韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2009. 05. 제 48권, 제 2호, 183-190.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2009, Vol. 48, No. 2, 183-190.

# 수학 문제 해결 과정에서 사고(발상)의 전환과 불변성의 인식

도 종 훈 (서원대학교)

## I. 서 론

Hadamard(1954)는 해답을 찾을 수 있는 사람이 너무 좁게 자신의 문제에만 집착하여 다른 관점에서의 사고를 하지 못함으로 인해 자신의 결론으로부터 곧장 유도되는 중요한 결과를 알아차리지 못하는 현상을 역설적 실패라고 하면서 자신의 아이디어에 지나치게 집착하고 한 가지 특정한 방향으로 지나치게 주의력을 집중시키는 사고는 새로운 발견에 적절하지 않으며, 하나의 원리가 아무리 정당하고 다산성이 있다 할지라도 너무 고집스럽게 그 원리만을 따라서는 안 되는 경우도 있음을 지적하였다. Wertheimer(1959)는 통찰이 일어나지 못하는 것은 그 사람의 사고가 부적절한 방향으로 고착되어 있기 때문이며 따라서 통찰은 사고의 고착을 극복함으로써 이루어질 수 있다고 보았다. Krutetskii(1969)는 정형화된 해법에서 벗어나 자기 제한을 극복하는 사고 과정의 유연성을 수학적 능력의 주요 구성요인으로 간주하였다. 실제로 수학의 역사에서 위대하고 창의적인 업적 중에는 기존의 통념이나 상식을 극복한 통찰로부터 비롯된 것이 많다. 대표적인 예로 Bolyai와 Gauss, Lobachevsky 등에 의한 비유클리드 기하학의 발견은 당시의 상식과 통념에 위배되는 쌍곡공준을 받아들임으로써 이루어졌다. 그 밖에도 여러 학자들(Romey, 1970; Balka, 1974; Haylock, 1985, 1987, 1997 등)이 수학적 창의성에 관한 논의에서 사고의 유연성을 강조하였고, 국내에서도 여러 학자들(김홍원, 김명숙, 송상헌, 1996; 이강섭 · 황동주, 2003 등)이 수학적 창의성을 '수학 문제 상황에서 사고의 고착을 극복하여 다양하고 독창적인 산출물을 내는 능력'으로 간주한 바 있다.

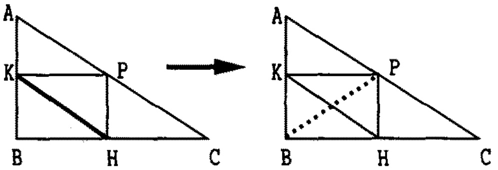
이처럼 수학적 창의성에 관한 기존 논의들의 핵심적인 측면 중 하나는 수학 문제 해결 과정에서 사고의 고착 극복 능력 즉, 사고의 유연성이다. 이와 관련하여 연구자는 이전 연구(2005)를 통해 수학 문제 상황에서 사고의 유연성이 문제 해결이 시작되는 문제의 이해 단계와 문제 해결이 본격적으로 이루어지는 문제풀이의 과정 단계에서 모두 중요한 역할을 한다고 보고, 수학 문제 상황에서 사고의 고착이 일어나는 시점(단계)을 기준으로 사고의 유연성을 문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력과 문제풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력으로 특징지은 바 있다.

특히, 문제풀이의 과정 단계에서 학습자가 기존에 알고 있었거나 자신이 고안해낸 특정한(혹은 틀에 박힌, 통상적인, 틀린, 비효율적인) 해법 혹은 관점에 고착되어 문제풀이가 더 이상 진전되지 않을 수 있다는 점에서 사고(발상)의 전환 능력을 문제풀이의 과정에서 틀에 박힌 통상적인 해법이나 관점과는 다른 문제 해결에 유용한 새로운 해법이나 관점을 떠올리거나, 문제 상황을 다른 사람들과는 다른 관점에서 파악하여 접근하는 능력으로 간주하였다. 그리고 다음 문제

> "변 AC가 빗변인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC 위의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나면서 변 AB, 변 BC에 각각 평행인 직선이 변 BC, 변 AB와 만나는 점을 각각 H, K라고 하자. 선분 HK의 길이가 최소가 되도록 하는 점 P의 위치를 구하여라."

에 대한 수학영재학생들의 풀이 사례를 통해, 일부 학생들이 <그림 1>과 같이 선분 HK에서 선분 BP로의 사고(발상) 전환을 통해 문제를 쉽게 해결한 반면, 대부분의 학생들은 다양한 전략을 사용하긴 하였지만 선분 HK로부터 선분 BP로의 사고(발상) 전환에 실패하여 문제를 해결하지 못하였음을 확인한 바 있다.

* 접수일(2009년 3월 28일), 게재확정일(2009년 5월 8일)
* ZDM 분류 : C43
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 수학적 창의성, 사고(발상)의 전환, 불변성
* 이 논문은 도종훈의 박사학위논문 중 「II장. 수학적 창의성의 개념」의 일부 내용을 정리, 보완하여 재구성한 것임.




<그림 1> 사고(발상) 전환을 통한 관점의 변화

그 이후 연구자는 학생들이 사고(발상) 전환에 실패하는 이유가 무엇인지 보다 심층적으로 분석하기 위해 3~4명의 학생으로 구성된 소집단을 대상으로 앞서 제시한 문제를 풀어보도록 하고, 문제에 대한 학생들의 반응 및 해결 과정을 관찰하였다.

본 논문에서는 그 결과를 분석, 정리하여 제시하고, 이를 통해 사고의 유연성 특히 사고(발상)의 전환 능력과 함께 고려되어야 할 사고의 측면으로서 문제 상황에 내재된 불변성의 인식이 수학 문제 해결 과정에서 어떤 역할을 하고, 사고(발상)의 전환 능력과는 어떤 관련이 있는지 논의한다.

## Ⅱ. 연구 방법 및 절차

### 1. 연구 대상

서울 소재 S중학교 3학년 1개 반 학생들 중 7명의 학생들을 2개의 소집단(1조-3명, 2조-4명)으로 구성한 후, 앞서 제시된 문제를 풀어보도록 하고 그 해결 과정을 관찰하였다. 이 학생들은 자신들의 담임교사(인 동시에 수학교사)인 H교사의 권유에 따라 자발적으로 본 연구에 참여한 학생들로서, 본 연구의 관찰이 방과 후에 이루어졌음에도 자발적으로 참여하는 등 전반적으로 수학 학습에 대하여 자신감을 가지고 있고, 또한 연구자가 제시한 문제를 해결하는 과정 내내 적극적으로 문제 해결 및 토론에 참여하였다.

### 2. 자료 수집 및 분석

연구에 참여한 7명의 학생들을 2개의 소집단으로 나눈 후, 각 소집단 별로 한 명씩 학생들의 문제 해결 과정을 관찰하였다. 학생들에게 주어진 시간은 45분이고, 그 시간 동안 문제를 해결하여 답안을 제출하도록 하였다. 만약 45분이 지나도 학생들이 문제를 해결하지 못할 경우 관찰자가 문제 해결의 결정적인 실마리가 되는 도움말을 제공하기로 하였다. 관찰자는 H교사(1조 관찰)와 연구자(2조 관찰)이고, 각자 학생들의 반응을 관찰하면서 필드노트를 작성하고 동시에 녹음기를 이용하여 학생들의 문제 해결 전 과정을 녹취하였다.

## Ⅲ. 연구 결과 및 논의

### 1. 관찰 결과

다음은 H교사와 연구자가 각각 1조 학생들(학생 A, 학생 B, 학생 C)과 2조 학생들(학생 1, 학생 2, 학생 3, 학생 4)의 문제 해결 과정을 관찰하면서 작성한 필드노트와 녹취 내용을 정리한 것이다.

(1) 1조 학생들의 문제 해결 과정

문제가 제시되자 학생들은 문제를 같이 읽으면서, 그림을 그려나갔다. 학생 A가 주도적으로 그림을 그렸고, 단번에 문제에서 요구하는 그림을 그려내었다. 학생들은 그림을 보면서 문제를 완전히 이해하였고, 잠시 후 다음과 같은 의견들을 제시하였다.

(1) P가 A 또는 C와 일치할 때 최소가 되지 않을까? (학생A)
(2) 중점일 지도 모르겠다. (학생A)
(3) P가 A 또는 C와 가까워질수록 점점 길어진다. (학생C)

먼저 학생 A가 처음 제시한 의견 (1)에 모든 학생들이 동의하였는데, 그 이유는 P가 A 또는 C와 일치할 경우 직사각형이 만들어지지 않으므로 HK의 길이가 0이라고 (잘못) 생각했기 때문이다. 이 의견에 대해서 어떤 학생도 이의를 제기하지 않았고, 의견 (1)은 결국 최종 답안의 일부로 제출되었다.

의견 (1)이 답일 것이라고 확신한 후 학생들은(아래 제시된 학생 B의 말처럼) P가 A, C와 일치하지 않을 경우만 해결하면 된다고 하면서 P가 A, C와 일치하지 않을 경우에 대한 답을 탐색하기 시작하였다.

학생 B : 답이 여러 가지여도 되죠?

잠시 후 학생 A가 다음과 같은 의견을 제시하였다.

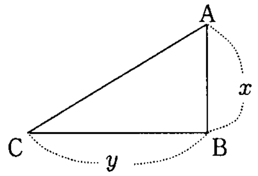
학생 A : P의 위치에 상관없이 직사각형(PKBH)의 둘레의 길이가 같아.

학생들은 모두 이 의견에 모두 동의하였고, 이 과정에서 정사각형일 때 대각선의 길이가 가장 짧다는 결론을 도출하였다. 그러나 학생 B가 반례가 되는 길쭉한 직각삼각형을 그려서 이를 반박하였고, 잠시 후 이 의견을 주도했던 학생 A 역시 자신이 틀렸다는 것을 인정하였다.

이후 학생들은 계속해서 이런 저런 그림을 그려보다가 직각이등변삼각형일 경우는 점 P가 빗변 AC의 중점일 때 선분 HK의 길이가 가장 짧을 것이라는 결론을 내렸다(이 의견에 대해서도 학생들이 설왕설래하였으나 구체적인 그림을 그려서 확인해 본 후 결국 동의함.).

그 후 학생들은 직각이등변삼각형이 아닌 그 이외의 경우를 생각해 보기로 하였으나 별다른 결론을 얻지 못하고, 다음과 같은 몇 가지의 답을 최종적으로 정리하여 제출하였다(문제가 제시되고 나서 45분 경과 후).

① P가 A 또는 C와 일치할 때 HK가 제일 짧다.
② P가 A 또는 C와 일치하지 않을 경우
i) $x>y$일 경우, P가 C에 가까울수록 HK가 짧다.
ii) $x<y$일 경우, P가 A에 가까울수록 HK가 짧다.




③ P가 A, C와 일치하지 않을 때, 그리고 직각이등변삼각형일 때는 P가 빗변 AC의 중점일 때 HK가 제일 짧다.

그 후 관찰자인 H교사는 "선분 HK와 BP는 같은 직사각형의 대각선이 되므로 길이가 같다. 이 사실을 이용하라."는 힌트를 제시하였다. 그러자 학생들은 빗변 AC 위에 점 P를 하나 잡고 꼭짓점 B를 중심으로 하고 선분 BP를 반지름으로 하는 원을 그려보고, "그러면 분명 빗변 AC와 만날 것이다. 만약 접한다면 이 점이 가장 길이가 짧다는 얘기가 되고, 따라서 직각이등변 삼각형일 경우에는 중점을 잡으면 접하게 되므로 중점이 답이 된다."라고 하면서 중점이 답이 됨을 재차 확인하였다. 그러나 직각이등변삼각형이 아닌 경우에는 어떤 점인지 명료하게 기술하지 못하였다.

이상의 논의 과정을 살펴보면 학생들은 일단 먼저 몇 가지의 답을 추측하고, 비형식적인 여러 가지 방법을 통해 자신들의 추측을 확인하는데, 이러한 과정을 통해 옳다고 한 번 확신한 답안(이를테면, P가 A 또는 C와 일치할 경우 선분 HK의 길이가 0이므로 최소가 된다, 혹은 빗변의 중점 등)에 대해서는 지나치게 집착하는 것을 관찰할 수 있다. 다음은 1조 학생들을 관찰한 H교사의 이에 관한 논평이다.

> "처음부터 3명이 같이 의논해서 문제를 해결하려고 하였다........ 중략 ........ 처음에 일단 P가 어떤 점일까를 그냥 추측하고 나중에 그 추측이 맞는지 확인하려고 하였다. P가 A 혹은 C와 일치하게 되면 직사각형이 만들어지지 않는데 이 학생들은 그렇다면 대각선도 존재하지 못하므로 엉뚱하게도 그 길이가 0이라는 결론(이 의견은 문제 풀이를 시도한 후 1~2분 이내에 나온 주장임)을 내렸고, 처음부터 끝까지 이 의견을 고수하였다. 이 학생들이 이 의견 이외의 또 다른 의견을 제시한 이유는 문제가 너무 간단하게 풀렸다고 생각했기 때문이지 다른 이유가 있었기 때문은 아니다. 즉, 너무나 확고하게 이것이 답이라고 생각하였다."

(2) 2조 학생들의 문제 해결 과정

2조 학생들 역시 처음 문제가 제시되자 각자 그림을 그려보면서 문제의 의미를 파악하려고 하였다. 그 중 한 학생이(학생 1)이 주도적으로 그림을 그리고, 나머지 학생들은 학생 1의 그림을 보고 서로 이야기를 나누면서 문제의 의미를 이해하려고 하였다. 학생들은 3분도 채 지나지 않아 문제의 의미를 파악하였다.

문제의 의미를 파악한 후 학생들은 학생 1이 그린 그림을 놓고 서로 의견을 교환하였고, 그 결과 다음과 같은 몇 가지의 답이 예상되었다.

(1) HK의 최소값은 0이고, 이 때 P의 위치는 B일거야. 끝!! (학생 1)

(2) P의 위치는 C일거야. (학생 2)
(3) HK의 길이는 P가 어디에 있든 항상 같은 거 아냐? (학생 1)
(4) 대각선이 B 근처에 있어야 할 것 같아.(학생3)
(5) 빗변 AC의 중점이 아닐까? (학생 3)

가장 먼저 (1)이 예상되었고, 다른 학생들도 처음에는 동의하는 듯했지만, 잠시 후 점 P가 빗변 AC 위에 있지 않음을 인식하고 철회되었다. 두 번째로 (2)이 예상되었고 거의 동시에 (3)이 예상되었다. 그러나 (2)의 경우 변 AB와 평행한 직선을 그었을 때 변 BC와의 교점이 C 자신이 되어 사각형이 만들어지지 않음을 파악하고 철회되었다. (4) 역시 (1)과 마찬가지로 점 P가 빗변 AC 위에 있어야 함을 인식하고 곧 철회되었다.

(3)에 대하여 학생들은 자로 재어서 확인해 보기로 하였다. 두 명의 학생(학생 2, 학생 4)이 그림을 그린 후 자로 재어서 길이를 확인하였다.

학생 2 : 약간 차이가 있는 것 같아.
학생 4 : 그건 니가 그림을 잘못 그려서 그럴 거야.

(그러나 이 때 학생 1은 두 학생이 자로 재어보는 동안 "자로 재어서 풀면 안 돼"라고 말하면서 혼자 그림을 그려서 골똘히 생각한다.)

약간의 시간이 흐른 후, 별다른 결과가 나오지 않자 학생들은 다음과 같이 말하였다.

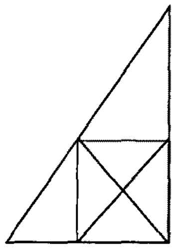
학생들 : 그냥 C로 하자.
학생 1, 학생 3 : C는 안 돼. 선분 HK가 안 나와.
학생 1 : '그냥 다 똑같다'로 하자.

학생들이 별다른 동의를 하지 않고 잠시 시간이 흐른 후 학생 3이 다음과 같이 말한다.

학생 3 : 중점이 아닐까?

이 안에 대해서도 학생들은 각자 자로 재어 확인해 보려고 하였다. 그러나 별다른 결과를 얻지 못하고 시간이 지났다. 지금까지 몇 가지의 답이 제안되었지만, 연구자가 보기에 학생들은 문제 해결의 실마리를 전혀 찾지 못하고 있었다.

이 때 연구자는 학생 1이 <그림 2>와 같은 그림을 그리는 것을 관찰하였다. 처음으로 문제 해결의 실마리가 되는 그림을 그린 것이다. 그러나 학생 1은 이 그림에서 실마리를 잡지 못하고 다시 중점인지 아닌지를 파악하는데 신경을 쓰고 있다.



<그림 2> 사고(발상) 전환의 실마리

(현재 학생들이 제안한 답안들은 모두 반박되었고, (5)의 경우만 아직 반박되지 않은 상태이다.)

연구자는 학생 1이 그린 그림을 보고, 다음과 같은 권고를 하였다(문제가 제시되고 나서 30분 경과 후).

연구자 : 그림을 다시 정확하게 잘 그려서 유심히 관찰해봐.

그러나 연구자의 기대와는 달리 학생들은 별다른 소득을 얻지 못했다. 한 학생은 피타고라스 정리를 상기하며, 직사각형의 두 변의 길이가 최소가 되어야 함을 강조하면서 "그 점이 바로 중점일거야"라는 말과 함께 (5)를 지지하였다. 그러나 왜 그 점이 중점이 되어야 하는지는 설명하지 못하였다. 결국 학생들은 별다른 이유를 제시하지 못한 채 중점이라는 답을 최종적으로 제출하였다(문제가 제시되고 나서 45분 경과 후).

그 후 연구자는 다시 "직사각형의 두 대각선의 길이가 같다"는 힌트를 제시하였다. 학생들은 그 점이 바로 중점이라며 자신들의 답을 정당화하려고 하였으나 적절한 설명을 제시하지 못하였다. 잠시 후 연구자는 한 삼각형의 예시를 통하여 중점이 답이 아님을 보여 주었다. 마지막 남아 있던 제안인 (5)마저 기각 당하자 학생들은 이제 혼란 상태에 빠져 있다.

연구자는 다시 한 번 점과 직선 사이의 거리가 언제 제일 짧은 지에 관한 질문을 제시하였고, 몇 명의 학생이 다음과 같은 반응을 보였다.

연구자 : 점과 직선 사이의 거리가 언제 제일 짧지?
학생 2 : 점과 직선을 잇는 직선이 직선과 이루는 각이 직각일 때요.

학생 4 : 정사각형일 때요
학생 1 : 그 점이 중점 아니야?

학생들은 결국 학생 2의 설명으로 답을 찾아내었다.

이상의 논의 과정을 살펴보면, 2조 학생들 역시 1조 학생들과 유사하게 충분한 근거를 가지지 않은 상태에서 먼저 하나의 답을 예상하며 경험적으로 쉽게 반박되지 않는 답안(예: 중점)의 경우 지나치게 그 답안에 집착하는 경향이 있음을 알 수 있다. 학생들은 그 밖의 다른 가능성을 잘 생각하지 못하며, 특히 직사각형의 두 대각선의 길이가 같으므로 나머지 대각선의 길이를 고려하라는 힌트에도 불구하고 중점에 대한 미련을 버리지 못하는 것을 관찰할 수 있다.

이는 자신이 처음 생각하여 제안한 답안에 자신의 사고가 고착되어 더 이상의 사고(발상) 전환이 이루어지지 못하고 있음을 의미한다. 심지어 문제에 대한 답(즉, 점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발)을 알고 나서도 그 점이 빗변의 중점, 정사각형의 꼭짓점 등과 같이 자신들에게 친숙한 용어로 표현 가능한 어떤 점이 되어야 한다고 생각하며, "꼭짓점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발"이라는 점(답)은 학생들에게는 친숙하지 않은 점(답)이다.

## 2. 논의 : 사고(발상)의 전환과 불변성의 인식

앞서 제시된 2조의 문제 해결 과정을 살펴보면, 1조의 문제 해결 과정에서는 관찰되지 않았던 흥미로운 장면을 발견할 수 있는데, 바로 1조와는 달리 2조의 학생들 특히 학생 1이 사고(발상) 전환의 실마리가 되는 그림(그림 2)을 그렸다는 점이다. 그런데 사고(발상) 전환의 실마리가 되는 그림을 그렸음에도 불구하고 2조 학생들 특히, 학생 1은 왜 사고(발상) 전환에 성공하지 못한 것일까?

잘 알려진 바와 같이 소년 시절 가우스는 다른 대부분의 학생들이 1부터 차례로 100까지의 수를 더하는 동안 거꾸로 100부터 1까지의 순서로 수를 더한다는 사고(발상)의 전환을 하였고, 이를 통해 1부터 100까지의 자연수의 합을 멋지게 계산할 수 있었다. 그러나 사실 가우스의 이러한 사고(발상) 전환은 더하는 순서와 상관없이 수들의 합이 불변(일정)하고 더구나 각 항의 합이 101로서 불변(일정)함을 인식하고, 이를 사고(발상) 전환의 아이디어와 연결하였기 때문에 유의미하다고 할 수 있다. 실제로 가우스의 예에 나타난 1부터 100까지의 합으로부터 100부터 1까지의 합으로의 사고(발상) 전환은 등차수열의 합을 구하는 문제 상황에서는 유의미하지만 등비수열의 합을 구하는 문제 상황에서는 별다른 의미를 지니지 못한다.

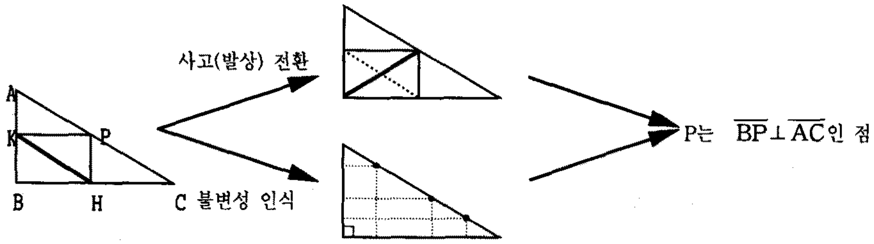
이처럼 사고(발상)의 전환이 의미 있는 것은 주어진 문제 상황에 내재된 수학적 구조와 불변성에 대한 통찰이 함께 이루어지기 때문이며, 이러한 통찰 없이 창의적인 사고(발상) 전환과 이를 통한 창의적인 문제 해결이 이루어지기는 어려울 것이다.

이러한 관점에서 보면 앞서 예시된 문제에서 선분 HK로부터 선분 BP로의 사고(발상) 전환이 유의미하려면 점 P의 위치에 상관없이 사각형 PKBH가 항상 직사각형이라는 불변성에 대한 통찰이 함께 이루어져야 하며, 이에 대한 통찰이 없이는 사고(발상) 전환은 문제 해결에 별다른 영향을 끼치지 못한다. 즉, 앞선 관찰에서 문제 해결의 실마리가 되는 그림(그림 2)을 그린 학생의 경우 비록 직사각형의 다른 대각선을 고려하여 사고(발상) 전환에 성공한 듯해 보였으나, 자신이 그린 사각형이 점 P의 위치에 상관없이 언제나 직사각형이 되고 직사각형의 두 대각선의 길이가 언제나 서로 같다는 불변성을 인식하지 못하여 결국 문제 해결에 실패했다고 볼 수 있다.

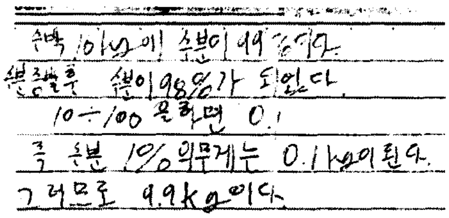
결국 이 문제를 해결하려면 선분 HK로부터 선분 BP로의 사고(발상) 전환에 성공하여야 할 뿐 아니라 점 P가 어떤 위치에 있든 사각형 PKBH가 직사각형으로서 불변함을 인식하여야 한다(그림 3). 실제로 선분 HK로부터 선분 BP로의 사고(발상) 전환은 주어진 문제 상황이 직각삼각형이기 때문에 유의미하며, 주어진 삼각형이 직각삼각형이 아닐 경우 별다른 의미를 지니지 못함을 알 수 있다.

다른 예로 문항 "수박은 수분이 많아 99%가 물이라고 한다. 10 Kg의 무게가 나가는 수박이 더운 날씨에 수분이 증발하여 수분의 함량이 98%인 수박이 되었다고 한다. 이때의 수박 무게는 얼마인가?"에 대한 학생들의 응답 사례를 살펴보자(그림 4).

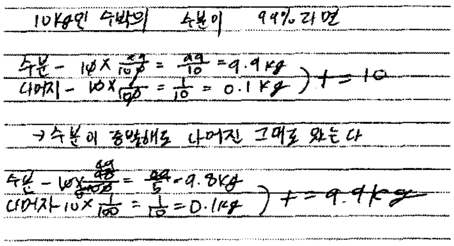
먼저 (a)를 답으로 제시한 학생은 수분이 1% 줄었으




<그림 3> 불변성 인식의 예




(a)



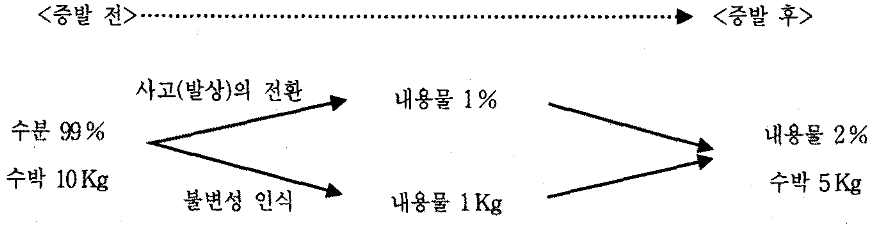

(b)

<그림 4> 불변성 인식 실패에 따른 오답의 예

므로 수박의 무게 역시 1% 줄어야 한다고 생각하여 9.9 Kg이라는 오답을 제시하였다. 이는 99%에서 98%로의 수분 변화에 주목하여 수박전체의 무게 역시 그와 같은 작은 변화를 보일 것이라는 소박한 생각에 기인하는 것으로서 증발과정에서의 불변량인 내용물에는 주목하지 못하였음을 알 수 있다. 즉, 이 학생은 수분으로부터 수분 이외의 내용물로의 사고(발상) 전환 아이디어를 전혀 착안하지 못하였음을 알 수 있다.

이와는 달리 (b)를 답으로 제시한 학생의 경우 수분 이외의 내용물로의 사고(발상) 전환 아이디어를 착안하고 수분 이외의 내용물이 증발과정에서 불변함을 파악한 듯했으나(학생이 제시한 답안 중 "수분이 증발해도 나머진 그대로 있는다." 참고), 그것이 지니는 본질적인 의미를 충분하지 파악하지는 못하였음을 알 수 있다. 즉, 수박 전체의 무게 역시 증발 과정에서 변화하고, 그것을 구하는 것임에도 불구하고 수박 전체의 무게가 불변한다는 가정 하에서 또 다시 변화된 수박의 무게를 구하는 등 변하는 것과 불변인 것에 대한 파악이 명료하지 않음을 알 수 있다.

결국 이 문제를 해결하기 위해서는 문제를 바라보는 관점이 '수분'에서 '수분 이외의 내용물'로 전환되어야 하며, 더불어 증발 과정에서 변화하지 않고 불변하는 것이 무엇인지를 명료하게 파악하여야 한다(그림5). 이 문제를 해결한 학생은 표면적으로 주어진 수분의 수치 변화에




<그림 5> 불변성 인식의 두 번째 예

주목한 것이 아니라 증발과정에서의 불변량인 내용물에 주목한 것으로 볼 수 있으며, 이는 사고(발상)의 전환이 문제 상황에 내재된 불변성의 인식과 함께 이루어졌음을 의미한다.

## Ⅳ. 결 론

이상에서 우리는 수학 문제 해결 과정에서 사고(발상)의 전환이 유의미하기 위해서는 문제 상황에 내재된 불변성의 인식이 병행되어야 하고, 그러지 못할 경우 비록 사고(발상) 전환의 실마리를 잡았다 하더라도 문제 해결에는 이르기 어려움을 몇 가지 사례를 통해 확인하였다.

문제 해결의 방법이나 결과의 독창성과 다양성은 문제 상황에 대한 문제 해결자의 관점이 얼마나 새롭고 다양한가에 의존한다는 면에서 사고의 유연성 특히, 문제 해결 과정에서 사고(발상)의 전환 능력이 창의적 문제 해결의 핵심적인 한 측면임은 분명해 보인다. 즉, 창의적인 문제 해결은 창의적인 사고(발상)의 전환의 결과라고도 볼 수 있는데, 이때 주어진 문제 상황에 대한 관점을 달리 한다는 것은 곧 그러한 관점의 변화에 따라 문제의 구조가 어떻게 변화하는지를 파악한다는 것을 의미하고, 특히 관점의 변화에도 불구하고 변하지 않는 불변인 성질이나 속성이 무엇인지 명료하게 파악하여 이를 문제 해결의 단서로 활용할 수 있다는 것을 의미한다고 하겠다. 이와 관련하여 Hadamard(1954)는 바둑판을 보지 않은 채 동시에 10-12게임을 할 수 있는 바둑기사의 예를 들면서 수학적 발견에서도 복잡한 문제 상황을 하나의 총괄적인 착상으로 파악하는 통찰력이 중요한 역할을 한다고 보았다. 김영정(2002)은 창의성 발현의 요체는 창의적 발상 전환에 있고, 창의적 발상 전환의 핵심 요체는 어떤 형태의 발상 전환적 아이디어가 주어졌을 때 그러한 발상 전환적 아이디어가 자신의 문제를 해결해 줄 해결책이 될 수 있다는 것을 파악해낼 수 있는 통찰력이라고 보았다. 그에 의하면 의미 있는 창의적 행위는 무절제한 상상력에서 발현되는 것이 아니라 통찰력에서 발현되는 것이며, 따라서 창의적 문제 해결에서는 문제 상황에 대한 통찰력과 아울러 어떤 아이디어가 주어진 문제 해결에 유용한 지에 대한 통찰력이 핵심 요체가 된다는 것이다.

결국 학생들은 유연하고 다양한 사고를 통해 문제를 만들고 해결할 수 있어야 하겠지만, 이를 위해서는 본고에 제시된 몇 가지 사례를 통해 살펴본 바와 같이 주어진 문제 상황에 내재된 수학적 구조와 불변성에 대한 통찰이 반드시 필요함을 알 수 있다. 이러한 관점에서 볼 때 수학적 창의성 개념을 이해하기 위해서는 지금까지 수학적 창의성의 핵심적인 측면의 하나로 간주되어 온 사고의 유연성과 함께 주어진 문제 상황에 내재된 수학적 구조와 불변성의 통찰이라는 측면도 함께 고려하여야 함을 알 수 있다.

## 참 고 문 헌


김영정 (2002). 창의성과 비판적 사고. 인지과학 13(4), pp.81-90.

김홍원 · 김명숙 · 송상헌( 1996). 수학영재 판별 도구 개발 연구(Ⅰ) - 기초연구편. 한국교육개발원.

도종훈 (2006). 중학교 기하 영역에서의 수학적 창의성 교육 연구. 서울대학교 박사학위논문.

이강섭 · 황동주 (2003). 일반창의성(도형)과 수학적 창의성과의 관련 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 42(1), pp.1-9.

최영기 · 도종훈( 2005). 수학적 사고의 유연성과 확산적 사고. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 44(1), pp.103-112.

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher* 21. pp.633-636.

Hadamard, J. (1954). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Dover.

Haylock, D. W. (1985). Conflicts in the assessment and encouragement of mathematical creativity in schoolchildren. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 16(4), pp.547-553.

__________ (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational studies in mathematics* 18(1), pp.59-74.

__________ (1997). Recognizing mathematical crea-

tivity in schoolchildren. *ZDM* 29(3), pp.68-74.
Krutetskii, V. A. (1969). Mathematical aptitudes, in J.Kilpatrick and I.Wirzup(eds.), *Soviet studies in the Psychology of learning and teaching mathematics, Volume II*, University of chicago press, Chicago.
Romey, W. D. (1970). What is your creativity quotient?. *School Science and Mathematics* 70, pp.3-8.
Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*. New York : Harper.

# Ability to Shift a Viewpoint and Insight into Invariance in Stage of Mathematical Problem Solving Process

**Do, Jonghoon**
Seowon University
241 Musimseoro, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, 361-742, Korea
E-mail: jhoondo@seowon.ac.kr

This is a following study of the preceding study, *Flexibility of mind and divergent thinking in problem solving process* that was performed by Choi & Do in 2005. In this paper, we discuss the relationship between ability to shift a viewpoint and insight into invariance, another major consideration in mathematical creativity, in the process of mathematical problem solving.

* ZDM Classification : C43
* 2000 Mathematics Subject classification : 97C30
* Key Words : mathematical creativity, ability to shift a viewpoint, mathematical invariance