하는 경우, 슬롯의 수에 따라 특정한 모드의 중복된 고유치가 두 개의 서로 다른 고유치로 분리된다<sup>(8)</sup>. 이 연구 결과를 이용하면 Fig. 1에 주어진 샘플 디스크의 분리된 고유치는 슬롯이 없는 균일한 디스크의 고유치와 진동 모드를 이용하여 식(4)와 같이 표현할 수 있다. 이 식에서  $\lambda_{mn}$ 은 슬롯을 포함한 디스크의  $(m, n)$  모드 고유치며  $(\lambda_0)_{mn}$ 와  $(w_0)_{mn}$ 는 각각 슬롯이 없이 균일한 디스크의 고유치와 해당 모드 변위이다.  $\varepsilon$ 은 슬롯의 섹터 각도이며  $P(w)$ 는 굽힘으로 인한 디스크의 변형 에너지 밀도에 상수  $2/D$ 를 곱한 값이고  $\nabla^2$ 는 라플라스 연산자이다. 또한, 슬롯으로 인해 분리된 고유치중 하나에 해당하는 진동 모드는 슬롯의 위치에 절점(nodal point)이 존재하고, 다른 하나의 고유치에 해당하는 모드는 슬롯에 반절점(anti-nodal point)이 존재하므로 두 개의 분리된 고유치에 해당하는 모드는 다음 식과 같이 근사화될 수 있다<sup>(8)</sup>.

$$\psi_{mn,c}(r, \varphi) = W(r) \cos n(\varphi) + O(\varepsilon)$$

$$\psi_{mn,s}(r, \varphi) = W(r) \sin n(\varphi) + O(\varepsilon) \quad (5)$$

이 식에서 첨자  $c$ 와  $s$ 는 모드의 형태를 나타내는 첨자로  $c$ 는 슬롯 위치에 모드의 반절점이 존재하는 경우를 표시하며,  $s$ 는 해당 위치에 절점이 존재하는 경우를 나타낸다. 또한  $\varphi$ 는 Fig. 1에 표시된 것과 같이 슬롯을 기준으로 한 원주방향 위치를 나타낸다.  $W(r)$ 은 진동으로 인한 디스크 변위의 반경방향 방향 변동을 나타내는 함수이다.

그러나, 슬롯을 포함한 디스크의 고유치를 구하는

식(4)와 해당 진동 모드를 표시하는 식(5)는 모두 슬롯이 모드에 미치는 영향이 슬롯 주변의 아주 작은 영역에 국한되어 있어 디스크의 전체적인 모드는 슬롯에 의해 영향을 받지 않는다는 가정에 기초하고 있다. 만약, 디스크의 전체적인 모드 형태가 슬롯에 의해 영향을 받는 경우에는 위의 두 식도 진동 형태에 맞게 수정되어야 한다.

### 2.2 실험 및 유한요소해석을 이용한 검증

식(1)~(5)를 이용하여 얻은 결과는 실험 및 유한요소해석 결과와 비교하여 그 정확도를 검증하였다. 검증은 처음 9개의 모드에 대해 수행되었다. UGS사의 I-DEAS를 이용한 유한요소해석에서는 2104개의 고체요소와 4512개의 절점으로 이루어진 모델이 사용되었다. 실험 모드 해석에서는 디스크의 외경 부위에서 충격해머(PCB GK291C)를 이용하여 수직 방향으로 가진하면서 정해진 위치에서 가속도계(PCB 352C22)를 이용하여 응답( $\dot{w}$ )을 측정하였다. 최대주파수( $f_{max}$ )와 분해능( $\Delta f$ )은 각각 900 Hz와 0.5 Hz로 설정하였다. 이와 같은 시험을 통해 Fig. 1의 샘플 디스크 및 동일한 치수를 가진 균일한 디스크의 가속도 스펙트럼[ $\dot{w}/f(\omega)$ ]을 구한 다음 서로 비교하였다. Fig. 2에 주어진 결과를 보면, 슬롯이 도입됨으로 인해 디스크의 동특성이 크게 변화하여 모든 피크의 고유진동수가 감소하였으며 일부 피크들은 그 크기도 변화되었다. 이들 스펙트럼을 이용하여 각 디스크의 고유치( $\omega_{mn,q}$ ), 모드 감쇠비( $\zeta_{mn,q}$ ) 등을 구하였다. Table 2에 슬롯이 없는 균일한 디스크에 대하여 식(2) 및 (3)을 이용하여 계산한 고유치를 유한요소해석 및 실험을 통해 얻은 결과와 비교하였다. 표에서 알 수 있는 바와 같이, 비교한 모든 모드에 대해 3종류의 결과들이 잘 일치한다.

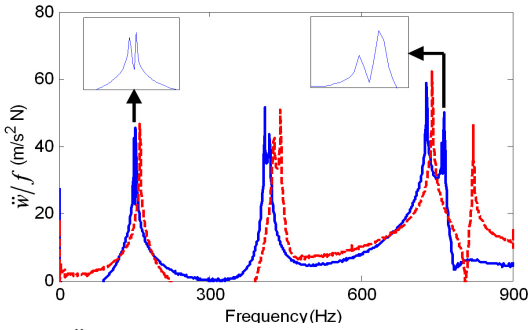


Fig. 2  $\ddot{w}/f(\omega)$  for the sample disk (—) and uniform disk (---)

Table 2 Eigenvalues of the uniform disk with free-free boundary condition

Mode indices		Non-dimensional eigenvalues $\lambda^2 = \omega_n a^2 (\rho_d h/D)^{1/2}$			Damping ratio, $\zeta$ (%)	Remarks
m	n	Analytical	FEM	Experiment		
0	2	3.96	3.93	3.98	0.43	Repeated
1	0	10.56	10.43	10.55	0.35	
0	3	10.79	10.72	10.85	0.12	Repeated
1	1	18.45	18.06	18.29	0.12	Repeated
0	4	20.24	20.07	20.30	0.39	Repeated

(1) 슬롯이 고유치에 미치는 영향

식 (4)를 이용하여 계산한 샘플 디스크의 고유치를 실험 및 유한요소해석의 결과와 함께 Table 3에 비교하였다. 표에서 알 수 있는 바와 같이,  $n=2$  또는  $n=4$ 인 모드의 고유치는 모두 서로 다른 두 개의 고유치로 분리됨을 알 수 있으며, 이는 이전에 보고된 논문들과 일치하는 현상이다<sup>(8-10)</sup>. 또한, 두 개의 분리된 고유치중 작은 고유치에 해당하는 모드는 슬롯 위치에 반절점 존재하고, 다른 고유치에 해당하는 모드는 슬롯 위치에 절점이 존재한다. Table 2에 주어진 균일한 디스크에 대한 계산 결과와 달리, 식 (4)를 이용한 이론적인 계산 결과가 다른 두 방법을 이용한 결과와 다소 차이를 나타내고 있다. 유한요소해석과 실험 결과는 서로 잘 일치하므로 미루어, 식 (4)를 이용한 고유치 추정이 정확하지 않은 것으로 판단된다. 이 현상의 원인은 다음에 설명된 것과 같이 슬롯 도입으로 인한 고유진동 모드 형태의 변동과 이로 인한 디스크내의 변형 에너지 밀도 분포의 변동을 주어진 식으로 정확히 고려할 수 없기 때문인 것으로 판단된다.

Table 3 Eigenvalues for the sample disk with free-free boundary condition

Mode indices			Non-dimensional eigenvalues $\lambda^2 = \omega_n a^2 (\rho_d h/D)^{1/2}$			Damping ratio, $\zeta$ (%)	Remarks
m	n	q	Analytical	FEM	Experiment		
0	2	c	3.94	3.71	3.68	0.30	
0	2	s	3.96	3.80	3.78	0.09	
1	0	-	10.54	10.08	10.30	0.14	
0	3	-	10.79	10.10	10.10	0.48	Repeated
1	1	-	18.44	17.70	18.00	0.44	Repeated
0	4	c	20.16	18.74	18.77	0.31	
0	4	s	20.26	18.80	18.87	0.39	

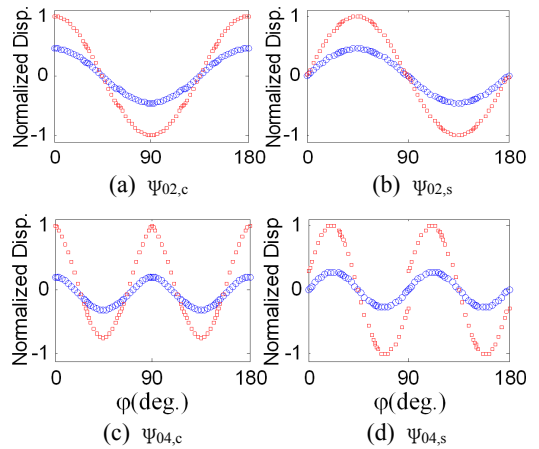


Fig. 3 Normalized modal displacement. Key:  $\circ\circ\circ$ , outer edge;  $\bullet\bullet\bullet$ , inner edge

(2) 슬롯이 진동 모드에 미치는 영향

반경방향 슬롯이 고유진동 모드에 미치는 영향도 유한요소해석과 실험을 통해 검토하였다. 모드 형태에 따른 영향을 파악하기 위하여  $\psi_{02,c}$ 와  $\psi_{04,c}$ 에서 내경부 및 외경부에 발생하는 변위를  $\psi_{02,s}$ 와  $\psi_{04,s}$ 에서 동일한 위치에 발생하는 변위와 비교하였다. Fig. 3에 주어진 결과에서 알 수 있는 바와 같이  $\psi_{04,c}$ 의 변위는 내경 및 외경부에서 서로 반대 방향으로 치우쳐 있음을 알 수 있다. 다른 모드들은 이와 같은 치우침(shift)이 없이 비교적 대칭성을 잘 유지하고 있다. 이와 같이 진동 모드가 변형되는 원인은 고유진동 모드의 반절점 또는 절점과 슬롯의 상대 위치가 동일하지 않을 경우, 슬롯과 반절점의 상대 위치에 따라 반절점에 나타나는 최대 변위가 서로 다른 것으로 판단된다. 이와 같은 현상은 실험

결과를 통해서도 확인할 수 있는데 Fig. 4에서 보는 바와 같이, 슬롯에 위치한 반절점( $r=0.139, \varphi=0$ )의 응답이 그렇지 않은 반절점( $r=0.139, \varphi=\pi/4$ )의 응답보다 약 30% 정도 더 크울 알 수 있다.

또한,  $\psi_{02,s}$  및  $\psi_{04,s}$ 의 경우, 모드의 절점이 슬롯에 위치하는 경우, 슬롯 주위에서 변위가 급격히 변화하는 현상인 변위점프가 발생한다.

(3) 고유치 오차의 원인 분석

이론적인 계산에서 발생하는 오차의 원인을 분석하기 위하여 유한요소법을 이용하여 구한 샘플 디스크와 균일한 디스크의 변형 에너지 밀도 분포를 진동 모드와 함께 Table 4에 비교하였다. 표에서 알 수 있는 바와 같이, 슬롯이 도입됨에 따라 슬롯 주변을 중심으로 광범위한 영역에서 에너지 밀도 분포 변화가 발생한다. 그러나 식 (4)에서는 이러한 변화를 무시하고 균일한 디스크의 에너지 밀도를 이용하여 슬롯 도입으로 인한 변형 에너지 변화량( $\Delta E$ )을 식 (6)과 같이 가정하였다<sup>(8)</sup>.

$$\Delta E = -\frac{\varepsilon D}{2} \sum_{i=1}^4 \int_{r_0}^a P((w_0)_{mn}(r, \varphi_i)) r dr \quad (6)$$

이는  $\phi_{mn}$ 으로 인해 발생하는 에너지 중 슬롯 도입으로 제거되는 영역에 존재하는 량이므로 Table 4에 주어진 실제 에너지의 변화량과는 차이를 나타낸다.

모드 변형에 의한 영향을 검토하기 위하여 균일한 디스크의 진동 모드 대신 슬롯으로 치우침이 발생한 진동 모드를 식 (4)에 적용하여 고유치를 계산하였다. 치우침이 발생한 샘플 디스크의 외경부에 발생하는 모드 변위를 푸리에(Fourier) 전개하여 조

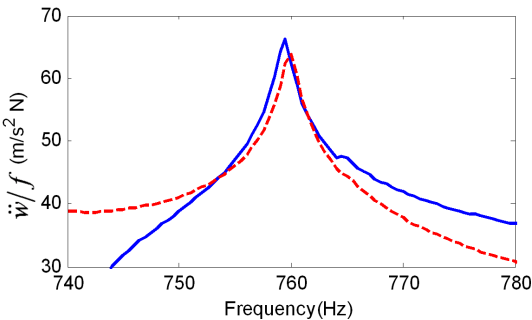


Fig. 4  $\ddot{w}/f(\omega)$  due to excitation at (0.139,  $5\pi/4$ ). Key : —, at (0.139, 0); - - -, at (0.139,  $\pi/4$ )

화함수의 중첩으로 표시하고, 이를 바탕으로  $\psi_{04,c}$ 를  $\phi_{mn}$ 를 중첩하여 근사화하면 다음 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\psi_{04,c}(r, \varphi) \cong 0.102\phi_{10}(r, \varphi) + 0.815\phi_{04}(r, \varphi) \quad (7)$$

각 모드의 기여를 표시하는 계수는 슬롯 도입에 따른 변형된 모드에 의해 결정되며, 슬롯의 영향을 무시할 수 있는 경우 식 (7)은  $\psi_{04,c} \cong \phi_{04}$ 로 표시된다. 식 (4)의  $(w_0)_{04}(r, \varphi)$ 대신 식 (7)의  $\psi_{04,c}$ 에 기초한  $w(r, \varphi)$ 를 적용하여  $\lambda_{04,c}$ 를 계산하였다.

에너지 분포 변동에 의한 영향을 검토하기 위하여 유한요소해석을 통하여 얻은 샘플 디스크의 고유진동 변형 에너지를 식 (4)에 적용하여 고유치를 구하였다. 이전의 연구 결과에 따르면, 식 (4)는 다음의 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다<sup>(8)</sup>.

$$\lambda_{mn} = \frac{\int P(w) d\tau - \varepsilon \sum_{i=1}^4 \int_{r_0}^a P(w(r, \varphi_i)) r dr}{\int w^2(r, \varphi) d\tau - \varepsilon \sum_{i=1}^4 \int_{r_0}^a w^2(r, \varphi_i) r dr} \quad (8)$$

Table 4 Modal strain energy density distributions

Mode indices			Uniform disk	Sample disk	Remarks
m	n	q			
0	2	c			
0	2	s			
0	4	c			
0	4	s			

위 식에서 분자 항은 디스크 내의 전체 변형 에너지에 상수  $2/D$ 를 곱한 값이다. 유한요소해석을 통하여 구한 변형 에너지를 이용하여 이 항을 계산한 다음 대입하여 고유진동수를 예측한 결과를 식 (7)의 합성모드를 이용한 결과와 함께 Table 5에 비교하였다. 표에서 보는 바와 같이 유한요소해석에서 구한 변형 에너지를 이용한 결과는 유한요소해석과 잘 일치하고 있다. 또한, 근사화한 모드를 이용한 결과도 원래 결과에 비해 실험 결과에 대한 오차가 감소함을 확인할 수 있다. 따라서, 슬롯이 추가된 디스크의 고유치를 정확하게 예측하기 위해서는 슬롯 도입에 따른 디스크 내의 변형 에너지 및 진동 모드 변화를 충분히 고려해야 함을 알 수 있다.

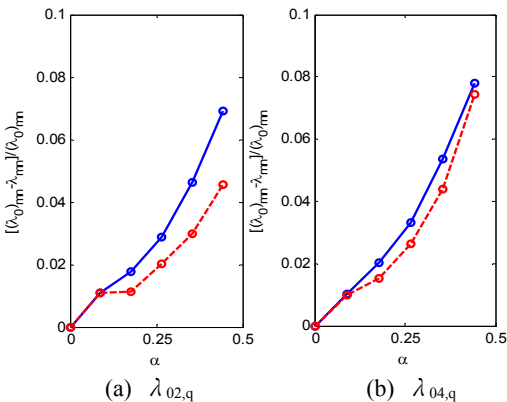
### 3. Parametric Study

#### 3.1 슬롯 길이의 영향

유한요소법을 통해 Fig. 1에 주어진 샘플 디스크에서 슬롯 길이만 변경된 디스크의 고유진동 특성을

**Table 5** Eigenvalues for the sample disk calculated with modified methods

Mode indices			Non-dimensional eigenvalues $\lambda_{mn}^2 = \omega_n a^2 (\rho_d h/D)^{1/2}$			
m	n	q	Analytical -Original	Analytical - Eq. (7)	Analytical - Eq. (8)	FEM
0	2	c	3.94	-	3.71	3.71
0	2	s	3.96	-	3.80	3.80
0	4	c	20.16	20.06	18.79	18.74
0	4	s	20.26	-	18.80	18.80

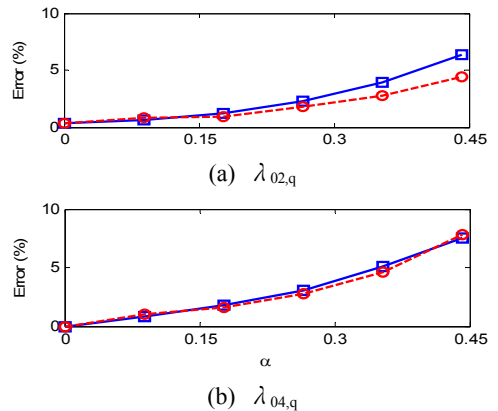


**Fig. 5** Rate of change in eigenvalues vs. slot length. (a); (b). Key : —,  $q = c$ ; - - -,  $q = s$

구한 다음 균일한 디스크의 특성과의 차이를 분석함으로써 디스크의 고유진동 특성에 미치는 슬롯 길이의 영향을 검토하였다.

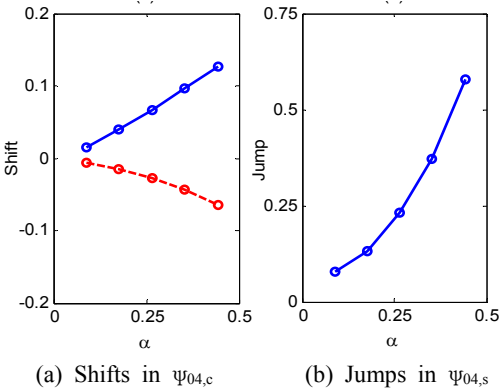
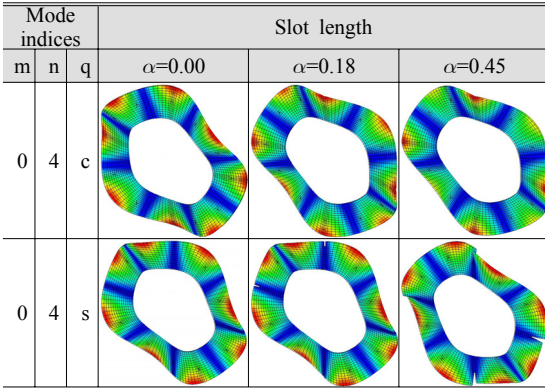
디스크의 고유치에 미치는 슬롯 길이의 영향을 분석하기 위하여 5개의 서로 다른 길이의 슬롯을 포함한 디스크의 고유치 변화율을 Fig. 5에 나타내었다. 그림에서  $\alpha = (a-r_0)/(a-b)$ 는 디스크 폭에 대한 슬롯 길이의 비이다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 슬롯의 길이가 증가하면 고유치의 감소량도 증가하지만, 고유치 감소율은 모드 형태에 따라 서로 다르다. 또한,  $m$ 과  $n$ 이 동일한 경우에는  $\lambda_{mn,c}$ 가  $\lambda_{mn,s}$ 에 비해 감소량이 더 큰 것으로 나타났다.

이론적인 고유치의 정확도에 미치는 슬롯 길이의 영향을 검토하기 위하여 샘플 디스크에 서로 다른 길이의 슬롯을 적용되었을 경우에 대하여 식 (4)를 이용하여 계산한 고유치와 유한요소법을 이용한 결과의 차이를 비교 검토하였다. Fig. 6에 주어진 결과를 보면, 모든 모드에서 슬롯의 길이에 따라 에러가 증가하고,  $\alpha = 0.18$  이하에서는 에러가 2% 이하로 나타났다. 슬롯의 길이에 따른 고유진동 모드의 변화를 검토하기 위하여  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0.18$  및  $\alpha = 0.45$  세 경우에 대한  $\psi_{04,c}$  및  $\psi_{04,s}$ 를 Table 6에 비교하였다. 그림에서 보는 바와 같이, 슬롯의 길이에 따라 내경 및 외경부에서 발생하는  $\psi_{04,c}$  변위의 치우침 및 슬롯에서 발생하는  $\psi_{04,s}$  변위점프량이 증가함을 알 수 있다. 자세한 분석을 위하여 슬롯의 길이에 따른 이 두 변형량의 변화를 유한요소 해석 결과를 이용하여 검토하였다.



**Fig. 6** Errors in eigenvalues vs. slot length. Key : —,  $q = c$ ; - - -,  $q = s$

**Table 6** Distorted vibration modes of the sample disk due to slots



**Fig. 7** Effects of slot length on the mode shape. Key : —, outer edge; - - -, inner edge

Fig. 7에 주어진 결과를 보면, 길이에 따라  $\Psi_{04,c}$  변위 치우침 크기가 증가하며  $\alpha=0.09$ 의 경우 내경부에는 치우침이 거의 발생하지 않았다. 또한, 슬롯 주변에서 발생하는  $\Psi_{04,s}$ 의 변위점프도 슬롯 길이에 따라 증가하고 있다.

이상을 종합해보면, 슬롯의 길이가 일정한 수준을 초과하는 경우, 슬롯에 의해 디스크의 전체적인 모드 형태가 변형되어 식 (5)로는 변형된 진동모드를 정확히 표현하는 것이 불가능하다. 따라서, 계산 과정에서 Table 4에 주어진 변형 에너지 밀도 분포의 변화를 충분히 고려할 수 없다. 그러므로, 이러한 영향을 충분히 고려하지 못하는 식 (4)를 이용하여 계산한 고유치에는 오차가 발생한다.

**3.2 내경부가 고정된 경우**

디스크의 고유진동 특성은 내경 및 외경부의 경

**Table 7** Eigenvalues for the sample disk with fixed-free boundary condition

Mode indices			Non-dimensional eigenvalues $\lambda^2 = \omega_n a^2(\rho_d h/D)^{1/2}$			
			Disk with slot		Disk w/o slot	
			Analytical	FEM	Analytical	FEM
0	0	-	19.63	19.63	19.64	19.66
0	1	-	20.04	19.98	20.06	20.06
0	2	c	21.40	21.78	21.64	21.59
0	2	s	21.67	20.92		
0	3	-	25.14	24.26	25.15	25.04
0	4	c	31.00	30.50	31.29	31.08
0	4	s	31.38	28.26		

계조건에 의해 영향을 받는다. 이 연구에서는 고정-자유 경계조건이 적용된 디스크에 반경방향 슬롯이 도입됨에 따라 발생하는 고유치와 진동모드의 변화를 이론적인 해법과 유한요소법을 이용하여 검토하였다.

(1) 이론적 계산

고정-자유 경계조건을 가진 디스크의 운동방정식 및 진동에 의한 변위도 자유-자유 경계조건을 가진 디스크와 마찬가지로 같이 각각 식 (1)과 식 (2)와 같이 표현될 수 있다. 또한, 고정되지 않은 외경부에는 식 (3)과 같은 경계조건을 동일하게 적용할 수 있으나, 고정되어 있는 내경부에는 다음 식과 같은 경계조건이 적용되어야 한다.

$$W(b) = 0, \frac{dW(b)}{dr} = 0 \tag{9}$$

위에 언급된 식들을 이용하여 슬롯이 없는 균일한 디스크의 고유진동 특성을 구한 다음, 그 결과를 바탕으로 식 (4)를 이용하여 슬롯을 포함한 디스크의 고유진동 특성을 근사적으로 구할 수 있다.

(2) 유한요소해석을 통한 검증

Fig. 1과 Table 1에 주어진 샘플 디스크 및 동일한 치수를 가진 균일한 디스크에 고정-자유 경계조건이 적용되었을 경우에 대한 고유진동 특성을 식 (1)~(3) 및 (9)를 이용하여 계산하였다. 또한 이 결과를 식 (4)에 적용하여 슬롯이 도입되었을 경우에 대한 고유치를 계산하였다. 이들 결과를 유한요소 해석 결과와 함께 Table 7에 나타내었다. 표에서 알



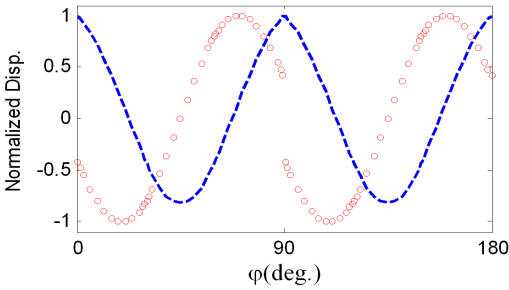


Fig. 8 Normalized modal displacements for fixed-free disk. Key : ---,  $\psi_{04,c}$  :  $\circ\circ\circ$ ,  $\psi_{04,s}$

Table 8 Eigenvalues for the fixed-free disk using modified methods

Mode indices			Non-dimensional eigenvalues $\lambda^2 = \omega_n^2 a^2 (\rho_d h/D)^{1/2}$			
m	n	q	Analytical - original	Analytical - Eq. (9)	Analytical - Eq. (8)	Numerical
0	2	c	21.40	-	21.36	21.78
0	2	s	21.67	-	20.64	20.92
0	4	c	31.00	30.4	29.79	30.50
0	4	s	31.38	-	27.34	28.26

수 있는 바와 같이, 자유-자유 경계조건의 경우와 마찬가지로, 슬롯이 도입됨에 따라 각 모드의 고유치가 저감되고, 저감량은 모드의 형태에 따라 서로 다를 수 있다. 또한 유한요소해석 결과와 이론적 계산 결과를 비교하면 균일한 디스크의 경우에는 두 결과가 서로 잘 일치하고 있지만, 슬롯을 포함한 경우에는 두 결과 사이에 차이가 나타난다. 또한, 유한요소해석 결과에는  $\lambda_{02,c}$  및  $\lambda_{04,c}$ 가  $\lambda_{02,s}$  및  $\lambda_{04,s}$ 에 비해 크게 나타났으나 식(4)를 이용한 이론적인 계산 결과에서는  $\lambda_{02,s}$  및  $\lambda_{04,s}$ 가 더 크게 나타났다. 이와 같은 현상도 자유-자유 경계조건의 경우와 마찬가지로 식(4)에 주어진 이론적인 해가 슬롯 도입으로 인한 진동 모드 및 디스크 내의 변형 에너지 밀도 분포의 변화를 정확히 고려하지 못함에 따라 발생한 것으로 판단된다.

슬롯이 도입되었을 경우에  $\psi_{04,c}$  및  $\psi_{04,s}$ 에서 발생하는 외경부 변위를 유한요소 해석을 통해 구한 다음 Fig. 8에 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이  $\psi_{04,c}$ 의 변위는 자유-자유 경계조건의 경우처럼 슬롯 부위에 발생하는 국부적인 변위로 인하여 전체 모드에 치우침이 발생함을 알 수 있다. 아울러,  $\psi_{04,s}$ 의 절점 중 슬롯이 위치한 절점에서는 변위점프가

발생함을 알 수 있다.

자유-자유 경계조건 경우와 같이, 식(7)을 유도한 과정을 동일하게 적용하여 치우침이 발생한  $\psi_{04,c}$ 를  $\phi_{mn}$ 을 중첩하여 근사화하면 다음 식과 같이 표현할 수 있다. 이 결과를 식(4)에 적용하여 고유치를 구하였다.

$$\psi_{04,c}(r, \varphi) \cong 0.095\phi_{00}(r, \varphi) + 0.905\phi_{04}(r, \varphi) \quad (9)$$

또한, 유한요소법으로 구한 변형 에너지를 식(8)에 적용하여 고유치를 계산한 다음 앞의 결과와 함께 식(4)를 이용한 결과 및 유한요소해석 결과와 비교하였다. Table 8에 주어진 결과를 보면, 고정-자유 경계조건이 적용된 경우에도 자유-자유 경계조건에서와 같이, 두 경우 모두 정확도가 개선된 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 따라서, 고유치를 정확히 예측하기 위해서는 슬롯으로 인한 진동모드 형태의 변화를 충분히 고려해야 한다.

#### 4. 결 론

환형 디스크에 슬롯이 도입됨에 따라 발생하는 디스크의 고유진동 특성 변화를 유한요소법과 실험을 통하여 검토하였다. 기존의 이론적인 계산 결과와 비교 검토한 결과, 슬롯이 없는 균일한 디스크에 대해서는 이론식으로 비교적 정확하게 고유치를 예측할 수 있지만, 슬롯이 도입된 디스크의 경우에는 고유치 예측 결과에 오차가 발생됨을 알 수 있었다.

샘플 디스크의 진동모드에 대한 푸리에 전개 및 유한요소법을 통해 구한 변형 에너지를 이용하여 원인을 분석한 결과, 슬롯 도입으로 인해 전체 변형 에너지 분포와 진동 모드의 형태가 변형되지만, 기존의 이론적 계산 방법이 이를 충분히 고려하지 못함에 따라 이와 같은 오차가 발생하는 것으로 확인되었다.

슬롯 길이가 증가함에 따라 고유치 변동과 함께 진동모드의 형태가 전형적인 환형디스크 모드에서 점차 벗어남을 확인하였다. 또한, 모드의 변형이 증가함에 따라, 이를 정확하게 고려할 수 없는 이론식을 사용할 경우 예측한 고유치에 오차가 증가하므로 슬롯의 길이가 일정한 수준 이상인 경우에는 기존의 이론식으로는 정확한 고유치를 예측이 어렵다.



내경부가 고정된 디스크의 경우에도 위와 같은 현상이 동일하게 발생하므로, 경계조건에 무관하게 정확한 고유치 예측을 위해서는 진동모드의 변형과 변형 에너지 분포의 변화를 고려해야 함을 알 수 있다.

추후 정확하게 고유진동 특성의 변화를 파악하기 위해서는 슬롯이 도입된 디스크의 진동모드 변동과 이로 인한 변형 에너지의 변화를 정확히 고려할 수 있는 해법 개발이 필요하다.

## 후 기

이 논문은 경북대학교(2009) 학술연구지원금에 의해 연구되었음.

## 참 고 문 헌

- (1) Leissa, A. W., 1987, "Recent Research and Plate Vibration, 1981-1985. Part 1: Classical Theory," The Shock and Vibration Digest, Vol. 19, No. 2, pp. 11~18.
- (2) Leissa, A. W., 1987, "Recent Research and Plate Vibration, 1981-1985. Part 2: Complicating Effects," The Shock and Vibration Digest, Vol. 19, No. 3, pp. 10~24.
- (3) Vogel, S. M. and Skinner, D. W., 1965, "Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Disk," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 926~931.
- (4) Mindlin, R. D. and Deresiewicz, H., 1954, "Thickness-shear and Flexural Vibration of a Circular Disk," ASME Journal of Applied Physics Vol. 25, No. 10, pp. 1329~1332.
- (5) Mcgee, O. G., Huang, C. S. and Leissa, A. W., 1995, "Comprehensive Exact Solutions for Free Vibrations of Thick Annular Sectorial Plates with Simply Supported Radial Edges," International Journal of Mechanical Science, Vol. 37, No. 5, pp. 537~566.
- (6) Wang, C. M. and Thevendran, V., 1993, "Vibration Analysis of Annular Plates with Concentric Support Using a Variant of Rayleigh-Ritz Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 163, No. 1, pp. 137~149.
- (7) Mote, C. D. JR. 1972, "Stability Control Analysis of Rotating Plates by Finite Element: Emphasis on Slots and Holes," Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, March, pp. 64~70.
- (8) Yu, R. C. and Mote, C. D. JR., 1987, "Vibration and Parametric Excitation in Asymmetric Circular Plates under Moving Load," Journal of Sound and Vibration, Vol. 119, No. 3, pp. 409~427.
- (9) Shen, I. Y. and Mote, C. D. JR., 1992, "Dynamic Analysis of Finite Linear Elastic Solids Containing Small Elastic Imperfections: Theory with Application to Asymmetric Circular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 155, No. 3, pp. 443~465.
- (10) Honda, Y., Matsuhisa, H. and Sato, S., 1985, "Modal Response of a Disk to A Moving Concentrated Harmonic Force," Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, No. 4, pp. 457~472.
- (11) Rim, K. H. and Mote, C. D. JR., 1999, "Unstable Phenomenon for High-speed Rotating Circular Saws," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 9, No. 6, pp. 1210~1217.