

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구 - 중학교 1학년을 중심으로 -

서종진¹⁾

일차방정식의 해결 과정에서 어떤 문항은 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하고, 다른 문항은 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하지 못한 것으로 나타났다. 학생들이 등호(‘=’) 관계를 올바르게 표현할 수 있는지, 표현할 수 없는지는 문항에 따라 그 반응이 다르게 나타나므로 여러 문항에 대한 테스트를 한 후에 비교 분석하여 학습지도 방향을 설정하고, 교수·학습지도가 이루어져야 할 것이다. 일차방정식의 풀이 방법이 제시되지 않은 문항에서 방정식의 해를 구한 대부분의 학생들은 이항을 사용하여 해결하였다. 등식의 성질을 사용하여 해결하라는 문항에서도 등식의 성질을 사용하여 해결하기 보다는 이항을 사용하여 해결한 학생들이 대부분 이었다. 등식의 성질과 이항을 모두 사용하여 방정식을 해결할 수 있도록 교수·학습이 이루어져야 할 것이다.

주요용어 : 일차방정식, 등호관계, 등식의 성질, 이항

I. 도입

아동들은 산술 학습 초기에 수학 기호 “+”, “=” 그리고 $3+4$ 와 같은 식을 접하게 된다. 기호 ‘=’은 성인들에게 여러 가지 의미를 가진다. 가장 기본적인 것은 아마도 동일성(sameness)에 대한 추상 개념이다. 이것은 현실세계의 대상들로부터 수많은 집합들의 동일성을 경험함으로써 생기는 등식(equality)에 대한 직관적 개념이다. 이러한 직관적 개념이 아동들에게 나타나기를 바라는 등식의 개념이다. 가르치는 결과로서 나타나는 등식(equality)에 대한 더 정교한 개념은 동치관계이다. 즉, 이것은 대칭적(‘ $1=1, 2=2, 3=3$, 등등’과 같은 명제는 모든 경우에 사실이다), 반사적(‘만약 $2+1=3$ 이면 $3=2+1$ 이다’라는 명제는 참인 명제이다.), 추이적(‘만약 $3=2+1$ 이고 $2+1=1+2$ 이면 $3=1+2$ 이다’라는 명제는 모든 전체 수에 대하여 사실이다)이다(Behr, et al, 1976).

아동들은 산술 연산 문제에서 보이지 않는 요소(elements)가 왼쪽에 있는 것(예, $5+\square=13$, $\square+8=13$)보다 오른쪽에 있을 때(예, $13=5+\square$, $13=\square+8$) 보이지 않는 요소(elements)를 찾는데 더 많은 어려움을 겪는다(Weaver, 1971, 1973). 이것은 아동들이 자신만의 생각으로 등호(기호 ‘=’)를 받아들이기 때문이라 할 수 있다.

* 이 논문은 2009학년도 한남대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 연구되었음
1) 한남대학교 (jjseo@hnu.ac.kr)

어린 아동일수록 성인과는 다른 식으로 상징을 해석한다. 이를테면, $2+3=5$ 을 항등식으로 보지 못하고, ‘2하고 3을 더하면 5가 된다’라고 읽는 것에서 알 수 있듯이, 이식을 조작적으로 해석한다. 7학년 학생들에게 등호를 사용하는 예를 제시해 보도록 하였을 때 왼쪽에 있는 두 수를 계산하여 그 결과를 오른쪽에 놓은 식으로 한정하였다는 것이다(Herscovics, & Kieran, 1980).

대수 초기 학생들은 등호(기호 ‘=’)를 무엇을 하라는 신호(signal)로 생각한다(Behr, M. et al, 1976). 다시 말해, 등호(기호 ‘=’)를 동치 관계를 나타내는 기호로 이해하기 보다는 연산자 기호로서 등호(기호 ‘=’)를 간주한다는 것이다. 방정식에서 이러한 잘못된 등호(기호 ‘=’)의 사용은 중등학교에서 대학교 수준에까지 계속되며 잘못된 등호 사용으로 방정식을 학습을 하는데 있어서 교수학적 단절이 발생할 수 있다는 것이다(Kieran, 1981; Herscovics, & Linchevski, 1994, 1996).

학생들이 방정식을 풀기 위해 사용하는 풀이 방법은, (1) 덧셈과 곱셈의 사용, (2) 세기기술의 사용, (3) 채우기(cover-up), (4) 거꾸로 풀기, (5) 시행착오 대입, (6) 이항, (7) 양변에 같은 연산 수행하기의 일곱 가지로, 마지막 두 접근은 형식적인 방법이다(Kieran, 1992). 학생들은 방정식의 양변에 동일한 조작을 수행하는 형식적인 절차를 처음으로 배우지는 않는다. 수를 대입해 보는 “추측과 확인”, “채우기(cover-up)”와 거꾸로 풀기를 포함하는 다른 비형식적인 방법들이 방정식의 해법으로 먼저 소개된다(Bernard & Cheon, 1998; Kieran, 1992). 대수 과정의 학생들은 덧셈과 곱셈, 세기기술의 접근을 배우지 않지만 초등학교에서 “미지의 것이 있는 덧셈식이나 곱셈식(예, $\square+8=13$, $2\times\square=18$)”을 해결하였던 경험이 있다.

아동들이 $2\times\square=18$ 과 같은 문제를 풀었을 때, 그들이 미지수나 방정식 개념에 대해 어떤 이해를 하고 있고, 대수를 다룰 수 있다고 보는 경향이 있다. 그런데, 아동들은 이러한 유형의 문제를 풀 때 자신들의 기억 속에 저장된 산술적 사실을 그저 회상한다는 것이다. 따라서 답을 구하기 위한 아동들의 추측은 심리적 산술에 그친다는 것이다. 즉, 대수적 과정이 전혀 사용되지 않는다는 것이다. 이는 보다 큰 수나 유리수가 포함되어 있다는 점에서만 차이가 날 뿐, 그 동안 다루어온 것과 유사한 방정식을 풀 수 없다는 것이다(Herscovics, & Kieran, 1980).

Kieran의 연구에서, 12세의 대수 초기 학생들은 덧셈과 뺄셈 관계에 있는 동치인 식을 찾을 때 두 가지 오류(가수 바꾸기, 재분배)를 범하였다. 두 가지 오류는 문자를 포함하는 표상에서 덧셈과 뺄셈의 동치식을 인식하는데서 나타나는 학생들의 혼동을 나타낸다. “가수 바꾸기 오류”에서는 $x+37=150$ 와 $x=37+150$ 이 같은 해를 갖는다고 판단하고, “재분배 오류”에서는 $x+37=150$ 와 $x+37-10=150+10$ 이 같은 해를 갖는다고 판단한다. 이런 오류들은 대수 초기 학생들이 덧셈과 뺄셈 사이의 구조적 관계에 대해서 다소 불안정하고, 문자를 포함한 식에서 이러한 관계가 더욱 불안정하다는 것을 나타낸다. Kieran에 의하면, 방정식 풀이에서 이러한 두 가지 유형의 오류를 범하는 학생들은 이항 방법을 선호하였다. 이에 비해 이러한 오류를 범하지 않은 학생들은 시행착오 방법을 구사하였다(Kieran, 1992; 김성준, 2004). 이항을 이용한 학생들은 방정식의 양변에 같은 연산을 수행하는 절차를 이해하지 못하고(Herscovics, & Linchevski, 1994, 1996) 많은 학생들이 이항 절차를 사용해서 아무런 생각 없이 기계적으로 방정식을 조작한다는 것이다(Brown et al., 1988; Kieran, 1984; Mevarech & Yitschak, 1983). 즉, 학생들은 일반적으로 자신들이 수행하는 조작의 바탕이 되는 구조를 이해하지 못하고 있다는 것이다(Kieran, 1981).

방정식을 해결할 때 어떠한 조작이 가능한지 알지 못하고 자신이 생각하는 대로 수행하는

것은 자신만의 방법으로 등호(기호 ‘=’)를 해석하기 때문이라 볼 수 있다. 이러한 등호(기호 ‘=’)에 대한 해석은, 방정식이 등호(기호 ‘=’)의 양변에 있는 서로 다른 형태의 대수식으로 연결되어 있다는 ‘동치관계’를 이해하지 못한 결과이다. 그러므로 일차 방정식 풀이를 가르칠 때에 해를 구하는 과정에서 대칭성을 강조하여 가르칠 필요가 있다.

II. 연구방법 및 절차

1977년 Byers & Herscovics는, 학생들이 방정식을 풀 때 나타나는 여러 가지 안내과정을 이해라는 관점에서 (a) 도구적, (b) 관계적, (c) 직관적, (d) 형식적으로 표현하고 있다. 일차방정식 $x+3=7$ 의 풀이에서, 학생들은 ‘(a) 수를 이항하고 부호를 바꾸기’, ‘(b) 양변에 -3 을 빼기 또는 3 을 더하기’, ‘(c) 추측’ 또는 ‘(d) 문자열 형성’이라는 네 수준으로 나타난다고 할 수 있다.

$$\begin{aligned} x+3 &= 7 \\ x+3+(-3) &= 7+(-3) \\ x+0 &= 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

다음에 따르는 결과는 보기 드문 것은 아니다.

$$\begin{aligned} y+5 &= 8 \\ &= 8-5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

위의 ‘같다(equals) 기호’는 단계들 사이에서 연결자로서 역할을 한다. 그러나 수학적 의미에서 동치 관계를 생성하는 것은 아니다. 미분적분학에서도, 학생들은 미분계산 과정에서 다음과 같이 쓴다는 것이다(Bright, 1981, 재인용).

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2+5x+7 \\ &= 6x+5 \end{aligned}$$

학생들이 주어진 방정식의 해를 구하는 문제에서, 등식의 성질이나 이항을 ‘올바르게 사용하는지?’, ‘그렇지 않은지?’에 대한 것은, 등호를 ‘대칭적으로 해석하고 있는가?’, ‘비대칭적으로 해석하고 있는가?’에 대한 것으로 설명될 수 있다. 즉, 일차방정식 풀이과정에서 나타난 학생들의 반응은 여러 가지 해석이 가능하다고 할 수 있다. 문제해결 과정에서 ‘등호(=) 관계를 올바르게 표현하였는지?’, ‘그렇지 않은지?’ 모든 문항에서 ‘등호(=) 관계를 올바르게 사용하고 있는지?’, ‘어떠한 문항은 등호(=) 관계를 올바르게 표현하고 있지만 그렇지 않은 문항이 있는가?’, 또한, 일차방정식을 해결 할 때 ‘이항을 선호하는지?’, ‘그렇지 않은지?’, 학생들이 일차방정식을 해결할 때 ‘어떤 방법을 주로 사용하고 있는지?’, ‘그 방법을 이해하고 사용하고 있는지?’ 등 다양한 측면에서 분석이 가능하므로 교수학습을 예견할 수 있다는 것이다.

이러한 관점에서 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1. 연구문제

- 1) 일차방정식의 해를 구하는 문제에서, 풀이 방법을 제시하지 않은 경우 학생들의 반응은 어떠한가?
- 2) 일차방정식의 해를 구하는 문제에서, 풀이 방법을 제시한 경우 학생들의 반응은 어떠한가?
- 3) 일차방정식의 해를 구하는 문제에서, 학생들은 이항과 등식의 성질 중 어느 방법을 많이 사용하는가?
- 4) 일차방정식의 풀이과정에서 등호(‘=’)관계
 - 4-1) 일차방정식의 풀이과정에서 등호(‘=’)관계를 어느 정도 올바르게 표현하는가?
 - 4-2) 일차방정식의 풀이과정에서 등호(‘=’)관계의 올바른 표현은 일차방정식의 문항에 따라 달라지는가?

2. 용어의 정의

2-1) 등호관계의 표현

학생들이 일차방정식을 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 대칭성과 관련된 의미에서 등호 표현을 올바르게 표현하였는지, 또는 올바르게 표현하지 못하였는지를 의미한다.

3. 연구의 제한점

2개 지역에서 중위권 정도의 중학교 1학년 378명을 대상으로 하였으므로 중학교 전체 학생들의 대표성을 갖기에는 어려움이 따른다고 할 수 있지만, 일차방정식의 풀이과정에서 나타나는 학생들의 반응에 대한 분석의 결과는 학생들을 지도하는데 참고자료가 될 것이다.

4. 연구 대상 및 연구 도구

1) 연구대상

D광역시와 S지역 두 개 학교의 11개 학급 378명의 학생들을 대상으로 하였다. 연구대상 학교는 사회 문화적인 배경에서 중위권 정도의 학교라고 할 수 있다.

2) 연구도구

중학교 1학년 학생들이 일차방정식의 해결 과정에서 등호관계를 올바르게 표현하는 정도와 방정식의 해결 정도를 조사하기 위하여 다음과 같은 문제를 구성하였다.

덧셈과 곱셈 및 나눗셈 식, 분수계산식, 도형의 넓이 구하기, 일차방정식의 해 구하기와 관련된 14문제로 구성하였다(<표Ⅱ-1>). 문제는 30분 동안 해결하도록 하였다.

1번 문항에서 4번 문항까지는 학생들이 기본적인 식의 계산에서 어느 정도 해결할 수 있는지 알아보기 위한 문항으로 구성하였다. 그리고 5번 문항에서 8번 문항까지는 일차방정식

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

에 대하여 학생들이 이항과 등식의 성질 중 어느 방법을 사용하여 해결하는지 알아보기 위하여 기본적인 문제들로 구성하였다. 그리고 9번은 일차방정식과 관련된 문항으로 넓이의 개념으로 해결 할 수 있는 문항으로 구성하였다. 10번 문항은 서술형문항으로 학생들이 어느 정도 해결할 수 있는지 알아보기 위하여 구성하였다. 11번 문항에서 14번 문항까지는 등식의 성질을 이용하여 해결하라는 지시가 있는 문항으로 구성하였다. 11번 문항은 5번 문항과 비교하기 위하여 부호만 다르게 하여 구성하였다. 그리고 12번은 분수로 된 문항으로, 13번은 소수로 된 문항으로, 14번은 왼쪽 항과 오른쪽 항에 변수 x 가 있는 방정식으로 구성하였다(문항은 중학교 수학교과서를 참고하였다).

<표Ⅱ-1> 문제 구성

문항	내용	문항 수
문항1~문항4	문항1) $\square + 5 = 8$, 문항2) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \square$, 문항3) $\square \times 4 = 12$, 문항4) $\square \div 3 = \frac{6}{15}$	4
문항5 ~문항8	* 방정식의 해를 구하라. 문항5) $x + 4 = 9$, 문항6) $3x + 2 = 17$, 문항7) $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$, 문항8) $4(x + 2) = 20$	4
문항 9	도형의 넓이를 구하기	1
문항 10	연립방정식 또는 넓이 구하기와 관련된 서술형 문항	1
문항 11	*다음 방정식을 등식의 성질을 이용하여 풀어라 문항11) $x - 3 = 2$, 문항12) $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$ 문항13) $0.4x + 2.3 = 4.5$, 문항14) $\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$	4
문항 12		
문항 13		
문항 14		

Ⅲ. 자료 분석 결과

조사된 자료는 SPSS 12.0을 사용하여 빈도분석과 상관분석을 실시하였다. 분석은, 1) 기본적인 문항에 대한 학생들의 반응, 2) 일차방정식의 풀이 방법을 제시하지 않은 문항에 대한 반응, 3) 서술형 문항에 대한 반응(넓이 이용), 4) 일차방정식의 풀이 방법을 제시한(등식의 성질) 문항에 대한 반응, 5) 일차방정식의 풀이 방법을 제시한 문항에서 등식의 성질이나 이항의 방법을 사용하여 한 문항 이상 해결한 학생들의 각 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항)에 대한 반응, 6) 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항) 간의 상관, 7) 문항에 대한 학생의 반응에 대한 예와 같은 순서로 분석하였다.

1. 기본적인 문항에 대한 학생들의 반응

1) 덧셈식에 대한 학생들의 반응

덧셈식과 곱셈식에서는 대다수의 학생들(97.4%, 97.9%)이 해결한 것으로 나타났다. 반면,

서종진

분수계산과 나눗셈 계산에서 어려움을 겪는 학생들(분수: 31.7%; 나눗셈: 43.9%)이 많이 나타났다. 실제로 2번 문항을 해결하지 못한(무반응 포함) 학생들이 7번, 12번, 14번 문항(분수 계산이 필요한 방정식 문제)을 해결한 학생은 7번 문항이 23명 12번 문항이 4명, 14번 문항이 12명(이항으로 해결한 것도 맞은 것으로 함)으로 나타났다. 2번 문항을 해결하지 못한 학생들 중 7번, 12번, 14번 문항(분수계산이 필요한 방정식 문제)을 해결하지 못한 학생은, 7번 문항이 97명, 12번 문항이 116명, 14번 문항이 108명(이항으로 해결한 것도 맞은 것으로 함)으로 조사되어 대부분의 학생들이 해결하지 못한 것으로 나타났으나, 몇몇 학생들은 해결한 것으로 나타났다(<표Ⅲ-2-1>).

<표Ⅲ-1> 1번 문항 -덧셈식에 대한 학생들의 반응

문제	반응	맞은 학생	틀린 학생	무반응	합계
		학생 수(%)	학생 수(%)	학생 수(%)	학생 수(%)
	$\square + 5 = 8$	368(97.4)	2(0.5)	8(2.1)	378(100)

<표Ⅲ-2> 2번 문항-분수식에 대한 학생들의 반응

문제	반응	맞은 학생	틀린 학생	무반응	합계
		학생 수(%)	학생 수(%)	학생 수(%)	학생 수(%)
	$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \square$	258(68.3)	92(24.3)	28(7.4)	378(100)

<표Ⅲ-2-1> 2번 문항 분수식을 틀린(무반응 포함) 학생들의 12번, 14번 문항에 대한 반응

반응		문항	7번	12번	14번
			$x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$
			반응 수(명)	반응 수(명)	반응 수(명)
맞음	답	등식의 성질 이용 (등호관계를 올바르게 표현)	2(1.7)	2(1.7)	2(1.7)
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	17(14.1)	2(1.7)	8(6.7)
		이항 이용(등호관계를 올바르게 표현 못함)	4(3.3)	0(0)	0(0)
		대입(답만 제시)	0(0)	0(0)	2(1.7)
틀림	답	이항 이용	14(11.7)	20(16.6)	12(10)
		등식의 성질	2(1.7)	0(0)	0(0)
	대입	답만 제시	4(3.3)	8(6.7)	10(8.3)
		무반응	77(64.2)	86(71.6)	86(71.6)
		이항 이용하였으나 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함	0(0)	2(1.7)	0(0)
합 계			120명	120명	120명

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

<표Ⅲ-3> 3번 문항-곱셈식에 대한 반응

문제	반응	맞은 학생	틀린 학생	무반응	합계
		학생 수(%)	학생 수(%)	학생 수(%)	학생 수(%)
	$\square \times 4 = 12$	370(97.9)	0	8(2.1)	378(100)

<표Ⅲ-4> 4번 문항-나눗셈식에 대한 반응

문제	반응	맞은 학생	틀린 학생	무반응	합계
		학생 수(%)	학생 수(%)	학생 수(%)	학생 수(%)
	$\square \div 3 = \frac{6}{15}$	212(56.1)	112(29.6)	54(14.3)	378(100)

<표Ⅲ-4-1> 덧셈, 분수, 곱셈, 나눗셈식과 일차방정식의 풀이와의 상관

문항	문항5	문항6	문항7	문항8
문항1	-.009	-.048	0.89	-.031
문항2	.374(**)	.377(**)	.370(**)	.381(**)
문항3	.010	.050	.065	.018
문항4	.425(**)	.493(**)	.450(**)	.441(**)

기본문항(덧셈식, 분수식, 곱셈식)과 일차방정식($x+4=9$, $3x+2=17$, $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$)의 풀이와의 상관은 없는 것으로 나타났으며, 4번 문항(나눗셈식)과 $4(x+2)=20$ 과의 상관은 약한 상관이 있는 것으로 나타났다.

2. 일차방정식의 풀이 방법을 제시하지 않은 문항에 대한 반응

1) 일차방정식 $x+4=9$ 의 해 구하기에 대한 반응(5번 문항)

일차방정식 $x+4=9$ 에 대한 학생들의 반응에서 이항을 이용하고 등호(=)관계를 올바르게 표현한 학생들이 약 55%(208명)로 나타났으며, 그렇지 못한 학생이 13.8%(52명)로 나타났다. 그리고 등식의 성질을 이용하고 등호(=)관계를 올바르게 표현한 학생들이 약 1.1%(4명)로 나타났다. 일차방정식($x+4=9$)의 해를 구하는 문항에서 이항을 선호하는 것으로 나타났다.

<표Ⅲ-5> 방정식 $x+4=9$ 에 대한 학생들의 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)	항목별 반응 수(%)
답 맞음	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	208(55)	212(56.1)
	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	4(1.1)	
	대입	30(7.9)	82(21.7)
	이항을 사용하여 해결하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못함	52(13.8)	

서종진

답 틀림	의미 없는 반응으로 답 틀림	12(3.2)	84(22.2)
	무반응	64(16.9)	
	이항을 했지만 계산 틀림	8(2.1)	
합계		378(100)	378(100)

이항을 사용하여 해를 구하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들(52명)의 풀이과정을 조사한 결과, <표Ⅲ-5-1>와 같은 유형의 반응을 보였다.

<표Ⅲ-5-1> 이항을 사용하여 해를 구하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들의 반응

유형	반응	인원 수(명)	반응	인원수(명)	합계(명)
A	$x + 4 = 9 = x = -4 + 9 = 5$ $x = 9 - 4 = x = 5$	2	$x + 4 = 9$ $= x = 9 - 4$ $= x = 5$ $x = 5$	6	22
	$x + 4 = 9$ $= x = 9 - 4$ $= x = 5$	4	$x + 4 = 9 - 4$ $x = 9 - 4$ $x = 5$	3	
	$x + 4 = 9 - 4 = x$ $x = 5$	3	$x + 4 = 9$ $9 - 4$ $= x = 5$	4	
B	$x + 4 = 9$ $9 - 4$ 5			2	2
C	$x = 9 - 4 = x = 5$	6	$9 - 4 = x = 5$	4	10
D	$x + 4 = 9 = x = 5$	7	$x + 4 = 9 = 5$	2	9
E	$x + 4 = 9$ $= \square + 4 = 9$ $= 5 + 4 = 9$ $= x = 5$			2	2
F	$x + 4 = 9$ $= x = 4 - 9$ $x = 5$	1	$x + 4 = 9$ $= x = 4 + 9$ $x = 5$	2	5
	$x + 4 = 9$ $= x + 4 = 9$ $= x = 9 + 4$ $= x = 5$			2	
G	$x = -4 + 9 = x = +5$ $\frac{x}{x} = \frac{5}{x}$ 나누어지지 않기 때문에 답은 5이다.			2	2
합계					52

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

2) 일차방정식 $3x+2=17$ 에 대한 해 구하기에 대한 반응(6번 문항).

일차방정식 $3x+2=17$ 에 대한 학생들의 반응에서 이항이나 등식의 성질을 이용하고 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현한 학생이 50.3%(190명)으로 나타나 일차방정식 $x+4=9$ 에 대한 학생들의 반응(55%: 208명)보다 약간 낮게 나타났다(<표Ⅲ-5>, <표Ⅲ-6>). 일차방정식 ($3x+2=17$)의 해를 구하는 문항에서도 일차방정식 $x+4=9$ 과 마찬가지로 이항을 선호하는 것으로 나타났다.

그리고 이항을 사용하여 해결하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생은, 일차방정식 $3x+2=17$ 에서는 약11.1%(42명)로 나타났다(<표Ⅲ-6>).

<표Ⅲ-6> 방정식 $3x+2=17$ 에 대한 학생들의 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)
답 맞음	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	190(50.3)
	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	2(0.5)
	대입	16(4.2)
	이항을 이용하였고, 답을 구할 때 구구단 사용	4(1.1)
	이항을 사용하여 해결하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못함	42(11.1)
답 틀림	의미 없는 반응으로 답 틀림	20(5.3)
	무반응	92(24.3)
	이항을 했지만 계산 틀림	12(3.2)
합계		378(100)

이항을 사용하여 해를 구하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들(42명)의 풀이과정을 조사한 결과(<표Ⅲ-6-1>)는 일차방정식 $x+4=9$ 의 결과와 비슷한 유형의 반응을 보였다.

<표Ⅲ-6-1> 이항을 사용하여 해를 구하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들의 반응

유형	반응	인원수	반응	인원수	합계
A	$3x+2=17-2$ $3x=15$ $x=5$	4	$3x=17-2$ $=3x=15$ $=x=5$	8	22
	$3x+2=17=3x=17-2$ $=3x=15=x=5$	3	$3x+2=17=17-2=15=3x$ $3x=15$ $x=5$	2	
	$3x+2=17-2$ $3x=17-2$ $=3x=15$ $=x=5$	2	$3x+2=17-2$ $=3x=2-17$ $3x=15$ $x=5$	3	

B	$\begin{aligned} 3x+2 &= 17-2 \\ 3x &= 17-2 \\ &= 3x=15 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{15}{3} = x=5 \end{aligned}$	2	$\begin{aligned} 3x+2 &= 17 \\ &= 3x=17-2 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{17-2}{3} = x=5 \end{aligned}$	2	12
	$\begin{aligned} 3x+2 &= 17 = 3x = 17-2 \\ &= 3x = 15 = \frac{3x}{3} = \frac{17-2}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$	2	$\begin{aligned} 3x+2 &= 17 \\ 3 \times 5 + 2 &= 17 \\ &= 3^5 + 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$	2	
	$\begin{aligned} 3x+2 &= 17 = 3x = 17-2 \\ &= 3x = 17-2 \\ x &= 5 \end{aligned}$	2	$\begin{aligned} 3x+2 &= 17 \\ &= 3x = 17-2 \\ &= 3x = 15 \times \frac{1}{3} \\ &= x = 5 = 3 \end{aligned}$	2	
C	$3x = 15 = x = 5$	2	$3x+2 = 17 = x = 5$	2	4
D	$\begin{aligned} 3x &= -2+17 \\ 3x &= 15 \quad 5 \end{aligned}$	2	$\begin{aligned} 3x &= 17-2 \\ 3 &= 15 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$	2	4
합계					42

3) 일차방정식 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 해 구하기에 대한 반응(7번 문항).

일차방정식 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 학생들의 반응에서 이항이나 등식의 성질을 이용하고 등호(‘=’) 관계를 올바르게 표현한 학생이 약39.7%(150명)로 나타나 일차방정식 $3x+2=17$ (약 50.3%: 190명)과 $x+4=9$ (55%: 208명)보다 약 10%에서 15%정도 낮게 나타났다(<표Ⅲ-5>, <표Ⅲ-6>, <표Ⅲ-7>). 이러한 반응은 학생들이 분수 계산에서 어려움이 있는 것으로 볼 수 있다.

이항을 사용하여 해결하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생은 4.2%(16명), 로 나타났다(<표Ⅲ-7>). 그리고 일차방정식($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)의 해를 구할 때 5번과 6번 문항(<표Ⅲ-5>, <표Ⅲ-6>)과 같이 이항을 선호하는 것으로 나타났다.

<표Ⅲ-7> 방정식 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 학생들의 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)
답 맞음	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	150(39.7)
	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	8(2.1)
	답만 제시	4(1.1)
	이항을 사용하여 해결하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못함	16(4.2)
답 틀림	이항 이용, 답 틀림	36(9.5)
	등식의 성질 이용, 답 틀림	4(1.1)
	답만 제시(틀림)	10(2.6)
	무반응	150(39.7)
합계		378(100)

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

이항을 사용하여 해를 구하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들 16명에 대한 반응을 자세히 조사한 결과 <표Ⅲ-7-1>와 같이 나타났다. 풀이과정에서 나타난 결과는, 5번과 6번 문항의 반응과 비슷한 유형을 보였다(<표Ⅲ-5-1>, <표Ⅲ-6-1>).

<표Ⅲ-7-1> 이항을 사용하여 해를 구하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들의 반응

유형	반응	인원수	반응	인원수	합계
A	$x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} = x = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ $= x = \frac{8}{12} - \frac{3}{12}$ $x = \frac{5}{12}$	3	$x = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ $= x = \frac{8}{12} - \frac{3}{12}$ $x = \frac{5}{12}$	6	16
	$x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} = x = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ $= x = \frac{8}{12} - \frac{3}{12}$ $= x = \frac{5}{12}$	5	$12 \times (x + \frac{1}{4}) = \frac{2}{3} \times 12 = 12x + 3 = 8$ $= 12x = 8 - 3$ $= x = \frac{5}{12}$	2	
	$12 \times (x + \frac{1}{4}) = \frac{2}{3} \times 12 = 12x + 3 = 8$ $= 12x = 8 - 3$ $= x = \frac{5}{12}$			2	

4) 일차방정식 $4(x+2)=20$ 에 대한 해 구하기에 대한 반응(8번 문항)

이항이나 등식의 성질을 이용하고 등호(=)관계를 올바르게 표현한 학생들의 반응에서, 일차방정식 $4(x+2)=20$ 에서는 47.6%(180명), $3x+2=17$ 에서는 50.3%(190명)로 나타나 약간의 차이가 있었다. 그리고 일차방정식 $4(x+2)=20$ 의 풀이과정에서도 이항을 선호하는 것으로 나타났다.

<표Ⅲ-8> 방정식 $4(x+2)=20$ 에 대한 학생들의 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)
답 맞음	분배법칙 이용, 이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	180(47.6)
	양변 4로 나눗셈하고 이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	
	이항을 사용(등호관계를 올바르게 표현하지 못함)	24(6.3)
답 틀림	대입하여 해결	8(2.1)
	분배법칙 이용하였지만 틀림	22(5.8)
	무반응	122(32.3)
	분배법칙 모르고 틀림	22(5.8)
합계		378(100)

이항을 사용하여 해를 구하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들 24명에 대

한 반응을 자세히 조사한 결과(<표Ⅲ-8-1>)는 앞의 결과(<표Ⅲ-5-1>, <표Ⅲ-6-1>, <표Ⅲ-7-1>)와 유사하게 대부분 풀이과정에서 앞부분에 등호(‘=’)를 붙인다는 것이다.

<표Ⅲ-8-1> 이항을 사용하여 해를 구하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들의 반응

유형	반응	인원수	반응	인원수	합계
A	$4(x+2) = 20$ $= 4x + 8 = 20$ $= 4x = 20 - 8$ $4x = 12$ $x = 3$	4	$4(x+2) = 20$ $= 4x + 8 = 20$ $= 4x = 20 - 8$ $= 4x = 12 = x = 3$	6	24
	$4(x+2) = 20$ $= 4x + 8 = 20$ $= 4x = 12$ $= x = 3$	4	$4(x+2) = 20 \equiv 4x = 20 - 8$ $= 4x = 12$ $x = 3$	4	
	$4x + 8 = 20 - 8$ $= 4x = 12$ $x = 3$	4	$4x = -8 + 20 = 4x = 12$ $\frac{4x}{4} = \frac{12}{4} 3$ $x = 3$	2	

네 개의 일차방정식($x+4=9$, $3x+2=17$, $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$, $4(x+2)=20$)에서, 이항을 이용하고 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현한 학생들의 반응은 각각, 56.1%(212명), 50.3%(190명), 39.7(150명), 47.6%(180명)으로 나타났다(<표Ⅲ-5>, <표Ⅲ-6>, <표Ⅲ-7>, <표Ⅲ-8>). 그리고 네 개의 일차방정식($x+4=9$, $3x+2=17$, $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$, $4(x+2)=20$)에서, 이항을 사용하여 해결하였지만 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생의 반응은 각각, 6.3%(23명), 4.2%(16명), 11.1%(42명), 13.8%(52명)로 나타났다(<표Ⅲ-5>, <표Ⅲ-6>, <표Ⅲ-7>, <표Ⅲ-8>). 즉, 네 개의 일차방정식의 풀이에서 이항을 선호하는 것으로 나타났다.

■ 일차방정식 문항(5번, 6번, 7번, 8번)간의 상관

일차방정식 문항(5번, 6번, 7번, 8번)에서 등식의 성질이나 이항을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현한 반응은 맞은 것으로 하고 그 외에는 틀린 것으로 하였다. 이러한 조건하에서, 일차방정식 문항간의 상관관계가 <표Ⅲ-8-2>와 같이 나타났다. 5번 문항과 6번 문항간의 상관은 0.666로, 6번 문항과 8번 문항간의 상관은 0.696로, 7번 문항과 8번 문항간의 상관은 0.685로 나타나 상관이 있는 것으로 나타났다. 그 외 문항 간에는 상관계수가 0.428에서 0.585로 나타나 약한 상관이 있는 것으로 나타났다.

<표Ⅲ-8-2> 일차방정식을 푸는 문항(5번, 6번, 7번, 8번)간의 상관

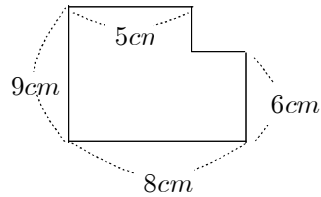
문항	문항5	문항6	문항7	문항8
문항5	1	.666(**)	.428(**)	.501(**)
문항6	.666(**)	1	.585(**)	.696(**)

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

문항7	.428(**)	.585(**)	1	.685(**)
문항8	.501(**)	.696(**)	.685(**)	1

3. 서술형 문항에 대한 반응(넓이 이용)

1) 다음 [그림]에 주어진 도형의 넓이를 구하기에 대한 반응(9번 문항).



<표Ⅲ-9> 도형의 넓이 구하기에 대한 학생들의 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)
답 맞음	$(9 \times 8) - (3 \times 3)$ 으로 해결, 또는 답만 제시	118(31.2)
	63 cm^2	38(10.1)
답 틀림	$63 \text{ cm}, 63 \text{ cm}^3$	18(4.8)
	무반응	144(38)
	틀린 경우	60(15.9)
합계		378(100)

9번 문항에서는 넓이공식을 이용하여 구한 학생이 대부분이었으며, 일차방정식을 세워서 해결한 학생은 없는 것으로 나타났다.

2) 서술형 문항에 대한 반응(10번 문항)

10번 문항) 철수는 문구점에서 한 개에 80원 하는 연필과 한 개에 50원 하는 지우개를 합쳐 35개를 샀다. 그 35개의 값은 2350원 이었다. 철수는 연필과 지우개를 각각 몇 개씩 샀는가?

2-1). 풀이 1방법(표이용)

표를 사용하여 해결한 학생들이 15.4%(58명), 넓이를 이용하여 해결한 학생이 2.7%(10명)로 나타났다. 그리고 연립방정식을 세워서 해결한 학생이 7.9%(30명)로 나타나 선수학습이 이루어진 것으로 볼 수 있다(<표Ⅲ-10>, <표Ⅲ-10-1>)

<표Ⅲ-10> 서술형 문항에 대한 학생들의 반응1

반응	풀이방법	반응 수(%)
답 맞음	표 사용	58(15.4)
	기타	42(11.1)

서중진

답 틀림	표 사용	10(2.7)
	기타	50(13.2)
	무반응	216(57.1)
	대입하였으나 틀림	2(0.5)
합계		378(100)

2-2) 풀이 2방법(연립방정식 이용)

<표Ⅲ-10-1> 서술형 문항에 대한 학생들의 반응2

반응	풀이방법	반응 수(%)
답 맞음	연립방정식 이용	30(7.9)
	넓이 이용	10(2.7)
답 틀림	식은 맞고 계산이 틀림	2(0.5)
	식 자체가 틀림	28(7.4)
	무반응	308(81.5)
합계		378(100)

4. 일차방정식의 풀이 방법을 제시한(등식의 성질) 문항에 대한 반응

등식의 성질을 이용하여 방정식을 해결하라는 문제에서 학생들의 반응은 다음과 같이 나타났다.

1) 일차방정식 $x - 3 = 2$ 을 등식의 성질을 이용하여 해 구하기에 대한 반응(11번 문항).

<표Ⅲ-11> 일차방정식 $x - 3 = 2$ 에 대한 학생들의 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)	항목별 반응 수(%)
답 맞음	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	24(6.4)	198(52.4)
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	174(46)	
	등식의 성질 이용하였으나 등호관계를 올바르게 표현하지 못함	3(0.7)	
	이항 이용하였으나 등호 관계이해하지 못함	19(5)	54(14.3)
	대입(답만 제시)	32(8.5)	
답 틀림	등식의 성질 이용	0(0)	126(33.3)
	이항 이용	10(2.7)	
	답만 제시, 기타	26(6.9)	
	무반응	90(23.8)	
합계		378(100)	378(100)

일차방정식($x - 3 = 2$)의 해를 구하는 문제에서, 등식의 성질을 이용하여 등호(‘=’)을 올바르게 표현하고 해를 구한 학생은 24명(6.3%)을 나타냈다(<표Ⅲ-11>). 이들 중 18명은 5번 문항(방정식 $x + 4 = 9$ 에 대한 해를 구하시오)에서 이항을 사용하여 등호(‘=’)을 올바르게 표

현하고 해를 구하였다. 그리고 2명은 5번 문항에서 등식의 성질을 이용하여 등호(‘=’)을 올바르게 표현하고 해를 구하였다. 4명은 이항을 사용하여 답을 구하였으나 등호관계의 대칭성을 이해하지 못하는 것으로 나타났다. 즉, 일차방정식($x+a=b$)의 해를 구하는 두 가지 방법(등식의 성질, 이항)을 모두 사용하여 해결한 학생은 연구대상 378명중 18명(4.8%)으로 나타났다. 각 학교 상황마다 다르겠지만, 학생들이 등식의 성질과 이항을 모두 사용하여 해결할 수 있도록 학습지도가 이루어져야 할 것으로 보인다.

이항이나 등식의 성질을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현하여 해결한 학생들은 11번 문항에서 198명(52.4%), 5번 문항에서 212명(56.1%)으로 나타났다. 5번 문항과 11번 문항을 해결한 학생 수의 차이는 약14명으로 약간의 차이가 있는 것으로 볼 수 있다(<표Ⅲ-11>)

그러나 5번 문항을 해결한 212명 중에서 162명이 11번 문항에서 이항이나 등식의 성질을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 것으로 나타났으며, 나머지 50명은 답만 제시하거나 반응을 보이지 않거나, 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 것으로 나타났다. 11번 문항을 해결한 198명 중에서 158명이 5번 문항에서 이항이나 등식의 성질을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 것으로 나타났으며(<표Ⅲ-11-1>), 나머지 36명은 답만 제시하거나 반응을 보이지 않거나, 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 것으로 나타났다(<표Ⅲ-11-2>).

또한, 5번 문항($x+4=9$ 의 해 구하기)에서 이항을 사용하여 답을 구하였지만, 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 52명으로 나타났다. 이 학생들 중 24명은 11번 문항에서 이항이나 등식의 성질을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하였다(<표Ⅲ-11-3>). 즉, 문항에 따라 등호(‘=’)관계의 올바른 표현은 다르게 나타나므로 학생들이 일차방정식을 해결 할 때 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하는지의 여부는 여러 문항을 해결한 과정을 비교하여 봄으로써 알 수 있다는 것이다.

이러한 결과는(<표Ⅲ-11-1>, <표Ⅲ-11-2>, <표Ⅲ-11-3>), 일차방정식의 어느 한 문항을 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하여 해결한 학생이 다른 문항도 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하여 해결할 수 있다고 보기에 어렵다. 또한, 어느 한 문항에서 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하지 못하고 문제를 해결하지 못한 학생이 다른 문항에서는 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하여 해결할 수 있다는 것을 보여준다. 그러므로 학생들이 일차방정식을 해결 할 때, 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하여 해결할 수 있는지 알아보기 위해서는 여러 문항에 대한 풀이과정을 비교하여 판단하여야 할 것으로 보인다. 그리고 충분한 검토가 이루어진 후 학생들의 학습지도가 이루어져야 할 것이다.

<표Ⅲ-11-1> 5번 문항을 해결한 212명의 11번 문항에 대한 반응

반응	풀이방법	5번 문항	11번 문항
답 맞음	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	212명	162명
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)		
그 외	답만 제시, 무반응, 등호관계를 올바르게 표현하지 못함		50명
합계		212명	212명

서종진

<표Ⅲ-11-2> 11번 문항을 해결한 202명의 5번 문항에 대한 반응

반응	풀이방법	11번 문항	5번 문항
답 맞음	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	194명	158명
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)		
그 외	답만 제시, 무반응, 등호관계를 올바르게 표현하지 못함		36명
합계		194명	194명

<표Ⅲ-11-3> 5번 문항에서 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생52명에 대한 11번 문항에 대한 반응

반응	11번 문항의 풀이방법	반응 수(명)
답 맞음	등식의 성질(등호 관계를 올바르게 표현)	4
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	20
	등식의 성질 이용하였으나 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함	2
	이항 이용하였으나 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함	6
	대입(답만 제시)	4
답 틀림	이항 이용하였으나 틀림	2
	무반응	14
합계		52

<표Ⅲ-11-4> 5번 문항에서 이항을 사용하여 해결한 학생들(208명)의 11번 문항에 대한 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)	항목별 반응 수(%)
답 맞음	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	18(8.6)	158(75.9)
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	140(67.3)	
	등식의 성질 이용하였으나 등호관계를 올바르게 표현하지 못함	0(0)	16(7.7)
	이항 이용하였으나 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함	2(1)	
	대입(답만 제시)	14(6.7)	
답 틀림	등식의 성질 이용	0(0)	34(16.4)
	이항 이용	4(1.9)	
	답만 제시, 기타	2(1)	
	무반응	28(13.5)	
합계		208(100)	208(100)

5번 문항(방정식 $x+4=9$ 에 대한 해를 구하시오)에서 이항을 사용하여 해결 하는 과정에서 등호(=)를 올바르게 표현하여 해결한 학생들이 208명이었다. 그러나 등호(=)를 올바르게 표현하여 11번 문항을 해결한 학생은 158명(75.8%)으로 나타났다. 그 외 50명(24%) 중에는, 16명(7.7%)은 답만 맞은 학생, 34명(16.3%)은 답이 틀린 것으로 나타났다(<표Ⅲ-11-4>). 즉, 5번 문항과 11번 문항에서 등호(=)를 올바르게 표현하면서 문제를 바르게 해결한 학생들은 약 75.9%(158명) 정도로 나타나 약 24.1%(50명)가 등호(=)를 올바르게 표현할 수 없는 것으로 보이거나 실제로 여러 문항을 비교한 결과는 다르게 나타났다(<표Ⅲ-5>, <표Ⅲ

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

-6>, <표Ⅲ-7>, <표Ⅲ-8>, <표Ⅲ-1>, <표Ⅲ-12>, <표Ⅲ-13>, <표Ⅲ-14>, 5) 등호를 바르게 표현하지 못한 학생 수).

2) 등식의 성질을 이용하여 방정식 $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$ 의 해 구하기에 대한 반응(12번 문항).

<표Ⅲ-12> 방정식 $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$ 에 대한 학생들의 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)	항목별 반응 수(%)
답 맞음	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	22(5.8)	92(24.3)
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	70(18.5)	
	등식의 성질 이용하였으나 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함	1(0.3)	10(2.6)
	이항 이용하였으나 등호 관계를 올바르게 표현하지 못함	9(2.3)	
	대입(답만 제시)	0(0)	
답 틀림	이항 이용	71(18.9)	276(73.1)
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현 하지 못함)	1(0.3)	
	답만 제시, 기타	16(4.3)	
	무반응	188(49.7)	
합계		378(100)	378(100)

일차방정식($ax+b=c$)에서 a 와 b 그리고 c 가 정수로 된 일차방정식(11번 문항)에서 이항이나 등식의 성질을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 학생들은 198명(52.4%)으로 나타났지만(<표Ⅲ-11>), a 와 b 그리고 c 가 분수로 된 문항에서 이항이나 등식의 성질을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 학생들은 92명(24.3%)으로 나타나(<표Ⅲ-12>) 분수로 되어 있는 일차방정식을 어려워하는 것으로 나타났다.

11번 문항에서 이항을 이용하였으나 등호 관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 약 19명(5%)로 나타났으며, 12번 문항은 9명(2.3%)으로 나타나 그 차이가 절반정도 나고 있다. 이것은 이항을 사용하여 11번 문항을 해결한 학생들이 174명(46%), 12번 문항을 해결한 학생들은 70명(18.5%)으로 나타난 것과 관련이 있다고 할 수 있다. 즉, 문항의 난이도에 따라 해결 정도의 차이를 보이고 있는 것이다.

3) 방정식 $0.4x + 2.3 = 4.5$ 을 등식의 성질을 이용하여 해 구하기에 대한 반응(13번 문항).

<표Ⅲ-13> 방정식 $0.4x + 2.3 = 4.5$ 에 대한 학생들의 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)	항목별 반응 수(%)
답 맞음	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	38(10.1)	148(39.2)
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	110(29.1)	

서종진

	등식의 성질 이용하였으나 등호관계를 올바르게 표현하지 못함	1(0.3)	8(2.1)
	이항 이용하였으나 등호 관계이해하지 못함	7(1.8)	
	대입(답만 제시)	0(0)	
답 틀림	이항 이용	64(16.8)	222(58.7)
	답만 제시, 기타	16(4.2)	
	무반응	142(37.6)	
합계		378(100)	378(100)

일차방정식($ax+b=c$)에서 a 와 b 그리고 c 가 소수로 된 일차방정식(11번 문항)에서 이항이나 등식의 성질을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 학생들은 152명(40.2%)으로 나타났지만(<표Ⅲ-13>), a 와 b 그리고 c 가 분수로 된 문항에서 이항이나 등식의 성질을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 학생들은 100명(26.5%)으로 나타나(<표Ⅲ-12>) 분수로 되어 있는 일차방정식을 어려워하는 것으로 나타났다.

13번 문항에서 학생들의 반응은 $\frac{4}{10}x + \frac{23}{10} = \frac{45}{10}$ 로 고쳐서 문제를 해결하거나 등식의 양변에 10을 곱하여 해결하는 방법을 사용 것으로 나타났다. 13번 문항과 12번 문항에서 학생들이 이항이나 등식의 성질을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 학생들의 반응 수에 차이는 12번 문항을 해결하는 과정에서 통분을 하지 못하는 학생들이 있었기 때문이다.

4) 등식의 성질을 이용하여 방정식 $\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$ 의 해 구하기에 대한 반응(14번 문항).

<표Ⅲ-14>를 보면, 등식의 성질을 이용하여 해결하라는 조건에도 불구하고 학생들이 이항을 이용하여 해결한 학생들이 대부분이었다. 11번, 12번, 13번 문항에서도 같은 결과가 나타났다. 학생들이 일차방정식 풀이에서 등식의 성질보다 이항을 선호하기 때문에 이항을 사용하여 해결하였는지, 아니면 등식의 성질을 잘 모르기 때문에 이항을 사용하여 해결하였는지는 면담을 통한 조사가 이루어져야 할 것으로 보인다.

일차방정식의 해가 맞고 틀린 것에 관계없이 일차방정식의 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들의 반응에서, 11번 문항은 22명(5.5%), 12번 문항은 11명(2.9%), 13번 문항은 8명(2.1%), 14번 문항은 3명(0.1%) 으로 나타났다(<표Ⅲ-11>, <표Ⅲ-12>, (<표Ⅲ-13>, <표Ⅲ-14>). 그리고 5번 문항은 56명(14.8%), 6번 문항은 44명(11.6%), 7번 문항은 16(4.2%)명, 8번 문항은 24명(6.3%) 으로 나타났다(<표Ⅲ-5>, <표Ⅲ-6>, <표Ⅲ-7>, <표Ⅲ-8>). 12번, 13번, 14번 문항에서의 반응이 낮게 나타난 것은 문항간의 난이도의 차이가 있었기 때문이라 보인다.

<표Ⅲ-14> 방정식 $\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$ 에 대한 학생들의 반응

반응	풀이방법	반응 수(%)	항목별 반응 수(%)
답	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현)	18(4.8)	98(25.9)

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

맞음	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현)	80(21.1)	6(1.6)
	등식의 성질 이용(등호관계를 올바르게 표현하지 못함)	0(0)	
	이항 이용(등호관계를 올바르게 표현하지 못함)	2(0.5)	
	대입(답만 제시)	4(1.1)	
답 틀림	이항 이용	71(18.7)	274(72.5)
	이항 이용(등호 관계를 올바르게 표현하지 못함)	1(0.3)	
	답만 제시, 기타	18(4.8)	
	무반응	184(48.7)	
합계		378(100)	378(100)

5) 등호(‘=’)를 올바르게 표현하지 못한 학생 수

이항이나 등식의 성질 또는 대입을 하거나 하는 조건이 없는 ‘방정식의 해를 구하라’는 문항(5번, 6번, 7번, 8번 문항)과 등식의 성질을 이용하여 해결하라는 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항)중에서 답이 틀렸거나 맞았거나 관계없이 한 문항이라도 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생을 조사한 결과, 연구대상 378명 중에서 82(21.7%)명으로 나타났다.

5. 일차방정식의 풀이 방법을 제시한(등식의 성질) 문항에서 등식의 성질이나 이항의 방법을 사용하여 한 문항 이상 해결한 학생들의 각 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항)에 대한 반응

다음은 등식의 성질을 이용하여 해결하라는 지시가 있었던 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항)에 대한 학생들의 반응을 조사하였다.

‘등식의 성질을 이용하여 방정식을 풀어나가’는 조건이 있는 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항)에 대한 학생들 풀이방법을 다음 <표Ⅲ-15>에서 숫자로 표시하였으며, 분석은 다음 두 가지에 대하여 분석하였다.

5-1) 4문항(11번, 12번, 13번, 14번) 중에서 한 문항이라도 등식의 성질을 사용하여 풀이한 학생 수

5-2) 4문항(11번, 12번, 13번, 14번) 중에서 한 문항이라도 이항을 사용하여 풀이한 학생 수

<표Ⅲ-15> 등식의 성질을 이용하여 해결하는 문제에서 학생들의 반응에 대한 숫자 표시가 의미하는 내용

반응	풀이방법	표시
답 맞음	등식의 성질 이용	1
	등식의 성질 이용, 등호관계를 올바르게 표현하지 못함	2
	이항 이용	3
	이항 이용, 등호 관계 이해하지 못함	4
	대입(답만 제시)	5
답 틀림	등식의 성질 이용	6
	이항 이용	7
	답만 제시, 기타	8
	무반응	9

서중진

5-1) 4문항(11번, 12번, 13번, 14번) 중에서 한 문항이라도 등식의 성질을 이용하여 풀이한 학생 수

등식의 성질을 이용하여 일차방정식을 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 학생들의 분포는, 11번 문항에서 24명(6.4%), 12번 문항에서 22명(5.8%), 13번 문항에서 38명(10.1%), 14번 문항에서 18명(4.8%)로 나타났다.

네 문항 중에서 한 문항이라도 등식의 성질을 이용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 학생들은 54명으로 나타났으며, 각 문항을 해결한 유형은 다음 표(<표Ⅲ-15-1>)와 같다.

<표Ⅲ-15-1> 한 문항이라도 등식의 성질을 이용하여 풀이한 학생 수

반응	문항				반응 수
	문항11	문항12	문항13	문항14	
문항1에서 문항4번 중 한 문항이라도 등식의 성질을 이용하여 풀이를 하고 답이 맞은 학생	1	1	1	1	10
	1	1	1	3	2
	1	1	1	5	2
	1	1	4	5	2
	1	3	3	3	2
	1	9	1	9	2
	1	6	9	9	2
	1	9	9	9	2
	3	1	1	1	2
	3	3	1	3	4
	3	3	1	7	2
	3	6	1	1	2
	3	9	1	1	2
	3	7	1	6 또는 9	6
	3	1	6	6	2
	3	6	6	1	2
	4	3	1	3	2
	5	1	1	6	2
	2	2	2	6	2
	2	9	6	9	2
합계					54

5-2) 4문항(11번, 12번, 13번, 14번) 중에서 한 문항이라도 이항을 이용하여 풀이한 학생 수

이항을 이용하여 일차방정식을 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 학생들의 분포는, 11번 문항에서 174명(46%), 12번 문항에서 70명(18.5%), 13번 문항에서 110명(29.1%), 14번 문항에서 80명(21.1%)로 나타났다.

네 문항 중에서 한 문항이라도 이항을 이용하여 해결하는 과정에서 등호(‘=’)를 올바르게 표현한 학생들은 186명으로 나타났다. 반응의 유형은 <표Ⅲ-15-2>와 같이 나타났다.

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

<표Ⅲ-15-2> 한 문항이라도 이항을 이용하여 풀이한 학생 수

반응	문항				반응 수(명)
	문항11	문항12	문항13	문항14	
이항을 이용하여 문항1에서 문항4까지 중 한 문항이라도 풀이하고 답이 맞은 학생	3	3	3	3	40
	3	3	3	7	16
	3	3	3	8 또는 9	4
	3	6	3	3	4
	3	3	7	3	4
	3	7또는 9	3	3	12
	3	7또는 9	3	7또는 9	24
	3	7또는 8	6또는 7	3	4
	3	3	9	9	2
	3	7	7	7또는8또는9	12
	3	9	6또는 7	6또는7또는9	14
	3	9	9	9	16
	5	3	3	3	2
	5	7	3	3	2
	5	7	3	7	2
	3	1	1	1	2
	3	3	1	3	4
	3	3	1	7	2
	3	6	1	1	2
	3	9	1	1	2
3	7	1	6 또는 9	6	
3	1	6	6	2	
3	6	6	1	2	
4	3	1	3	2	
1	1	1	3	2	
1	3	3	3	2	
합계					186

6. 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항) 간의 상관

1) 일차방정식 문항(11번, 12번, 13번, 14번)간의 상관

일차방정식 문항(11번, 12번, 13번, 14번)에서 등식의 성질이나 이항을 사용하여 해결하는 과정에서 등호(=)관계를 올바르게 표현한 반응은 맞은 것으로 하고 그 외에는 틀린 것으로 하였다. 이러한 조건하에서, 일차방정식 문항간의 상관관계가 <표Ⅲ-15-3>와 같이 나타났다. 11번 문항과 12번 문항간의 상관은 0.674로, 12번 문항과 13번 문항간의 상관은 0.616으로 나타나 상관성이 있는 것으로 나타났다. 그 외 문항 간에는 상관계수가 0.411에서 0.569로 나타나 약한 상관성이 있는 것으로 나타났다.

전체적으로 문항간의 상관성이 높게 나타나 수 있도록 교수·학습이 이루어져야 할 것으로 보인다.

<표Ⅲ-15-3> 일차방정식을 푸는 문항(11번, 12번, 13번, 14번)간의 상관

문항	문항11	문항12	문항13	문항14
문항11	1	.672(**)	.494(**)	.411(**)
문항12	.672(**)	1	.616(**)	.553(**)
문항13	.494(**)	.616(**)	1	.569(**)
문항14	.411(**)	.553(**)	.569(**)	1

7. 문항에 대한 학생의 반응에 대한 예

문항의 풀이과정에서 어떠한 문항은 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하였지만 어떠한 문항은 등호관계를 올바르게 표현하지 못하는 경우가 나타났다. 하나의 문항만 보면 마치 등호관계를 바르게 표현하였다고 판단할 수 있다. 그러나 전체 문항을 보면 그렇지 않다는 것이다.

1) 등호(‘=’)관계 표현의 예

아래 <표Ⅲ-16>는 어느 학생의 답안이다. 이 학생은 한 문제를 제외하고는 답이 모두 맞았지만 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현한 문항과 그렇지 못한 문항이 있었다. 5번, 6번, 7번, 9번, 10번 문항은 등호(‘=’)관계를 바르게 표현하였고, 8번 문항은 그렇지 못하였다. 등식의 성질을 이용하여 일차방정식의 해를 구하라는 조건이 제시된 문항(11번, 12번, 13번, 14번)에서는 등호(‘=’)관계를 올바르게 표현하지 못한 것으로 나타났다.

즉, 일차방정식의 해를 구하는 과정에서 등호(‘=’)관계를 바르게 표현할 수 있는지 못하는지 알기 위해서는 한 두 문제의 풀이과정을 보고서는 판단할 수 없음을 보여준다.

<표Ⅲ-16> 학생의 등호관계의 표현

1번, 2번 문항의 반응	3번, 4번 문항의 반응
맞음	맞음
5번 문항의 반응	6번 문항의 반응
<p><u>풀이과정)</u> $x+4=9$ $5+4=9$ $x=5$</p>	<p><u>풀이과정)</u> $3x=11-2$ $3x=15$ $x=5$</p>
이항을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현	이항을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현
7번 문항의 반응	8번 문항의 반응
<p><u>풀이과정)</u> $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ $12x = 8 - 3$ $12x = 5$ $x = \frac{5}{12}$</p>	<p><u>풀이과정)</u> $4x+8=20$ $= 4x = 20-8$ $= 4x = 12$ $= x = 3$</p>
이항을 사용, 답 맞음	분배법칙과 이항을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현하지 못함

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

<p>등호관계 바르게 표현</p> <p>9번 문항의 반응</p> <p>풀이과정) $12 \div 3 = 4$</p> <p>답 맞음</p>	<p>10번 문항의 반응</p> <p>풀이과정-방법1) $\frac{80 \times 20 + 50 \times 15}{1600 + 1750}$ $= \frac{2350}{3350}$ 여권 = 20개, 지갑 = 15개</p> <p>답 맞음</p>
<p>11번 문항의 반응</p> <p>풀이과정 $x - 3 = 2$ $= 5 - 3 = 2$ $= x = 5$</p> <p>대입을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현하지 못함</p>	<p>12번 문항의 반응</p> <p>$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$</p> <p>풀이과정 $-\frac{1}{3}x = \frac{2}{7} - \frac{2}{5}$ $= -\frac{2}{7} + \frac{2}{5}$ $= -\frac{2}{35}$ $= x = \frac{12}{35}$</p> <p>이항을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현하지 못함</p>
<p>13번 문항의 반응</p> <p>$0.4x + 2.3 = 4.5$</p> <p>풀이과정) $0.4x + 2.3 = 4.5$ $= 4x + 23 = 45$ $= 4x = 45 - 23$ $= 4x = 22$ $= x = \frac{22}{4}$ $= x = \frac{11}{2}$</p> <p>이항을 사용하고, 답 맞음 등호관계 바르게 표현하지 못함</p>	<p>14번 문항의 반응</p> <p>$\frac{1}{4}x = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x$</p> <p>풀이과정 $\frac{1}{4}x - \frac{2}{5}x = \frac{3}{2}$ $= \frac{5x - 8x}{20} = \frac{3}{2}$ $= -\frac{3x}{20} = \frac{3}{2}$ $= -3x = 30$ $= x = -10$</p> <p>이항을 사용하고, 답 틀림 등호관계 바르게 표현하지 못함</p>

2) 등호(‘=’)관계 표현에 대한 반응의 예

5번, 6번, 7번, 13번 문항은 이항을 사용하여 답을 구하였지만 등호관계는 바르게 표현하지 못하였다. 8번과 11번 문항은 이항을 사용하여 답을 구하고 등호관계도 바르게 표현하였다. 12번 문항은 이항을 사용하였지만 답 구하기가 빠져있다. 그러나 등호관계는 바르게 표현하였다. 즉, 학생들이 일차방정식의 해를 구하는 과정에서 등호(‘=’)관계를 바르게 표현할 수 있는지, 그렇지 않은지는 여러 문항을 비교하여야 알 수 있다는 것이다.

<표Ⅲ-16-1> 학생풀이과정의 예

1번, 2번 문항의 반응	3번, 4번 문항의 반응
맞음	맞음
5번 문항의 반응	6번 문항의 반응

<p>풀이과정) $x+4=9 \Rightarrow x=9-4$ $x=5$</p> <p>이항을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현하지 못함 7번 문항의 반응</p>	<p>풀이과정) $3x+2=17 \Rightarrow 3x=17-2$ $3x=15$ $x=5$</p> <p>이항을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현하지 못함 8번 문항의 반응</p>
<p>풀이과정) $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ $\Rightarrow x=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}$ $x=\frac{5}{12}$</p> <p>이항을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현하지 못함 9번 문항의 반응</p>	<p>풀이과정) $4x+8=20$ $4x=20-8$ $4x=12$ $x=3$</p> <p>분배법칙과 이항을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현 10번 문항의 반응</p>
<p>계산과정 없고 답만 맞음 11번 문항의 반응</p>	<p>무반응 12번 문항의 반응</p>
<p>$x-3=2 \Rightarrow x=5$</p> <p>풀이과정) $x-3=2$ $x=2+3$ $x=5$</p> <p>이항을 사용, 답 맞음 등호관계 바르게 표현 13번 문항의 반응</p>	<p>$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}=\frac{2}{7}$</p> <p>풀이과정) $-32x+42=36$ $-35x=36-42$ $-35x=-12$</p> <p>이항을 사용, 답구하기 부족(맞음) 등호관계 바르게 표현 14번 문항의 반응</p>
<p>$0.4x+2.3=4.5$</p> <p>풀이과정) $4x+23=45$ $4x=45-23$ $4x=22$ $x=5.5$</p> <p>이항을 사용하고, 답 맞음 등호관계 바르게 표현하지 못함</p>	<p>무반응</p>

IV. 결론

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 일차방정식($x+a=b$)의 해를 구하는 문제에서 등식의 성질보다 이항을 선호하여 해결하는 것으로 볼 수 있다(<표Ⅲ-5>, <표Ⅲ-6>, <표Ⅲ-7>, <표Ⅲ-8>).

둘째, 등식의 성질을 이용하여 해결하라는 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항)에서, 학생들은 등식의 성질보다는 이항으로 해결한 학생들이 더 많이 나타났다(<표Ⅲ-11>, <표Ⅲ-12>, <표Ⅲ-13>, <표Ⅲ-14>). 즉, 문제의 조건에서 등식의 성질을 이용하여 해결하라는 지시에도 불구하고 이항을 사용하여 해결한 학생들이 더 많이 나타났다. 이러한 결과에서, 학생들이 일차방정식 풀이에서 등식의 성질보다 이항을 선호하기 때문에 이항을 사용하여 해결하였는지. 그렇지 않으면 등식의 성질을 잘 모르거나 등식의 성질을 잊어버렸기 때문인지는 개별적인 면담을 통한 조사가 이루어져야 할 것으로 보인다.

셋째, 방정식의 해를 구하는 방법의 조건 없이 제시된 문항(5번, 6번, 7번, 8번 문항)에서 답이 틀렸거나 맞았거나 관계없이 등호(=)관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 각각 56(14.8%)명, 42(11.1%)명, 16(4.2%)명, 24(6.3%)명으로 나타났다(<표Ⅲ-5>, <표Ⅲ-6>, <표Ⅲ-7>, <표Ⅲ-8>). 그리고 등식의 성질을 이용하여 해결하라는 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항)에서 답이 틀렸거나 맞았거나 관계없이 등호(=)관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 각각 21(5.7%)명, 11(2.9%)명, 8명(2.1%), 3명(0.8%)으로 나타났다(<표Ⅲ-11>, <표Ⅲ-12>, <표Ⅲ-13>, <표Ⅲ-14>).

반면, 이항이나 등식의 성질을 사용하라는 조건이 없는 문항(5번, 6번, 7번, 8번 문항)과 등식의 성질을 이용하여 해결하라는 문항(11번, 12번, 13번, 14번 문항)중에서 답이 틀렸거나 맞았거나 관계없이 한 문항이라도 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 학생을 조사한 결과, 연구대상 378명 중에서 82명(21.7%)으로 나타났다.

이러한 결과는 학생들이 어느 문항은 등호(=)관계를 올바르게 표현하였지만 다른 문항을 해결할 때에는 등호(=)관계를 올바르게 표현하지 못하였다는 것을 보여주고 있다.

즉, 일차방정식의 어느 한 문항에서 등호(=)관계를 올바르게 표현하여 해결한 학생이 다른 문항도 등호(=)관계를 올바르게 표현하여 해결할 수 있다고 보기에 어렵다(<표Ⅲ-11-1>, <표Ⅲ-11-2>, <표Ⅲ-16>, <표Ⅲ-16-1>). 또한, 어느 한 문항에서 등호(=)관계를 올바르게 표현하지 못하고 문제를 해결하지 못한 학생이 다른 문항에서는 등호(=)관계를 올바르게 표현하여 해결할 수 있는 것으로 나타났다(<표Ⅲ-11-3>).

학생들이 등호(=)관계를 올바르게 표현할 수 있는지, 표현할 수 없는지는 문항에 따라 그 반응이 다르게 나타나므로 여러 문항을 통하여 테스트 한 다음 풀이과정을 비교하여 판단하여야 할 것으로 보인다. 그리고 이러한 과정을 거쳐 충분한 검토를 하고 학습지도 방향을 설정하여 학생들이 일차방정식의 해를 구하는 문제에서 등호(=)관계를 올바르게 표현하고 대칭성을 이해할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

넷째, 일차방정식($x \pm a = b$)의 해를 구하는 문제에서 등식의 성질이나 이항을 모두 사용하여 해결한 학생은 연구대상 378명중 18명(4.8%)으로 나타났다. 이러한 결과가 대표성을 갖는다고 하기에는 어렵지만 면밀한 조사를 통하여 학생들이 등식의 성질과 이항을 모두 사용하여 해결할 수 있도록 학습지도가 이루어져야 할 것으로 보인다.

참고문헌

- 김성준 (2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대학교 박사학위논문.
Behr, M. et. al (1976). "How Children View Equality Sentences." PMDC Technical Report No.3. Tallahassee: Florida State University(ERIC Document Reproduction

- Service No. ED 144802).
- Bernard, J. E., & Cheon, M. P. (1998). An integration of equation-solving methods into a developmental learning sequence. In A. E. Coxford(Ed.), *The ideas of algebra. K-12(1998 Yearbook, pp97-11)*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bright, G. W. (1981). *Student Procedure in Solving Equations*. National Council of Teachers of Mathematics 59th, St. Louis, Mo, April 22-25.
- Brown at al. (1988). Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment: Algebra, Geometry, mathematical methods, and attitudes. *Mathematics Teacher*, 81, 337-347.
- Byers, V. & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 24-27
- Herscovics, N. & Kieran, C. (1980).Constructing Meaning for the Concept of Equation, *Mathematics Teacher*: In B. Moses(ed), *Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications (Paperback)*, National Council of Teachers of Mathematics(1999), 181-188
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations, *Educational Studies in Mathematics*, 30(1), 39-65.
- Kieran, C. (1980). The interpretation of the equals sign: Symbol for an equivalence relation vs. an operator sign. In R. Karplus (Ed.) *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Berkeley, University of California.
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol, *Educational Studies in Mathematics*, 12(3),317-26.
- Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations. In J.M. Moser(Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA(83-91)*. Madison: University of Wisconsin.
- Kieran. C. (1992). The learning and teaching of school Algebra(*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*): In B. Moses(ed), *Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications (Paperback)*, National Council of Teachers of Mathematics(1999), 341-361.
- Mevarech, Z. R., & Yitschak, D. (1983). Student's misconceptions of the equivalence relationship. In R Hershkowitz(Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of the Mathematics Education(313-318)*. Rehovot, Israel: Weizman Institute of Science.
- Weaver, Fred. (1971) "Some Factors Associated with Pupils' Performance Levels on Simple Open Addition and Subtraction Sentences." *The Arithmetic Teacher*, 513-519.

일차방정식의 풀이 과정에 나타난 유형에 관한 연구

Weaver, Fred. (1973) "The Symmetric Property of the Equality relation and Young Children's Ability to Solve Open Addition and Subtraction Sentences." *Journal for Research in Mathematics Education*, 4, 45-46

서종진

**A study on patterns shown in the process of solving
a linear equation
- Centering around the first grade of middle school -**

Seo, Jong Jin²⁾

Abstract

In the process of solving a linear equation, some questions had equal sign(‘=’) relation properly, while other questions did not have equal sign(‘=’) relation properly. Since whether students could express equal sign(‘=’) relation properly or not is determined by questions, the direction for teaching should be instituted, and instruction and teaching should be conducted by comparing and analyzing after conducting tests on many items.

Most of students who got the answer for items without the method of solving a linear equation solved the items using binomial. For questions asking to solve using the characteristic of equality, most of students solved the questions using binomial instead of using the characteristic of equality. Therefore, instruction and learning to solve equations using both the characteristic of equality and binomial have to be achieved.

Key Words : Linear equation, equal relation, the characteristic of equality, transposition

* This paper has been supported by the 2009 Hannam University Research Fund.

2) Hannam University (jjseo@hnu.ac.kr)