

수리논술형 문제에 대한 초등학교 5학년 학생들의 문제해결력과 수학적 정당화 과정 분석

김 영 숙 (부산명륜초등학교)

방 정 숙 (한국교원대학교)

I. 서론

최근에 수학교육에서는 수학을 학습해야 할 내용으로만 보는 것이 아니라 학습의 과정으로써 문제를 해결하고 논리적으로 추론하며 의사소통하고 표현하는 것을 강조하고 있다(교육부, 1997; 교육인적자원부, 2006; NCTM, 1989, 2000). 이러한 변화에 따라 수학교육의 평가 방향도 달라지고 있다. NCTM(1995)에서 제시한 평가 기준을 살펴보면, 단순한 수학적 지식을 측정하던 것에서 상황에 맞게 그 지식을 활용하고 적용할 수 있는 능력을 평가하는 방향으로 변화하고 있으며, 지필 평가 방법만을 사용하지 않고 다양한 평가 방법을 활용하도록 제안하고 있다. 우리나라의 제7차 수학과 교육과정에서도 학생들의 성취 정도를 충실히 평가할 수 있고 학생 개개인의 전인적인 성장과 수학과 교수·학습 방법의 개선에 기여할 수 있는 방향으로 수학과 평가가 이루어져야 한다고 주장하고 있다(교육부, 1997).

이러한 추세에 따라 수학과 서술형·논술형 평가가 기존의 선택형 지필 평가 방법에 대한 대안으로 대두되고 있는데, 이는 수리적 기초 개념과 정의 그리고 기본 원리를 정확히 파악하고 있는가와 그것을 논리적으로 정확하게 전개하는가를 평가하는 것이다(노영순·류춘식, 2001). 이는 학생들이 가진 지식과 정보를 문제 상황에 맞춰 스스로 재구성하여 표현하는 능력을 평가함으로써 궁극적으로 학생들의 논리적 사고력이나 창의력 등 고등

사고 능력의 함양에 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다. 이에 따라 실제 최근 각 시도교육청에서는 서술형·논술형 평가를 확대하고 있다. 이를 통해 학생들은 수학 내용을 단순히 수용하기보다는 자신의 생각과 논리를 바탕으로 사고하면서 보다 의미 있게 수학을 학습할 것으로 기대된다. 또한 교사들은 학생들의 답안을 채점하면서 학생 개개인의 학습 정도와 교사 자신의 수업에 대한 구체적 정보를 얻게 되어 학생의 학습을 돕고 교수 방법을 개선하는 데도 도움을 얻을 것으로 기대된다.

그러나 학교 현장에서는 이러한 취지에 동의하면서도 수학과 서술형·논술형 평가를 어떻게 해야 하는지에 대해서 어려워한다. 특히 대부분의 연구가 대학에서 실시하는 수리논술을 중심으로 하고 있기 때문에, 초등학교에서 그 취지를 제대로 적용하기가 어렵다. 구체적으로 초등학교 학생들에게 적절한 서술형·논술형 평가의 유형이 무엇인지, 무엇을 평가할 것인지, 어떻게 평가할 것인지에 대한 실천적 연구가 거의 없다.

한편, 개정 수학과 교육과정에서는 수학적 의사소통을 강조하고 있다(교육인적자원부, 2006). 자신의 생각을 다른 사람과 공유함으로써 학생들은 사고를 깊고 명확하게 정리할 수 있으며 수학적 의사소통의 학습은 수학을 추론과 문제해결로 여기게 하고 일상생활과도 밀접한 관계를 엮어갈 수 있게 한다(이종희·김선희·박선욱·최승현, 2000). 집단 구성원들과 자신의 문제해결 방안을 서로 이야기하고 부족한 부분에 대해 조언을 하며 답의 정·오 뿐만이 아닌 문제해결의 과정 속에서 야기되는 수학적 개념과 원리의 이해에 관해 보다 긍정적인 면을 기대할 수 있다.

이러한 맥락에서 초등학교 학생들의 생각이나 의견을 직접 서술할 수 있는 수리논술형 문제를 고안하고, 학생들이 어떻게 해결해 나가는지 탐색해 보는 것은 시적이

* 접수일(2009년 2월 3일), 수정일(1차 : 2009년 5월 6일), 게재 확정일(2009년 5월 14일)

* ZDM분류 : C33

* MSC2000분류 : 97C30

* 주제어 : 수리논술형 평가, 문제해결력, 수학적 정당화

결한 연구라고 판단된다. 또한, 수리논술형 문제를 해결하는 과정에서 학생의 생각이나 주장을 어떻게 설득력 있게 조직하고 정당화하는지를 살펴보는 것이 필요하다. 이와 같은 연구 배경을 바탕으로 본 논문에서는 두 가지 유형의 수리논술형 문제를 개발하여 초등학교 5학년 학생들의 문제해결력을 분석하고, 문제해결 과정에서 나타난 수학적 정당화를 분석하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 서술형·논술형 평가

가. 서술형·논술형 평가의 개념 및 필요성

서술형·논술형 평가는 학생으로 하여금 출제자가 제시한 답을 선택하도록 하는 평가 방식이 아니라 학생의 생각이나 의견을 직접 서술하도록 하여 학생의 창의력, 문제해결력, 비판력, 판단력, 통합력, 정보수집력 및 분석력 등 고등사고 능력을 평가하기 위한 평가 방식이다. 현재 서울특별시교육청 등 일선 교육청에서는 서술형·논술형 평가를 확대 실시하도록 하고 있으며 관련 문항을 제작하여 보급하고 있다. 또, 우리나라 주요 대학의 입시에서는 논술의 형태를 다양화하여 그 비중을 높이고 있다.

이러한 필요성에 따라 그동안 서술형·논술형 평가에 대한 연구가 이루어져왔는데, 대부분 고등학생들을 대상으로 하여 대학의 기출 문항을 분석한 경우가 많았다(예, 노영순 외, 2001). 예외적으로 초등학생들을 대상으로 한 경우도 있었으나 수학적 성향과 관련된 연구이거나, 개발된 문항이 기존의 주관식 형태의 문제를 활용하거나 단편적인 수학적 지식 및 계산 기능을 확인하기 위한 문항 중심으로 구성되어 있다는 제한점이 있다(김남준, 2006; 김동희, 2006). 초등학생들에게 적합한 수리논술형 문제의 개발이나 이에 적합한 구체적인 평가 기준을 소개하고 있는 연구는 거의 없다.

나. 서술형·논술형 평가 문항의 분류

서술형·논술형 평가 문항에 대해 박도순·홍후조(2006)는 반응의 허용 정도, 자료 제시 여부 그리고 주된 평가 내용이 무엇인가에 따라 그 유형을 구분하였다. 먼

저, 반응의 허용 정도에 따른 유형에는 학생들의 반응 허용 정도가 상당히 제한되는 응답 제한형과 응답의 내용범위와 서술양식에 아무런 제한이 가해지지 않고 답안의 길이에 대한 제한도 명시되어 있지 않는 응답 자유형이 있다. 또, 자료 제시 여부에 따라서는 단독 과제형과 자료 제시형으로 구분된다. 단독 과제형은 자료나 정보를 제시하지 않고 특정 질문에 응답하도록 하는 문항 형태이다. 반면 자료 제시형은 문항 속에 학생이 읽을 자료를 제시해 주고 그것을 바탕으로 해서 응답하도록 하는 문항 형태이다. 보통 응답 자유형보다는 응답 제한형과 밀접하게 관련되어 있다. 평가 내용에 따른 유형에는 문항의 내용이 표현력과 관련된 일반쓰기 능력형과 문제의 내용이 어떤 특정교과목과 직접 관련되어 있거나 혹은 범교과적인 성질을 띤 교과관련 능력형이 있다.

조한혁(2006)은 주요 대학에서 실시한 수리논술 문제를 바탕으로 수리논술 문항을 크게 세 가지로 분류하였다. 첫째, 수학교과형은 일반적으로 말하는 수리논술로, 수학적 사실이나 수학사에 관한 비판적 글쓰기나 수학적 문제 풀이, 수학증명의 공리적 쟁점 등 수학 자체로 구성된 문항이다. 둘째, 수리과학형은 물리, 화학, 생물, 지구과학을 총망라하는 지식적인 문제해결력, 과학사에 관한 논쟁거리, 현재에 관심을 불러일으키는 과학의 동향 등 과학이 주가 되는 과학 논술이다. 셋째, 통합교과형 논술은 수학, 경제, 사회와 과학 등이 통합되어 주제가 설정되고 논리적인 사고를 거쳐 결과를 얻기까지의 과정을 글로 서술하는 수리논술이다.

서울특별시교육청(2006)에서는 수리논술을 고등학교 교과과정에 제시된 내용을 토대로 주어진 문제 상황을 다각적이고 심층적인 사고로 재구성하여 창의적으로 문제를 해결하고 논리적으로 서술하는 능력을 측정하는 과정 중심형 시험으로 보았다. 그리고 대학 입시 문제를 분석하여 수리논술을 수학교과형과 통합교과형으로 나누고 그에 대한 자료를 일선학교에 제작·배부하였다.

본 연구에서는 서술형·논술형 평가 문항의 분류와 대학 입시에 따른 수리논술 문항 분류를 바탕으로 하여 초등학교 수학과 교육과정에 제시된 내용을 토대로 한 수학교과형 문제를 중심으로 개발·적용하였다. 그리고 자료의 제시 여부에 따라 단독 과제형과 자료 제시형으로 구분하여 검사를 실시하였다.

다. 서술형·논술형 평가의 기준

서술형·논술형 문제에서는 기존의 선택형 평가 방법과 달리 하나의 정답만이 존재하기 보다는 문제 유형에 따라 다양한 답이 나올 수 있다. 따라서 정·오답 여부만으로 학생의 반응을 판단하는 것은 서술형·논술형 문제의 특질에 맞지 않다. 그 보다는 결과와 함께 문제해결 과정을 보고 응답의 질을 판단해야 하며 때로는 복잡한 사고과정을 평가해야 한다. 일반적으로 학생들의 문제해결 능력을 평가하기 위한 채점 방법으로는 총괄적 채점법과 분석적 채점법 두 가지가 많이 사용되며 경기도교육청 외 각 교육청과 논술을 실시하고 있는 여러 대학에서는 채점기준을 제시하고 평가를 실시하고 있다.

총괄적 채점법은 어떤 문제에 대한 답과 해결과정 등 문제해결 전체에 대하여 점수를 부여하는 방법이다. 총괄적 채점법의 기준은 사고과정의 몇 가지 범주에 대하여 각각 점수를 배정하고 합산하는 것이 아니라, 풀이 전체에 대하여 하나의 점수를 배정하는 것이다(류회찬·김진규·김찬중·임형·박미숙, 1998). 문항에 적용될 수

있는 일반적인 총괄적 평가 기준의 예는 <표 1>과 같다(경기도교육청, 2006, pp. 71-72).

분석적 채점법은 채점기준을 요소별로 나누어 배점하고 각 기준에 따라 채점한 다음 합산하는 방법이다(경기도교육청, 2006). 분석적 채점기준을 정립하기 위해서는 우선 문제해결 과정을 분석하여 몇 개의 단계로 구분하는 것이 필요한데, 논술에서 강조하는 내용에 따라 평가의 가중치를 적용할 수 있다. 분석적 평가 기준의 예는 <표 2>와 같다(경기도교육청, 2006, p. 73).

경상북도교육청(2006)에서는 수리논술의 경향 분석을 통해 평가 기준을 독해력, 문제해결 능력 그리고 논리적 서술 능력으로 제시하였다. 독해력은 출제의도를 파악하고 출제자의 질문내용을 정확히 이해하는가를 평가하는 것으로 문장으로 표현된 수리적인 내용을 기본적인 수학적 도구로 전환하여 그 내용을 해석할 수 있는가를 보는 것이다. 문제해결 능력은 자신이 배운 수리적 기본 개념을 제시문의 내용과 연관시키면서 문제를 해결할 수 있는 능력을 의미한다. 또한, 문제를 해결하는 것과 더불어

<표 1> 총괄적 평가 기준의 예

척도	일반적 특징	구체적 특징
6점	논술적 표현 및 논술문의 특징이 매우 우수함. 일반적 작문 전략 및 기능이 우수함.	논술문의 특징이 잘 드러나도록 전략과 기능을 사용하고 있다. 논술 과제가 요구하는 내용을 올바르게 파악하고 타당성 있는 근거를 들어 필자 자신의 주장이나 의견을 논리적으로 표현함으로써 강한 설득력을 얻고 있다. 또한 문단과 문단의 연결이 자연스럽게 체계적이며, 내용이 잘 드러나도록 논술문의 구성이 잘 짜여져 있음.
5점	논술적 표현과 논술문의 특징이 우수함. 일반적 작문 전략 및 기능이 우수함.	논술문의 특징이 일반적으로 잘 드러나도록 전략과 기능을 사용하고 있다. 논술 과제가 요구하는 내용을 올바르게 파악하고, 필자 자신의 주장이나 의견을 논리적으로 제시하였다. 그러나 그 근거의 타당성이 다소 부족한 것이 있다. 또한 논술문의 구성이 대체로 잘 짜여져 있고 문단과 문단의 연결이 자연스럽게, 체계성이 다소 부족함.
4점	논술적 표현과 논술문의 특징이 보편적인 수준임. 일반적 작문 전략 및 기능은 대체로 우수함.	논술문의 특징이 드러나도록 전략과 기능을 사용하고 있다. 논술 과제가 요구하는 내용을 올바르게 파악하였으나, 필자 자신의 주장이나 의견이 분명하지 않으며 그 근거의 타당성도 부족하다. 또한 문단과 문단의 연결은 자연스럽게 논술문의 구성은 일반적인 원칙을 따랐지만, 그 체계성은 다소 부족함.
3점	논술적 표현과 논술문의 특징이 다소 부족함. 일반적 작문 전략 및 기능은 보편적인 수준임.	전략과 기능의 사용이 논술문의 특징을 잘 보여 주지 못하고 있음. 논술 과제가 요구하는 내용을 올바르게 파악하였으나, 논술문의 내용은 과제와 다소 거리가 있는 내용이 들어 있음. 필자의 주장이나 의견이 명료하지 못하고 그 근거도 타당성이 다소 부족함. 문단과 문단의 연결은 자연스럽게, 논술문의 구성은 체계가 다소 불완전함.
2점	논술적 표현 및 논술문의 특징이 부족함. 일반적 작문 전략 및 기능이 부족함.	전략과 기능의 사용이 논술문의 특징을 잘 보여 주지 못하고 있음. 그래서 논술문인지 단순한 수필인지도 분명치 않음. 논술문은 논술 과제가 요구하는 내용과 거리가 먼 내용을 담고 있으며, 필자 자신의 주장이나 의견과 근거가 관련성이 적음. 문단의 연결이 다소 부적절하며 논술문 구성의 체계가 불안정함. 어법의 오류가 많아 의미 전달도 분명치 않은 것이 있음.
1점	논술적 표현 및 논술문의 특징이 매우 부족함. 일반적 작문 전략 및 기능도 매우 부족함.	전략과 기능의 사용이 논술문의 특징을 전혀 보여 주지 못하고 있음. 논술의 과제를 올바르게 파악하지 못하였을 뿐만 아니라 과제 요구 내용과 논술문 내용이 부합하지 못함. 필자 자신의 주장이나 의견도 일관성이 없고 단편적인 정보나 사실을 단순히 나열하고 있음. 사실과 의견의 구별이 모호하고 어법의 오류가 매우 많음. 문단의 구분도 이루어지지 않았으며 논술문의 구성도 이루어지지 않음.

<표 2> 분석적 평가 기준의 예

관점	평가 요소	세부 평가 기준	척도	관점	평가 요소	세부 평가 기준	척도
문제 파악	1. 문제분석력	논술 과제의 요구를 올바르게 파악했는가?	5-4-3-2-1	표현	11. 단어의 정확성	단어의 선택이 적절하고 정확한가?	5-4-3-2-1
	2. 논지의 정확성	과제의 의도에 맞게 논지를 설정했는가?	5-4-3-2-1		12. 문장의 정확성	문장이 어법에 맞고 문장이 정확한가?	5-4-3-2-1
내용	3. 내용의 통일성	내용이 통일되어 있고 주제가 명료한가?	5-4-3-2-1		13. 문장의 연결	문장과 문장은 긴밀하게 연결되었는가?	5-4-3-2-1
	4. 내용의 독창성	내용이 새롭고 독창적인가?	5-4-3-2-1		14. 담화 관습	논술문의 담화 관습을 잘 따르고 있는가?	5-4-3-2-1
	5. 내용의 정확성	다루는 내용은 정확한가?	5-4-3-2-1	15. 탐구적 태도	문제를 탐구적인 태도로 접근하는가?	5-4-3-2-1	
구성	6. 논어의 구체성	필자의 주장이나 의견은 구체적인가?	5-4-3-2-1	태도	16. 논술의 실천	논술문 쓰기를 생활 가운데 실천하는가?	5-4-3-2-1
	7. 논어의 일관성	필자의 주장이나 의견은 일관성이 있는가?	5-4-3-2-1		17. 논술문의 활용	주장이나 의견을 논술문을 활용하여 표현하고자 하는가?	5-4-3-2-1
	8. 근거의 타당성	근거는 적절성과 타당성이 있는가?	5-4-3-2-1		18. 공적 의사소통	완성한 논술문을 기고하거나 투고하는가?	5-4-3-2-1
	9. 문단의 연결	문단과 문단의 연결이 자연스러운가?	5-4-3-2-1				
	10. 논술문의 구조	논술문의 전체적인 구성이 체계적인가?	5-4-3-2-1				

그것을 말이나 글로 설명하는 논리적 서술 능력을 강조하고 있다.

한국대학교육협의회(2008)에서는 제주특별자치도교육청의 '논술 및 심층면접의 실제' 자료집을 재구성하여 논술 평가를 내용면, 논리면, 표현면 세 영역으로 나누어 평가 기준을 제시하였다. 내용면에서의 평가 항목은 문제의 파악, 사실의 이해, 해결의 능력 및 논지의 적절성이고 논리면에서의 평가 항목은 논어의 일관성, 논거 제시의 적합성 및 논증 방식의 타당성이다. 마지막으로 표현면에서의 평가 항목은 어휘의 정확성과 풍부성, 문장의 정확성과 효율성 그리고 글의 단위성과 유기성이다.

서울대를 비롯한 여러 대학에서는 논술을 평가할 때 대체로 이해분석력, 논증력, 창의력 그리고 표현력 등을 기준으로 삼는다. 이해분석력은 논술 문제를 잘 파악하였는지를 점검하는 것으로 주어진 논제와 제시문을 정확히 분석하고 이해하는 능력을 의미한다. 논술은 논제와 제시문의 이해에서 출발하므로 이해분석력은 학생들에게 요구되는 가장 기본적인 능력이다. 논증력은 주장을 논리적으로 전개하는 논리력을 의미하며 자신의 주장을 뒷받침하는 적절한 논거나 사례를 제시하였는지가 중요한 요소이다. 또한 주장의 논리적 전개는 적절한 논거를 제

시하고 논리적 일관성을 유지함으로써 가능하다. 창의력은 논거의 다양성과 독창성을 바탕으로 타당한 근거에 기반해 합리적으로 자신의 주장을 펼쳤는가를 보는 것이다. 마지막으로 표현력은 논술의 흐름에 알맞은 구성을 하고 있는지, 문장과 어휘 사용이 적절한지를 중요한 요소로 본다.

2. 수학적 정당화

수학적 정당화에 대한 유형은 연구자에 따라서 다양하게 분류된다. Tall(1998)은 증명에 사용된 표상에 따라 활동적 증명, 시각적 증명, 형식적 증명으로 구분하였는데, 여기서 활동적 증명은 신체적인 활동이나 몸짓을 통한 환경과의 상호작용과 의사소통에 근거를 둔 증명이다. 시각적 증명은 시각적 표현과 기호적 표현이 서로 상호 작용하는 수준에서의 증명을 일컫는다. 마지막으로 형식적 증명은 전통적인 증명의 의미로서 형식적 정의와 공리체계를 토대로 이루어지는 증명이다.

Harel과 Sowder(1998)는 중학생들과 대학생들을 대상으로 한 면담과 수업으로부터 학생들이 수학적 추론을 형성하는 것과 정당화 하는 것에 대한 사고의 틀을 외적

증명, 경험적 증명, 분석적 증명으로 분류하였다. 여기서 외적 증명은 자신이나 남을 납득시키기 위한 근원이 자신이 아닌 외부에 있는 것으로 교사나 교과서를 토대로 한 것이고, 경험적 증명은 예나 구체물을 기반으로 증명하는 것이다. 분석적 증명은 수학적 관계에 대한 추론을 통해서 일반적인 주장을 하는 방법이다(권성룡, 2003).

이미연(2007)은 수학적 내용의 정당화 유형을 Chiu(1996) 논문을 참고로 하여 생략, 권위, 직관, 과거 경험, 수학적 논리로 범주화하였다. 1차적으로 정당화의 근거가 학습자의 내부에 있는지, 외부에 있는지로 나누고, 2차적으로는 정당화의 원천이 무엇인지에 따라 권위, 직관, 과거경험, 수학적 논리로 나누었다.

이와 같은 연구 결과를 토대로 본 연구에서는 수학적 정당화를 수학적 논리를 따르는 형식적 증명과 비형식적인 증명 모두를 포함하는 말로 문제해결 과정에 대한 타당성을 설명하여 다른 사람을 납득시키는 과정으로 보고 권위에 의한 외적 정당화와 활동, 직관, 경험, 수학적 논리에 의한 내적 정당화로 분류하였다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구대상 및 연구방법

본 연구에서는 부산광역시 동래구 소재의 M초등학교 5학년 3개의 학급에서 희망하는 학생 중 담임교사의 추천을 받아 연구 대상을 선정하였다. 그 중 수학과와 국어과의 학업성취도가 상·중인 학생을 선발하여 16명을 연구 대상으로 하였다. 이는 수리논술형 문제를 해결하기 위해서는 수학적 문제해결력 뿐만 아니라 논리적으로 서술하는 능력이 요구되기 때문이었다.

본 연구는 수리논술형 문제에 대한 학생들의 문제해결력을 분석하고 모둠 구성원 간의 수학적 의사소통을 보기 위한 것임으로 질적 사례연구를 이용하였다. 수리논술형 문제를 자료 제시 여부에 따라 단독 과제형과 자료 제시형으로 그 유형을 나누어 검사를 실시하며 채점 기준에 따라 문제해결력을 분석하였다. 수리논술형 문제에 대한 채점은 선행 연구 고찰을 통하여 이해분석력, 논리력, 표현력 세 영역을 기준으로 하며 각 문항에 따라 채점기준을 구체화하여 결과를 점수로 나타내었다.

그리고 모둠별 활동을 비디오로 녹화한 자료를 전사하여 수학적 정당화의 유형이 어떻게 이루어졌는지를 분석하였다.

2. 검사 도구

본 연구에서는 수리논술형 문제를 학생의 수학적 원리와 관련된 논리적 기술로써 학생의 생각이나 의견을 직접 서술하는 문제로 학생 나름대로의 생각이나 주장을 논리적으로 설득력 있게 조직하여 작성해야 함을 강조하는 문제로 정의하였다. 수리논술형 문제는 초등학교 수학과 교육과정에 제시된 내용을 토대로 한 수학교과형 문제를 중심으로 자료의 제시 여부에 따라 단독 과제형과 자료 제시형으로 구분하여 각각 7개씩 총 14개의 문항을 선정하였다(구체적인 문항의 예는 <부록> 참조). 4명을 대상으로 예비검사를 실시하여 문제의 난이도와 어휘를 수정하고 검사 도구는 전문가에 의해 타당도를 검증받았다. 검사 도구의 구체적인 내용은 <표 3>과 같다. 수리논술형 문제는 개정 수학과 교육과정의 영역 구분에 따라 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제해결 5개 영역에서 기본적으로 각 영역마다 한 문제 이상 출제하였고, 자료 제시형 문제의 성격을 감안하여 영역을 통합하여 출제하였다.

<표 3> 수리논술형 문제의 개요

유형	문항 주제	영역	문항 번호
단독 과제형	직사각형과 평행사변형의 관계 이해하기	도형	1-(1)
	분수의 개념 이해하기	수와 연산	2-(1)
	둘레의 길이와 넓이의 관계 이해하기	측정	3-(1)
	올림과 버림의 의미 이해하기	측정	4-(1)
	최대공약수와 최소공배수의 의미 이해하기	수와 연산	5-(1)
	성금 모금 의사결정하기	규칙성과 문제해결	6-(1)
자료 제시형	실생활에서 소수와 분수의 쓰임 이해하기	수와 연산	7-(1)
	그래프를 보고 평균의 의미 해석하기	확률과 통계	1-(2)
	연산기호 규칙 찾아 적용하기	규칙성과 문제해결	2-(2)
	숫자 '0' 이야기를 통해 십진기수법에서의 '0'의 의미 이해하기	수와 연산	3-(2)
	조건에 알맞은 수 찾기	수와 연산 규칙성과 문제해결	4-(2)
	도표를 근거로 하루의 일정을 정해 주장하기	확률과 통계	5-(2)
	수의 성질을 활용하여 메뉴 고르기	수와 연산 규칙성과 문제해결	6-(2)
그림이 나타낸 규칙 찾아 수로 표현하기	규칙성과 문제해결	7-(2)	

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에서는 연구 대상 16명에게 7회에 걸쳐 단독 과제형과 자료 제시형의 수리논술형 문제를 각각 한 개씩 풀도록 하여 학생들의 검사지를 수집하였다. 채점기준은 수리논술형 문제에 따라 <표 4>, <표 5>와 같이 구체화시켰다. 이는 수리논술의 특성과 총괄적 채점법, 분석적 채점법 그리고 교육청 연수 자료 및 주요 대학의 평가 기준을 참고로 하여 평가 항목을 이해분석력, 논리력, 표현력으로 구분하고 각 단계에 따른 채점기준을 세분화한 것이다. 채점기준표에서는 수리논술형 문제해결 과정에서 얼마나 타당한 논거를 제시하는가에 큰 비중을 두어 논리력에 배점을 많이 두었다.

<표 4> 단독 과제형의 수리논술형 문제의 채점기준표

항목		배점기준
이해분석력 (2점)	논제의 이해	2 논제를 완전하게 이해한다. 1 논제의 일부분을 이해하지 못한다. 0 논제를 완전하게 이해하지 못한다.
		4 논거가 타당하고 평가요소가 모두 포함된다. 2 논거가 타당하나 평가요소가 부족하다. 0 논거가 타당하지 못하고 평가요소가 없다.
논리력 (6점)	논거의 적절성 (4점)	2 논점에서 벗어난 내용이 없다. 1 일부 불필요한 내용이 있다. 0 논점에서 완전히 벗어났다.
	논리적 일관성 (2점)	2 사용된 어휘나 문장이 정확하고 연결이 자연스럽다. 1 사용된 어휘나 문장이 다소 부정확하고 연결이 매끄럽지 못하다. 0 사용된 어휘나 문장이 부정확하고 연결이 부자연스럽다.
표현력 (2점)	어휘, 문장의 정확성, 효율성	
총점	10점	

<표 5> 자료 제시형의 수리논술형 문제의 채점기준표

항목		배점기준
이해분석력 (4점)	논제의 이해 (2점)	2 논제를 완전하게 이해한다. 1 논제의 일부분을 이해하지 못한다. 0 논제를 완전하게 이해하지 못한다.
	자료의 이해 (2점)	2 자료의 내용을 올바르게 분석한다. 1 자료의 내용 일부분을 올바르게 분석한다. 0 자료의 내용을 완전하게 분석하지 못한다.
논리력 (6점)	논거의 적절성 (4점)	4 논거가 타당하고 평가요소가 모두 포함된다.

		2 논거가 타당하나 평가요소가 부족하다. 0 논거가 타당하지 못하고 평가요소가 없다.
	논리적 일관성 (2점)	2 논점에서 벗어난 내용이 없다. 1 일부 불필요한 내용이 있다. 0 논점에서 완전히 벗어났다.
표현력 (2점)	어휘, 문장의 정확성, 효율성	2 사용된 어휘나 문장이 정확하고 연결이 자연스럽다. 1 사용된 어휘나 문장이 다소 부정확하고 연결이 매끄럽지 못하다. 0 사용된 어휘나 문장이 부정확하고 연결이 부자연스럽다.
총점	12점	

구체적으로, 단독 과제형의 수리논술형 문제의 채점에서는 논제의 이해 정도에 따른 이해분석력(2점)과 논리력(6점) 즉, 논거의 타당도와 평가요소의 포함 정도에 대한 논거의 적절성(4점), 논점에서 벗어난 내용 여부에 따른 논리적 일관성(2점) 그리고 어휘 및 문장의 정확성과 효율성에 따른 표현력(2점)을 채점기준으로 하였다. 자료 제시형의 수리논술형 문제의 채점에서는 이해분석력(4점), 논리력(6점), 표현력(2점)을 채점기준으로 하였다. 자료 제시형의 수리논술형 문제에서 이해분석력은 단독 과제형의 수리논술형 문제의 채점에서와 달리 문제에서 요구하는 것뿐만 아니라 주어진 자료를 어느 정도 이해하고 문제 해결에 활용하는지에 대한 부분도 채점기준에 포함하였다.

수리논술형 문제의 채점에 대한 신뢰도를 높이기 위해 연구자를 포함한 현장 교사 3명의 채점자를 선정하고 채점자간 신뢰도를 산출하였다. 본 연구자를 제외한 채점자는 대학과 대학원에서 초등수학교육을 전공한 교육경력 6년의 여교사들이다. 검사지에 대한 채점은 상호 독립적으로 이루어졌으며 채점자간 신뢰도 검증은 SPSS 12.0을 활용하여 Pearson 상관계수를 구하였으며 그 결과는 <표 6>과 같다. 채점자간 신뢰도는 모두 $p < .01$ 수준에서 유의한 것으로 나타났다. 이를 통해 채점자간 신뢰성이 있는 것으로 분석된다.

<표 6> 3명의 채점자간 신뢰도 검증

	채점자1	채점자2
채점자2	.791	
채점자3	.816	.775

$p < .01$

한편, 학생들이 개별적으로 문제를 해결한 후 4명을 한 모둠으로 하여 모둠원 간의 수학적 의사소통 과정을 비디오로 녹화하여 트랜스크립트를 작성하고 모둠 활동에서 나타난 수학적 정당화 유형을 대표적인 에피소드를 중심으로 분석하였다.

IV. 연구 결과

1. 수리논술형 문제의 유형에 따른 문제해결력 분석

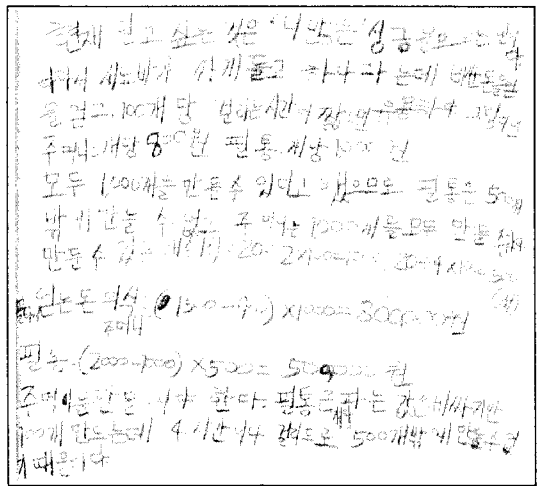
가. 단독 과제형 문제에 대한 문제해결력 분석

본 연구를 통해 알아본 단독 과제형의 수리논술형 문제에 대한 16명 학생들의 결과 분석은 <표 7>과 같다.

<표 7> 단독 과제형 문제에 대한 결과 분석

문항 번호	정답 (명)	오답 (명)	이해분석력 (2점)	논리력(6점)		표현력 (2점)	총점 (10점)
				적절성(4)	일관성(2)		
1-(1)	15	1	2	3.33	1.67	1.27	8.27
2-(1)	10	6	2	3.2	1.9	1.8	8.9
3-(1)	13	3	1.69	2.62	1.62	1.46	7.39
4-(1)	11	5	2	3.09	2	1.36	8.45
5-(1)	10	6	1.8	3	1.9	1.6	8.3
6-(1)	11	5	2	3.09	2	1.64	8.73
7-(1)	12	4	2	3	2	1.58	8.58

<표 7>에서의 각 문항별 점수는 이해분석력, 논리력 그리고 표현력의 채점기준에 의거하여 정답자들 점수의 평균값을 나타낸 것이다. 정답자들은 전반적으로 3-(1)을 제외한 문항에서는 출제도도를 파악하고 구하고자 하는 것이 무엇인지를 알고 주어진 조건에 맞게 문제를 해결한 것으로 나타났다. 문제해결 과정에서 적절한 근거를 제시하고 논리적인 일관성을 가지는 논리력에서는 자신이 배운 수학적 기본 개념을 제시문의 내용과 연관지어 문제를 해결하였다(<그림 1> 참조).



<그림 1> 단독 과제형 문제에서 높은 점수의 예

그러나 적절한 논거를 충분히 제시하지 못하거나 문제해결 과정을 명확하게 입증하기 보다는 직관적인 생각을 서술하여 감점의 요인이 되었다. 또한, 논리적 일관성을 지키지 못하여 논점에서 빗나간 경우도 있었다. 문장의 연결성 및 자연스러운 문장으로 서술하는 표현력에서는 매끄럽지 않은 문장이나 부적절한 용어 및 서술 과정에서 오류 등이 다소 나타났다. 이는 연구 대상의 학생들이 평소에 접해보지 못한 문제의 형태여서 자신의 생각을 주어진 시간 동안 나타내는데 어려움이 있었던 것으로 분석된다. 각 문항별 오답자들 중 대다수는 문제가 요구하는 바를 정확하게 이해하지 못했거나 문제의 본질에 초점을 맞추지 못했다. 또, 용어 및 기본 개념 등을 혼동하여 문제를 해결하는 경향을 보였다.

지면의 한계상 단독 과제형 중 가장 낮은 점수를 보인 3-(1)의 문제를 분석하여 그 원인이 무엇인지 살펴보고, 다양한 표현이 나타난 5-(1) 문제를 통해 단독 과제형 문제에 대한 자세한 문제해결력을 살펴보고자 한다.

우선, 3-(1)은 둘레의 길이와 넓이의 관계 이해에 대한 문항으로 5-나 단계까지의 수학에서 배운 여러 가지 도형들의 둘레의 길이와 넓이의 개념을 알고 그것의 관계를 해석하는 문제이다. 연구 대상 16명 중 정답자는 13명이고 오답자는 3명이었다.

둘레의 길이가 같고 넓이가 같아야 한다
 직사각형의 넓이를 구하는 방법은 (가로+세로) x 2이다
 즉, 둘레가 같을 때 가로와 세로가 같아야 넓이가 같아진다
 즉, 정사각형이다
 정사각형의 둘레는 12cm이면 넓이는 9cm²이다
 직사각형의 둘레는 12cm이면 넓이는 8cm²이다
 둘레가 같아도 넓이가 다를 수 있다
 둘레가 같아도 넓이가 다를 수 있다
 둘레가 같아도 넓이가 다를 수 있다
 둘레가 같아도 넓이가 다를 수 있다

<직사각형으로 반례 제시>

<그림 2> 둘레의 길이와 넓이의 관계 이해에 대한 정답

정답자 모두는 반례를 제시하여 논제에서 주장하는 것이 옳지 않음을 증명하였다. 즉, 둘레의 길이가 같은 두 도형을 제시하고 그것의 넓이를 구하여 그 값을 비교하였다. 대부분의 학생들은 <그림 2>와 같이 직사각형과 정사각형을 예로 들었는데, 이는 직사각형이 실생활에서 많이 볼 수 있는 도형일 뿐만 아니라 5-가 단계에서 다른 도형의 넓이를 구하기 위해 직사각형을 많이 이용하였기 때문으로 유추된다.

그러나 <그림 3>에 제시된 예와 같이 정답 중 여러 가지 이유로 감점을 받는 경우가 생겼다.

가와 세는 둘레의 길이가 같다
 하지만 넓이는 한눈에 봐도
 마름모꼴만 정사각형이
 넓이가 더 크다

<논거 부족으로 인한 논리력 감점>

둘레의 길이
 - 14cm
 넓이
 - 4x4=16cm²

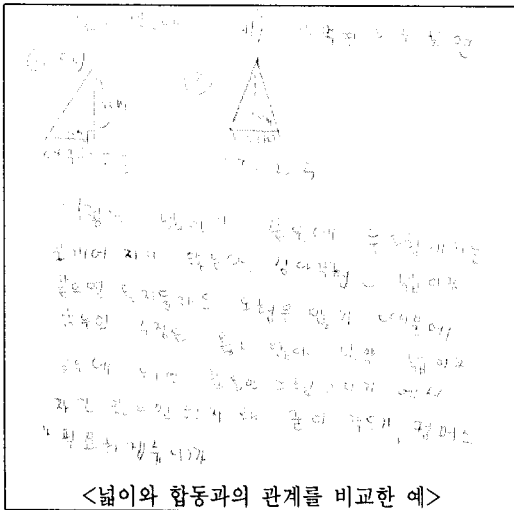
둘레의 길이
 - 14cm
 넓이
 - 7x2=14cm²

<예의 오류로 인한 논리력 감점>

<그림 3> 둘레의 길이와 넓이의 관계 이해에 대한 정답 중 감점의 예

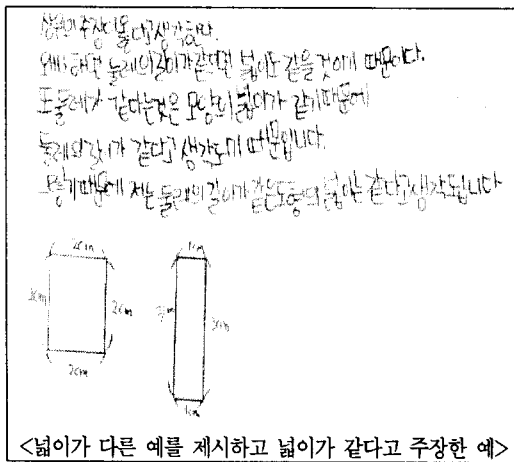
<그림 3>의 첫 번째 답은 다른 학생들과 달리 한 변의 길이가 같은 마름모와 정사각형을 제시하였다는 점은 두 도형의 특징을 잘 활용한 예라고 볼 수 있다. 마름모와 정사각형이 '네 변의 길이가 모두 같다'는 공통적인 성질을 갖는 것을 활용하여 둘레의 길이가 같으나 넓이가 같지 않은 반례를 제시한 것으로 분석된다. 그러나 해결과정에서 둘레의 길이가 같음을 명확히 제시하였으나, 넓이를 구하지 않고 그림으로 제시하여 짐작만으로 문제를 해결하였다. 이는 논리력의 논거의 적절성에서 명확한 논거가 부족하므로 감점 처리 하였다. 또, <그림 3>의 두 번째 답에서는 둘레의 길이가 같은 직사각형과 정사각형, 직사각형과 삼각형을 예로 들어 반례를 제시하였다. 각기 다른 도형을 비교하여 논거로 제시한 점은 다양한 경우를 통해 자신의 주장을 견고히 하고자 한 것으로 생각된다. 직사각형과 정사각형의 예는 그림과 설명이 모두 논리적이었으나, 직사각형과 삼각형을 예로 든 그림에서 삼각형의 세 변의 길이를 3, 4, 7로 적어 삼각형이 성립하지 않는 예를 제시하였기에 논거의 적절성에 감점 처리 하였다.

또, 답은 '옳지 않다'라고 서술하였으나, <그림 4>와 같이 문제를 잘못 이해하여 넓이가 같은 다른 형태의 두 삼각형을 비교하여 넓이와 합동의 관계에 대해 서술한 경우와 하나의 도형을 두 개 그려 둘레의 길이와 넓이가 같은 경우로 논제를 이해하여 서술한 경우는 자신의 생각에 대한 논리력은 있으나, 논제를 바르게 해석하지 못하여 논점에서 벗어났으므로 0점으로 채점하였다.



<그림 4> 둘레의 길이와 넓이의 관계 이해에 대한 논제 이해 부족의 예

오답에는 <그림 5>와 같이 둘레의 길이가 같고 넓이가 서로 다른 두 도형을 예로 제시하였으나, 실제로 넓이를 구하지 않고 짐작으로 넓이가 같다고 주장하였고, 똑같은 도형을 예로 제시하여 둘레의 길이와 넓이가 같다고 주장한 경우가 있었다. 이는 문제를 제대로 파악하지 않고 성급하게 판단하여 자신의 논리에 맞지 않게 전개한 것으로 분석된다.



<그림 5> 둘레의 길이와 넓이의 관계 이해에 대한 오답

다음으로, 5-(1)은 최대공약수와 최소공배수에 대한 문제인데, 16명의 연구 대상 중 정답자는 10명이고 오답자는 6명이었다. 첫 번째 소항목에 대한 정답은 <그림 6>에서와 같이 최대공약수를 공약수 중 가장 큰 수로, 최소공배수를 공배수 중 가장 작은 수로 용어의 뜻을 정확히 설명하였다. 그에 대한 예는 12와 3과 같이 두 수를 제시하고 두 수의 약(배)수를 나열하고 공약(배)수에서 최대공약수(최소공배수)를 찾아내는 경우와 알고리즘을 이용하여 문제를 해결한 경우가 있었다. 두 경우 모두 논리적으로 명확하게 표현한 사례라 할 수 있다.

최대공약수, 공약수, 세를 큰공, 최소공배수, 공배수, 세를 작은공

12와 3의 약수	12와 3의 배수
1, 2, 3, 4, 6, 12	12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ...
공약수: 1, 3	공배수: 12, 24, 36, 48, ...
최대공약수: 3	최소공배수: 12

최대공약수는 두수의 공약수중 세를 큰것을 의미하고
최소공배수는 두수의 공배수중 세를 작은것을 의미한다.

<나열하여 찾기>

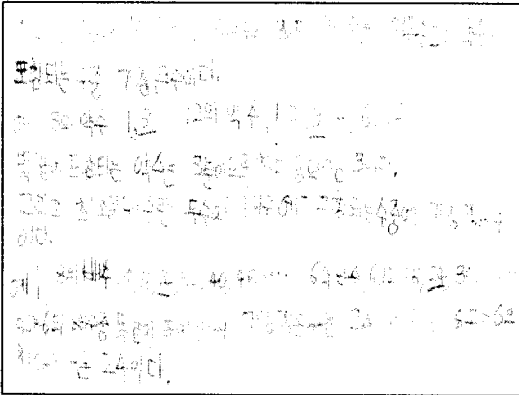
공약수를 찾을 때 공통된 약수이다. 약수 중에서 가장 큰 수인데 12와 3의 최대공약수를 구하려면 12의 약수 1, 2, 3, 4, 6, 12와 3의 약수 1, 3을 비교하면 공통된 수인 1, 3이 공약수이다. 이 중 가장 큰 수인 3이 최대공약수이다.

공배수를 구하려면 12의 배수 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ...와 3의 배수 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, ...를 비교하면 공통된 수인 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ...가 공배수이다. 이 중 가장 작은 수인 12가 최소공배수라고 한다.

<알고리즘 이용하기>

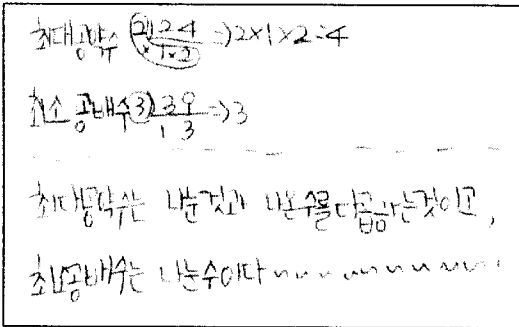
<그림 6> 최대공약수와 최소공배수의 의미 이해에 대한 정답

한편 <그림 7>에서는 3과 12를 예로 들어 3의 약수 1, 3과 12의 약수 1, 2, 3, 4, 6, 12를 찾아 공약수와 최대공약수의 의미를 설명하였다. 그러나 공약수를 구하는 과정에서 3과 12의 공약수를 3으로만 제시하여 오류를 범하였으므로 논리력 중 논거의 적절성에서 감점 처리 하였다.



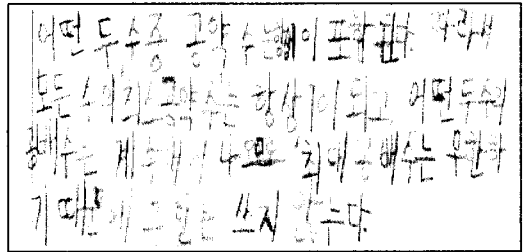
<그림 7> 최대공약수와 최소공배수의 의미 이해에 대한 정답 중 감점의 예

반면 오답에는 최대공약수와 최소공배수의 개념을 제대로 이해하지 못한 경우가 많았다. <그림 8>에서는 2와 4를 예로 들어 최대공약수를 구하고, 3과 9를 예로 들어 최소공배수를 구하였다. 그러나 최대공약수를 '나눈 것과 (나누어) 나온 수를 다 곱한 것', 최소공배수를 '나눈 수'로 설명하고 있다. 최대공약수와 최소공배수의 개념을 반대로 이해하고 있다.



<그림 8> 최대공약수와 최소공배수의 의미 이해에 대한 오답

두 번째 소항목에 대한 정답으로는 <그림 9>와 같이 최소공약수는 항상 1이기 때문에 쓰지 않고, 최대공배수는 수가 한정되어 있지 않고 무한하므로 쓰지 않는다고 서술하였다. 최소공약수와 최대공배수라는 말이 교과서에 나오지 않고 생소한 용어지만 최대, 최소, 공배수, 공약수의 의미를 이해하고 이를 각각 조합함으로써 새로운 용어에 대한 의미를 설명하였다.



<그림 9> 최소공약수와 최대공배수의 의미 유추에 대한 정답

그러나 용어의 의미를 제대로 이해하지 못하고, 최소공약수를 구하는 과정에서 자연수의 범위를 넘어서서 소수로 계산하는 오류를 범하여 무한한 것으로 설명한 것과 구체적인 논거를 제시하지 않고 막연한 생각만을 제시한 경우는 오답으로 처리하였다.

나. 자료 제시형 문제에 대한 문제해결력 분석

본 연구를 통해 알아본 자료 제시형의 수리논술형 문제에 대한 학생들의 결과 분석은 <표 8>과 같다.

<표 8> 자료 제시형 문제에 대한 결과 분석

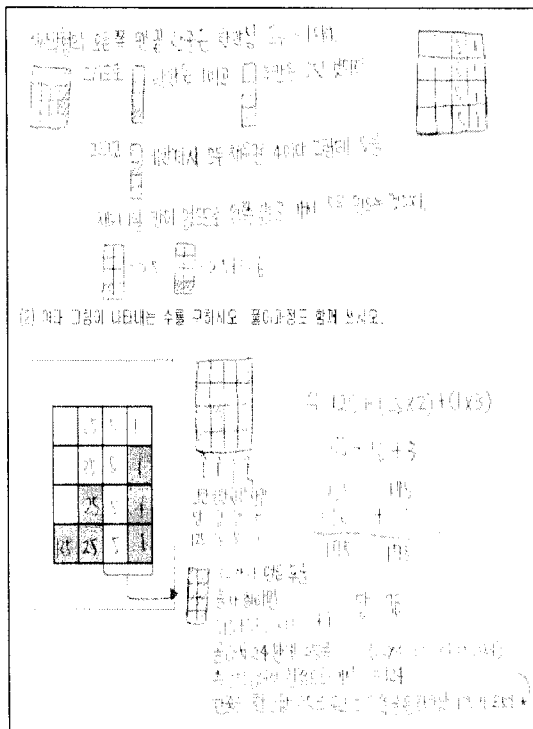
문항 번호	정답 (명)	오답 (명)	이해분석력(4점)		논리력(6점)		표현력 (2점)	총점 (12점)
			논제이해 (2)	자료이해 (2)	적절성 (4)	일관성 (2)		
1-(2)	15	1	2	1.66	1.87	1.80	1.45	8.78
2-(2)	12	4	2	2	3.17	1.58	1.83	10.58
3-(2)	12	4	1.92	1.25	2.17	1.92	1.5	8.76
4-(2)	12	4	2	2	2.17	1.75	1.25	9.17
5-(2)	13	3	2	2	3.69	1.92	1.54	11.15
6-(2)	9	7	2	2	3.2	2	1.7	10.9
7-(2)	10	6	2	2	3	2	1.6	10.6

각 문항별 점수는 이해분석력, 논리력 그리고 표현력의 채점기준에 의거하여 정답자들의 점수의 평균값을 나타낸 것이다. 정답자들의 문제해결에 따른 전반적인 경향은 단독 과제형의 수리논술형 문제와 달리 자료의 이해 여부에 따라서 채점 결과가 달랐다. 정답자 중 자료의 내용을 올바르게 분석하였을 경우 점수가 높은 반면 자료의 내용 일부분을 올바르게 분석하지 못하였을 때에는 대체로 문제해결의 방향이 달라지거나 적절한 논거를 제시하지 못하였다. 표현력에서는 단독 과제형의 수리는

술형 문제와 마찬가지로 문장의 연결이 자연스럽게 못한 경우가 많았으며 수학적 용어를 혼동하여 사용하기도 하였다.

<그림 10>에서와 같이 논제와 문제에 주어진 자료에 대한 이해가 충분하여 타당한 논거를 제시하여 단계별로 자세히 풀이과정을 서술하였다. 또한 각각의 그림을 통해 자신의 논거를 더욱 견고히 하며 작은 정사각형의 위치에 따라 1, 5, 25, 125가 되는 이유를 자세히 서술하였다. 이처럼 다양한 형태로 문제를 해결하였음을 알 수 있다.

자료 제시형 중 가장 낮은 점수를 보인 3-(2) 문제를 분석하여 그 원인이 무엇인지 살펴보고, 다양한 반응이 나타난 4-(2) 문제를 통해 자료 제시형 문제에 대한 자세한 문제해결력을 살펴보고자 한다.

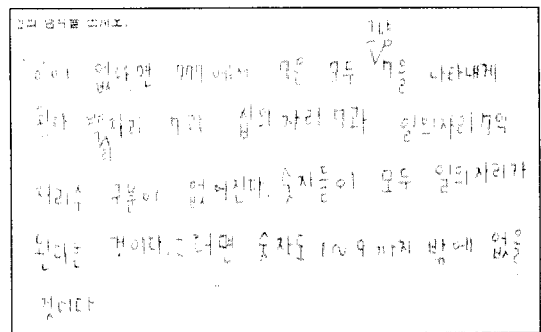


<그림 10> 자료 제시형 문제에서 높은 점수의 예

3-(2)는 '0'의 의미에 관한 문제이다. 문제에 주어진 이야기 자료를 분석하여 '0'의 쓰임을 이해하였는지, 십

진기수법과 자릿값에 대한 의미를 알고 '0'이 없다면 어떻게 되는지 구체적인 예를 들어 설명할 수 있는지를 알고자 하였다. 16명의 연구 대상 중 정답자는 12명이고 오답자는 4명이었다. 오답자들은 문제에서 주어진 자료를 바탕으로 하여 해결하도록 하였으나, 이에 대한 언급이 없이 서술하였다.

정답자 대부분은 주어진 이야기 자료를 올바르게 이해하고 '0'이 십진기수법에서 어떤 역할을 하는지를 제시하여 구체적인 예를 들어 자신의 생각을 서술하였다. <그림 11>에서 777의 각각의 7이 가지는 의미를 자릿값과 관련지어 설명하고 있다. 백의 자리, 십의 자리 그리고 일의 자리의 의미를 가지는데 '0'이 없으면 자리수의 구분이 없어질 수 있다고 서술하였다.

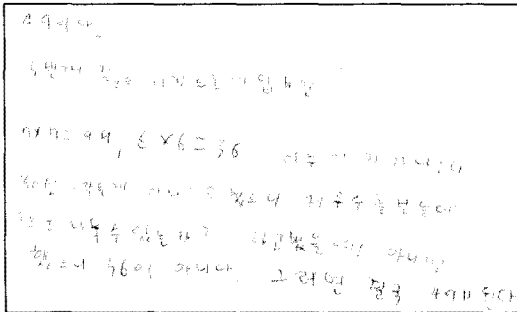


<그림 11> 십진기수법에서의 '0'의 의미 이해에 대한 정답 중 자릿값의 이해

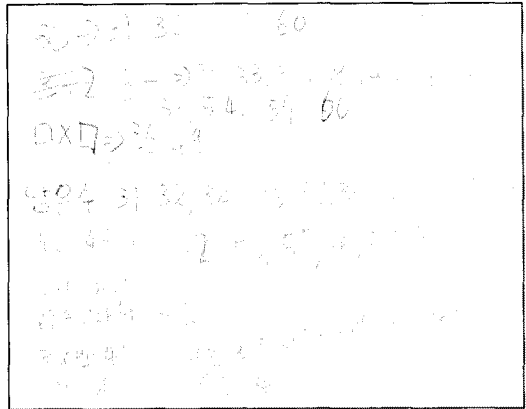
십진기수법을 사용하는 상황에서 '0'이 없다면 자릿값을 나타내는데 어려움을 겪을 것이다. 이에 대해 학생들은 여러 가지 상황을 제시하였다. <그림 12>가 그 예이다. 먼저, 자릿값을 표현하기 위해 자리에 따라 숫자의 크기를 달리 하는 방법을 제시하였다. 자릿값에 따라 숫자의 크기를 정하여 쓸 수 있으나 크기에 신경을 써야 하는 불편함과 사용할 때 실수가 많은 것이라고 설명하였다. 그리고 308을 표현하기 위해 3 8로 나타내는 방법을 제시하였으나, 이처럼 '0'이 없으면 3 8이 38과 구별하기가 어려워 수를 전달하는데 많은 오류가 생길 수 있음을 예를 들어 설명하였다. 이러한 예는 모두 십진기수법에서의 '0'이 자릿값을 의미함을 이해하고 있으며, 논거가 타당하다고 볼 수 있다.

17, 19, 20, 22, 23, 26, 28, 29로 조건을 만족하는 경우의 수가 많아서 단 한 가지라는 조건에 위배된다. 두 번째 질문이 거짓일 경우도 조건을 만족하는 경우의 수가 많아서 문제의 조건에 모두 부합되지 못한다. 세 번째 질문이 거짓일 경우는 모든 조건을 만족하는 수가 49가 되므로 답은 49이다. 이처럼 문제해결 과정이 잘 나타나 있으며, 논거가 타당하고 문장의 연결이 자연스럽게 이어지므로 12점으로 채점하였다.

반면, <그림 15>에서는 세 가지 질문 중 세 번째 질문에 대한 경우만 제시되어 있으므로, 답은 맞으나 논거가 부족한 경우라 볼 수 있다. 그래서 논리력 중 논거의 적절성에 대해 감점 처리 하였다. 정답자 중에는 문제의 각 조건에 대해 언급한 흔적이 있으나, 명백한 서술 과정이 없어 논거 부족으로 인한 논리력 감점이 많았다. 교과서 문제의 해결 과정은 대체로 반복적이고, 간단하기 때문에 확인 과정을 생략하는 경우가 많다. 평소 문제를 풀 때 전체의 과정을 논하기 보다는 우연으로 인해 답을 구하거나, 답이 구해진 경우에 다른 경우를 따져보고 점검하는 태도가 습관화되지 않은 것이 원인일 것이다. 또한, 다른 사람들에게 자신의 문제해결 과정을 설명하는 경험이 거의 없기에 자신의 머릿 속에는 해결 과정이 그려지지만, 이것을 서술하는데 충분한 논거를 제시하지 못한 것으로 분석된다. 또한, 채점기준 중 표현력의 감점이 다소 나타났다. <그림 16>은 논리력은 있으나, 기호의 의미가 명확하지 않고, 문제해결 과정이 잘 나타나지 않으므로 표현력이 부족한 경우라 볼 수 있다. 세 번째 질문이 거짓인 경우를 해결하는 과정이나, 그 설명이 분명하지 못하고 문장의 연결이 매끄럽지 않다.

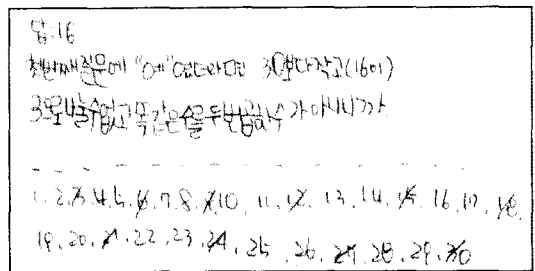


<그림 15> 조건에 알맞은 수 찾기에 대한 정답 중 논리력 감점의 예



<그림 16> 조건에 알맞은 수 찾기에 대한 정답 중 표현력 감점의 예

오답에는 문제에서 구하고자 하는 것이 무엇인지 이해하였으나, 자료에 대한 이해가 부족하였다. <그림 17>에서와 같이 문제의 조건에 맞게 경우를 나누어 구하지 않고, 한 가지 질문에 대한 경우의 수만 구하였다. 나머지 두 가지 질문이 각각 거짓일 경우에 대한 확인 과정이 전혀 없었다. 문제해결 과정에서도 자신이 제시한 조건에 만족하는 수는 여러 개이나 그 중 하나만을 찾아 그것을 정답으로 적었다. 이는 자료의 내용을 완전하게 분석하지 않고, 각 조건에 대한 경우의 수를 모두 확인해 보지 않았기 때문이다.



<그림 17> 조건에 알맞은 수 찾기에 대한 오답

2. 수리논술형 문제해결 과정에서 나타난 수학적 정당화 과정 분석

각 문항에 따라 학생들의 정당화 과정을 분석한 결과 <표 9>와 같이 나타났다.

<표 9> 문제해결 과정에서 나타난 수학적 정당화의 유형별 분석

수학적 정당화의 유형	외적 정당화		내적 정당화			계
	권위	활동	직관	경험	수학적 논리	
빈도(회)	31	8	17	32	99	187

우선 수학적 논리에 의한 정당화 유형이 가장 많았고, 다음으로 경험, 권위에 의한 정당화가 많았다. 본 연구에서 제시한 문제가 교과서 문제와 다른 형태의 문제들을 많이 포함하고 있어서 경험이나 수학적 논리에 의한 내적 정당화 과정이 많이 나타난 것으로 해석된다. 그동안 배운 것을 문제해결에 적합하게 적용해 보기도 하고 완전히 해결하지는 못하더라도 단계별로 문제해결 과정을 서술하였으며, 평소 경험했던 상황과 문제 상황을 연결하여 해결의 실마리를 찾는 과정을 볼 수 있었다.

학생들의 정당화 유형을 보다 자세히 알아보기 위해 단독 과제형과 자료 제시형의 수리논술형 문제 해결 과정에서 나타나는 정당화를 분석하였다. <표 10>은 단독 과제형에서 나타나는 수학적 정당화를 분석한 것이다.

<표 10> 단독 과제형의 수리논술형 문제해결 과정에서 나타난 수학적 정당화의 유형별 분석

문항번호	수학적 정당화의 유형	외적 정당화		내적 정당화			계
		권위	활동	직관	경험	수학적 논리	
1-(1)	3	0	1	0	6	10	
2-(1)	0	2	1	4	0	7	
3-(1)	2	2	1	2	7	14	
4-(1)	4	0	0	12	0	16	
5-(1)	5	0	0	0	8	13	
6-(1)	0	0	1	0	15	16	
7-(1)	0	0	2	4	8	14	
계	14	4	6	22	44	90	

단독 과제형의 수리논술형 문제에 대한 수학적 정당화는 <표 9>의 전반적인 경향과 유사하게 나타났다. 권위에 의한 외적 정당화와 경험 및 수학적 논리에 의한 내적 정당화 과정이 많이 나타났다. 권위에 의한 외적 정당화는 1-(1), 3-(1), 4-(1), 5-(1)에서 나타났다. '수업 시간에 배웠다', '5학년 학생이라면 누구나 그렇게 생각한다'와 같이 말함으로써 교사와 교과서의 권위에 의존

하여 정당화하는 경향이 많이 나타났다. 간혹 수학적 논리에 의한 정당화가 일부 포함되어 있다고 하더라도 권위를 의존하는 경향이 확연히 드러나면 외적 정당화로 분류하였다. 반면, 올림과 버림의 구체적인 예를 제시하는 4-(1)의 문제는 실생활과 관련시켜 서술하는 문제이므로 경험에 의한 내적 정당화가 가장 뚜렷하게 나타났다. 수학적 정당화 과정 중 수학적 논리에 의한 내적 정당화의 빈도가 가장 높았다. 특히, 6-(1)에서는 주어진 조건을 활용하여 주머니를 만들어 팔 때의 이익과 필통을 만들어 팔 때의 이익을 각각 구하여 과정을 설명하면서 연산에 의한 수학적 논리를 통해 정당화하는 과정이 나타났다.

한편, 자료 제시형에서 나타나는 수학적 정당화의 분석 결과는 <표 11>과 같다.

<표 11> 자료 제시형의 수리논술형 문제해결 과정에서 나타난 수학적 정당화의 유형별 분석

문항번호	수학적 정당화의 유형	외적 정당화		내적 정당화			계
		권위	활동	직관	경험	수학적 논리	
1-(2)	2	0	4	3	5	14	
2-(2)	0	0	0	0	15	15	
3-(2)	2	0	4	3	5	14	
4-(2)	3	1	0	4	7	15	
5-(2)	5	0	3	0	7	15	
6-(2)	2	3	0	0	7	12	
7-(2)	3	0	0	0	9	12	
계	17	4	11	10	55	97	

우선 수학적 논리에 의한 내적 정당화 과정이 가장 많이 나타났으며 권위, 경험, 직관에 의한 순서로 나타났다. 2-(2)와 7-(2)는 규칙을 찾아 적용하는 문제로 시행착오 과정을 거쳐 연산 기호 및 그림이 가지는 규칙을 찾아야 하기 때문에 수학적 논리에 의한 정당화가 주로 이루어졌다고 보인다. 예를 들어, 아래 학생의 예에서 드러나듯이 7-(2) 문제의 경우 문제에 주어진 그림 자료와 수의 관계를 찾아 색칠된 칸들이 의미하는 수가 무엇인지 단계별로 찾아내고 그 이유를 서술하였다.

이 수는 178이라고 생각합니다. 맨 왼쪽의 정사각형은 125를 나타내고 그 뒤의 정사각형은 25를 나타내어 25×2는 50입니다. 맨 오른쪽 정사각형 3개는 3을 나타내

어 $125+50+3=178$ 이 나오기 때문입니다. 왼쪽에서 두 번째 정사각형이 25가 나오는 이유는 두 줄을 모두 채워도 24까지 밖에 나오지 않기 때문에 25가 되고 맨 왼쪽 정사각형이 125가 나오는 이유는 오른쪽 세 줄을 모두 채워도 124까지 밖에 나오지 않기 때문입니다. 따라서 $125+25 \times 2+3=178$ 입니다.

한편, 4-(2)의 경우 세 가지 질문에 대한 답을 근거로 참이 되는 경우와 거짓이 되는 경우를 각각 나누어 문제의 조건을 모두 만족하는 경우를 찾아야 하므로 수학적 논리에 의한 내적 정당화 과정이 많이 나타난 것으로 분석된다. 반면, 1-(2)와 5-(2)는 그래프와 표의 내용을 분석하는 문제로 공식이나 알고리즘에 의한 해결이 어렵기 때문에 자료 그대로 이해하고 그것을 바탕으로 자신의 답을 서술한 것으로 보인다.

V. 결론

본 연구는 수학교과형 문제를 중심으로 단독 과제형과 자료 제시형이라는 두 가지 유형의 수리논술형 문제를 개발하고 이를 통해 초등학교 5학년 학생들의 문제해결력과 수학적 정당화 과정을 분석한 것이다.

단독 과제형의 수리논술형 문제에서는 논제의 이해 정도에 따른 이해분석력은 높았으나 논거의 타당성에 따른 논리력과 표현력이 다소 낮은 것으로 나타났다. 이는 무엇보다도 기존의 평가 문항과 다른 형태의 문제들로 인해 익숙하지 않은 것이 원인이라고 볼 수도 있으나, 다른 한 편으로 학생들이 무엇을 설명해야 하는지, 자신의 풀이 과정에서 무엇이 수학적으로 중요하고 가치있는 것인지에 대한 이해가 부족하기 때문으로 판단된다. 그러므로 학생들이 평상시의 수학 시간에 타당하고 충분한 논거를 바탕으로 논리적인 비약을 범하지 않도록 발표하거나 기술해 보는 경험이 필요하다.

또한, 많은 학생들은 문제를 해결하는 과정에서 수학 용어를 사용하기 보다는 일상 용어를 많이 사용하였고, 수학 용어를 혼동하여 사용하거나 부적절하게 사용하는 경우가 있었다. 따라서 동일한 용어를 사용하지만 일상 생활에서의 의미와 수학적 의미가 다른 경우, 이에 대한 비교 설명을 강화할 필요가 있겠고, 적절한 수학 용어나

기호를 사용해서 표현하는 것을 강조해야 한다.

자료 제시형의 수리논술형 문제에서는 자료의 내용을 올바르게 분석하였는가에 따라 정답의 여부가 결정되는 경우가 많았다. 이 유형은 단독 과제형과 달리 문제에 제시된 이야기, 도표 및 그림을 바탕으로 주어진 조건에 맞게 문제를 해결하는 것이다. 정답자 중 자료의 내용을 올바르게 분석하여 자료의 이해 점수가 높은 경우 문항의 점수가 높은 반면 자료의 일부 내용을 제대로 분석하지 못하였을 때에는 상대적으로 낮은 점수를 얻었다. 이는 자료의 내용을 올바르게 분석하지 못하면 적절한 논거를 제시하지 못할 뿐만 아니라 문제해결의 방향도 달라질 수 있기 때문으로 판단된다.

한편, 수리논술형 문제해결 과정에서 나타난 수학적 정당화 과정은 문제의 성격에 따라 외적 정당화와 내적 정당화가 다소 다르게 나타났지만, 전반적으로 교과서와 교사의 말에 근거를 둔 권위에 의한 외적 정당화보다 생활 속에서의 자신의 경험을 근거로 제시하거나 연역적 추론 및 단계별로 수학적 논리에 의한 정당화 과정이 많이 나타났다. 이는 개념을 이해하고 이미 배운 지식을 활용하여 새로운 상황에 적용하는 개념형, 탐구형 과제가 직관, 경험 및 수학적 논리에 의한 내적 정당화를 더욱 촉진한다는 이미연(2007)의 연구 결과와 부합된다. 특히, 본 연구에서 단독 과제형과 자료 제시형에서 모두 공통적으로 수학적 논리에 의한 정당화가 가장 높게(대략적으로 전체의 50%) 나타났다는 점은 매우 고무적이라고 생각된다. 이런 측면에서 초등학교에서 수리논술형 문항을 적절히 개발하여 적용한다면 최근 수학교육에서 강조되는 수학적 사고력 및 의사소통 능력을 향상시키는 데 기여할 수 있을 것으로 판단된다.

최근 서술형·논술형 평가에 대한 관심이 고조됨에도 불구하고 막상 초등학교 수준에서 참고할 만한 구체적인 평가 문항이나 평가 기준, 그리고 실제 평가 결과에 대한 연구가 미비하다는 점을 감안해 볼 때, 본 연구의 결과는 부족하지만 경험적인 근거를 제공해 줄 수 있을 것으로 기대된다.

참고 문헌

경기도교육청 (2006). 논술적무연수 교재(1).

- 경상북도교육청 (2006). 통합논술 어떻게 가르칠 것인가. 교육부 (1997). 수학과 교육과정, 서울 : 대한교과서 주식회사.
- 교육인적자원부 (2006). 수학과 교육과정-교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책8]. 서울 : 대한교과서 주식회사.
- 권성룡 (2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 7(2), pp.85-99.
- 김남준 (2006). 서술형 평가가 초등학생의 수학적 성향에 미치는 영향 연구. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 김동희 (2006). 초등수학교육에서 서술형 수행평가 방법의 학업성취도 및 흥미와 자기 주도적 학습력에 미치는 영향. 고려대학교 대학원 석사학위논문.
- 노영순 · 류춘식 (2001). 수행평가방법 중 서술형 평가를 적용한 학습이 학력신장에 미치는 영향-고등학교 공통수학을 중심으로. 한국학교수학논문집, 4(1), pp.125-136.
- 류희찬 · 김진규 · 김찬종 · 임형 · 박미숙 (1998). 초등학교 고학년 수학과 수행평가 문항개발연구. 철암수학교육, 7, pp.85-141.
- 박도순 · 홍후조 (2006). 교육과정과 교육평가. 서울 : 문음사.
- 서울특별시교육청 (2006). 논술교육 역량 강화를 위한 중등교사 연수 자료집.
- 이미연 (2007). 수학적 과제 유형이 수학적 의사소통에 미치는 영향. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 이종희 · 김선희 · 박선옥 · 최승현 (2000). 수학적 의사소통 능력 신장을 위한 학습-지도 방안. 한국교원대학교 부설 교과교육공동연구소 (연구보고 RR 2000-VI-12).
- 조한혁 (2006). 논술작성 및 첨삭 실습 세미나: 논술지도 교사 직무연수 자료집. 서울특별시연수원.
- 한국대학교육협의회 대학진학정보센터 홈페이지 (2008) : <http://univ.kcue.or.kr>.
- Chiu, M. M. (1996). *Building mathematical understanding during collaboration: Students' learning functions and graphs in an urban public high school*. Doctorial dissertation, Univ. of California, Berkeley.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Types of student's justifications. *Mathematics Teacher*, 91(8), pp.670-675.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.
- _____ (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.
- _____ (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙 공역 (2007). 학교수학을 위한 원리와 표준. 경문사.
- Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for All or for some? In National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (Ed.). *Development in school mathematics education around the world: Proceedings of the UCSMP international conference on mathematics education* (pp 117-136). Reston, VA: NCTM.

An Analysis of Problem-solving Ability and Mathematical Justification of Mathematical Essay Problems of 5th Grade Students in Elementary School

YoungSook Kim

Busan Myeong-ryun Elementary School
Myeongryun-dong, Dongrea-gu, Busan 607-804, Korea
E-mail: kys1325@hanmail.net

JeongSuk Pang

Korea National University of Education
Gangnae-myeon, Cheongwon-gun, Chung-buk 363-791, Korea
E-mail: jeongsuk@knue.ac.kr


This study was aimed to examine problem-solving ability of fifth graders on two types of mathematical essay problems, and to analyze the process of mathematical justification in solving the essay problems. For this purpose, a total of 14 mathematical essay problems were developed, in which half of the items were single tasks and the other half were data-provided tasks. Sixteen students with higher academic achievements in mathematics and the Korean language were chosen, and were given to solve the mathematical essay problems individually. They then were asked to justify their solution methods in groups of 4 and to reach a consensus through negotiation among group members. Students were good at understanding the given single tasks but they often revealed lack of logical thinking and representation. They also tended to use everyday language rather than mathematical language in explaining their solution processes. Some students experienced difficulty in understanding the meaning of data in the essay problems. With regard to mathematical justification, students employed more internal justification by experience or mathematical logic than external justification by authority. Given this, this paper includes implications for teachers on how they need to teach mathematics in order to foster students' logical thinking and communication.

* ZDM Classification : C33

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

* Key Words : mathematical essay problems, problem solving ability, mathematical justification

<부록> 본 검사지의 일부

<p>1-(1)</p> <p>1-(1) 다음의 삼고 그릇을 판단하고 별 그릇에 생각한지 이유를 쓰시오.</p> <p>직사각형은 평행사변형이다.</p>	<p>2-(1)</p> <p>2-(1) 다음 내용을 보고 누구의 말이 옳는지 판단하시오. 별 그릇에 생각한지 이유를 써서 설명하시오.</p> <p>만경이는 어떤 피자의 $\frac{1}{2}$ 을 먹었다. 동영이는 다른 피자의 $\frac{1}{3}$ 을 먹었다.</p> 	<p>3-(1)</p> <p>3-(1) 삼우의 주황이 옳는지 판단하고 별 그릇에 생각한지 이유를 쓰시오.</p> <p>삼우 : 둘레의 길이가 같은 도형의 넓이는 같아.</p>
<p>4-(1)</p> <p>4-(1) 동일한 구형의 자갈의 무게 수를 몰라서 나타내는 방법을 말한다. 바깥이만 구형의 자갈의 무게 수를 바깥서 나타내는 방법을 말한다. 우리의 생활 국 상황에서는 무게를 세어 볼 때와 바깥을 세어 볼 때가 있다. 용량과 무게를 세어 하는 구체적인 예를 들고 그 각각의 예에서 볼 용량이나 무게를 산정했는지 설명을 쓰시오.</p> <p>예를</p> <p>바깥</p>	<p>5-(1)</p> <p>5-(1) 연수의 배수를 공부하면서 최대공약수와 최소공배수를 배웠다. 예를 들어 최 대공약수인 최소공배수의 의미를 구명하여 설명하시오.</p> <p>그런데, 최소공약수와 최대공배수는 같은 수지 아니냐. 그 이유가 무엇인지 설명하시오.</p>	<p>6-(1)</p> <p>6-(1) 뱀님네 반 학생들이 방수 이옷을 쓰기 위해 학교 아문머리를 찾았다. 개 안의 의자는 50인상을 만들어 팔자는 것과 팔자를 만들어 팔자는 것이었다. 모두 1000개를 팔 수 있고 주머니는 1500원, 팔자는 500원씩 팔 수 있다. 50인상을 만드는 데에는 재료비가 700원이 들고, 팔자는 100원이 든다. 그런데 상금을 오기 위해 팔자는 팔 때까지 만들 수 있는 시간은 20시간 밖에 남지 않았다. 50인상은 100개를 만드는 데에 2시간이 걸리고 팔자는 100개를 만드는 데에 4시간이 걸린다.</p> <p>디 많은 상금을 오르기 위해 어떤 것을 만들어야 하는지 이유를 써서 설명하시오. (여러 조건들을 근거로 하여 답을 쓰시오.)</p>

