韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2009. 05. 제 48권, 제 2호, 113-139.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2009, Vol. 48, No. 2, 113-139.

발견을 통한 순열과 조합 지도방안 연구

김 미 정 (함평여자고등학교)
김 용 구 (전남대학교)
정 인 철 (고려대학교)

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학생들은 교육과정 외에서 비형식적 수학지식을 자주 경험하며, 비형식적 수학지식을 수학이라고 인식하지 못하기도 한다. 김진호(2002)는 비형식적 수학 지식과 상반된 개념으로 학교에서 다루어지는 계통적이고 연역적인 수학을 '학교수학'이라고 하면서 '학교수학'은 비형식적 선행지식을 필요로 한다고 했다.

한편 순열과 조합에서 사용되는 '수'는 농도수이며 경우의 수의 형식화 과정에서 묶음 모델이 주로 활용된다는 것을 알 수 있다(고영미 · 이상욱, 2004). 여기에서 농도수란 집합 사이의 일대일 대응 관계로 수의 개념을 인식하는 것을 말한다(Freudenthal, 1983). 또한 수세기 형식화의 관점에서 보았을 때 '카드 12개를 3개씩 묶었다. 모두 몇 묶음인가?'와 같은 측정 나눗셈 개념이 순열과 조합 단원에서 자주 쓰임을 알 수 있다(황우형 · 김경미, 2008). 이처럼 순열과 조합에서는 학생들의 수세기에 대한 비형식적 선행지식을 요구하고 있으며 비형식적 지식의 자연스러운 형식화를 위해서 순열과 조합에서 사용할 수 있는 교수 · 학습법에 대한 관심이 필요하다. 이에 본고에서는 발견학습법을 순열과 조합에 적용해 보고 발견학습법의 적용이 학생에게 미치는 영향에 대하여 살펴보고자 하였다. 그렇다면 왜 발견학습법인가? 순열과 조합의 비형식적 선행지식인 '수세기'는 아동의 대표적인 비형식적 지식이다. '수세기'는 원초적이면서도 여러 가지 개념적 성질을 갖고 있다. Gelman과 Gallistel(1986)은 수세기는 타고난 수세기 방법에 대한 몇 가지 원리로부터 발달한다고 했다. 즉, 수세기에 있어서 이미 아동의 머릿속에 발달되어 있는 개념으로부터 더 발달된 새로운 개념을 형성하게 된다고 보았다. 따라서 Gelman과 Gallistel은 완전한 무(無)가 아닌 부분적 무(無)에서 학습이 시작된다고 보고 있다. 부분적 무(無)인 비형식적 지식에서 비형식적 지식을 포함한 더 발달 된 형식적 지식의 생성은 수학적 지식 형성 과정에서 자주 볼 수 있다. 이에 순열과 조합에서도 수학적 지식 형성 과정이 학생의 선행지식과 관련하여 자연스럽게 드러날 수 있는 교수 · 학습법이 필요하다. G. Polya(1973)는 이러한 교수 · 학습법의 고민에 대한 실마리를 제공해 주고 있다. Polya는 수학에서 완성된 수학과 동시에 '발생 상태 그대로의 수학'에 대해 인지하고 있었다. 완성된 수학을 어떻게 발견하게 되었는가에 대하여 관심을 가졌으며, 교사와 학생에게 완성된 수학을 발견하기 위한 행동양식을 제공하였다. 따라서 Polya는 '발생 상태 그대로의 수학'을 인정하기는 했으나 완성된 수학에 더 큰 비중을 두었다고 볼 수 있다. 따라서 순열과 조합의 문제 상황에서 Polya가 제공한 발견 전략을 사용하여 완성된 수학을 이끌어 낼 수도 있다. 그러나 순열과 조합의 지도에서 Polya의 이론만으로는 설명할 수 없는 많은 부분이 있다. 따라서 Polya의 이론을 보충해 줄 만한 다른 발견학습 이론들이 필요하다. 이에 본고에서는 Polya외에도 Vygotsky(1978), Lakatos(1991), Bruner(1960)의 발견학습에 대해 살펴보았다. 또한 이러한 발견학습법들을 순열과 조합의 학습에 적용해 보고 학생이 수학에 대한 긍정적 안목을 갖도록 하는 것이 이 연구의 목적이다.

---

* 접수일(2008년 12월 15일), 수정일(1차 : 2009년 2월 6일), 게재확정일(2009년 5월 8일)
* ZDM분류 : K24
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 발견학습법, 발견술, 발문

2. 용어의 정의

(1) 발견술 : Polya에 의하면 발견술은 흔히 대략적으로 서술되어 있을 뿐 상세하게 제시되어 있지 않은 연구 분야의 명칭으로, 그 목표는 발견과 발명의 방법과 규칙을 연구하는 것이라고 했다. 또한 숀펠드(Alan H. Schoenfeld)에 의하면 발견술은 익숙하지 않거나 비표준적인 문제 해결에 도움이 되는 전략 또는 테크닉을 의미한다(김연식 · 우정호 · 박영배 · 박교식, 2001). 본고에서는 숀펠드의 정의를 따르기로 한다.

(2) 발문 : 발문이란 언어 상호 과정의 한 형태인 문답법에 있어서 '제기되는 의문'을 가리키는 것으로 질문과 거의 같은 뜻으로 사용되고 있다. 질문의 경우에는 하나의 정답이 얻어지면 그것으로 족하는 경우도 있지만, 발문은 거기에서 나아가 상대방에게 어떤 사고 활동이 일어났는가가 문제시 된다. 즉, 발문에 의해 학습자가 의식하고 있지 않았던 것에 대하여 문제의식을 갖게 한다든가, 사고활동을 유발한다든가, 표현활동을 유발하는데 그 본질이 있다. 그래서 발문이란 '학습자의 사고활동을 유발시켜주기 위한 문제 제기'라고 정의할 수 있다(정수현, 2007).

Ⅱ. 이론적 배경

1. 발견학습

발견 교수법에 대한 연구는 연역적 · 합리주의적 수학관의 비판을 통해서 이루어졌다. 연역적 · 합리적 수학관은 수학의 학습을 통해 발견능력 및 비판능력을 기르고, 고등 정신능력을 습득하는데 방해가 되므로 새로운 수학관이 필요하게 되었다. 이에, Lakatos(1976), Polya(1973) 등은 연역적 · 합리주의적 수학관에 반하는 수학관을 가지고 수학 교수 · 학습에 대한 연구를 했다. Polya는 추측을 통한 문제해결 방법을 제시했고, Lakatos는 추측에 근거한 '비판적 오류주의적 수학 인식론을 통한 교수법'을 연구했다. Lakatos는 수학은 증명과 반박을 통해 성장해 간다는 논리를 펼쳤으며 이러한 논리는 발견술과 증명 및 지식의 합리성에 대한 새로운 관점을 요구했다.

발견학습에 대한 연구는 Polya와 Lakatos 이외의 다른 학자들에 의해서도 꾸준히 진행되었으며, 이들의 미묘한 의견차는 발견술에 대한 차이로 나타났다. Polya의 발견술이 참인 추측, 곧 문제의 개연적인 해를 발견하는 것이었다면 Lakatos의 발견술은 추측과 더불어 시작하며 비판적 활동을 통하여 추측을 반박하고 반박된 추측을 개선하는 것이었다.

한편, 강옥기(2004)는 발견학습의 관점을 크게 두 가지로 분류하고 있다. 하나는 발견의 과정을 학습하게 하는데 중점을 두는 것이고, 다른 하나는 발견의 결과를 학습하게 하는데 중점을 두는 것이었다. 발견의 과정에 중점을 둔 학습은 발견의 방법, 즉 발견을 위한 전략의 학습에 중점을 둔다. Bruner와 Polya는 발견의 과정에 중점을 둔 발견학습 이론을 전개한 대표적 학자이다. 발견학습의 또 다른 관점은 지도하고자 하는 수학적 원리나 법칙을 학생이 어떻게 활동함으로써 발견할 수 있게 하는가, 즉 발견의 결과에 중점을 둔 것이다. 따라서, 수학적 원리나 법칙을 발견하게 하는 안내된 발견 학습이 여기에 속하며 Vygotsky, Lakatos 등의 이론이 여기에 해당된다고 할 수 있다(강옥기, 2004, pp. 101-102).

다음에서는 순열과 조합의 학습과 연관지어 발견학습에 대한 큰 흐름을 Vygotsky(1978), Polya(1973), Bruner(1960), Lakatos(1976)의 순으로 살펴보았다.

(1) Vygotsky의 ZPD(Zone of Proximal Development) 이론 속에서 교사의 역할

순열과 조합의 문제 상황은 대부분 비형식적인 것에서 출발한다. 예를 들면 '7명 중 3명을 순서대로 배열하는 경우의 수를 구하시오'에서 7명 중 3명을 순서대로 배열하는 문제 상황은 학생의 머릿속에서 수세기의 형태로 인식된다. 이러한 비형식적 문제 상황은 조건을 추가하면서 복합적 사고를 요구하는 문제로 바뀌어 간다.

> 7명을 순서대로 배열→7명을 원탁에 배열→7명 중 1명의 자리를 고정시키고 나머지를 원탁에 배열→7명 중 5명을 골라서 원탁에 배열→…→

학생이 자력으로 해결할 수 없는 문제에 직면했을 때, 교사는 학생의 학습을 돕는 조력자로서의 역할을 하게 된다. 이러한 조력자로서의 교사 역할을 강조한 이론 중

에 Vygotsky의 이론은 많은 시사점을 가지고 있다.

비고츠키(Vygotsky)의 핵심이론은 ZPD(Zone of Proximal Development)이론을 중심으로 구성되어 있다. ZPD(근접발달영역)는 잠재적 발달 수준과 실제적 발달 수준의 차이를 의미하며 실제적 발달 수준은 학생이 스스로 독립적으로 과제를 해결할 수 있는 수준을, 잠재적 발달 수준은 교사나 더 높은 수준의 학생의 도움을 받아 도달할 수 있는 수준을 의미한다. 즉, 7명을 순서대로 배열하는 문제를 풀 수 있었으나 원탁에 배열하는 문제를 풀 수 없었던 학생에게 7명을 순서대로 배열하는 문제는 실제적 발달 수준의 문제이며 원탁에 배열하는 문제는 잠재적 발달 수준의 문제이다.

Vygotsky는 ZPD를 통해 인지발달이 다음과 같은 4단계를 거쳐서 이루어진다고 했다(강정미, 2007, pp. 6-8).

• 1단계 : 보다 유능한 부모, 교사, 또래에 의한 도움
이 단계에서 아동은 독립적으로 과제를 수행할 수 없기 때문에 더 능력있는 성인이나 동료의 도움을 필요로 한다.

• 2단계 : 자신에 의한 도움
자기 자신에 의한 도움으로 과제를 수행하는 단계이다. 1단계에서는 개인 간 심리수준에서 과제 수행에 참여했던 아동이 이제 개인 내 수준에서 다른 중재자의 도움을 받지 않거나 적은 도움으로 과제를 수행할 수 있게 된다. Vygotsky가 말한 '사회적 심리간 기능과 개인적 심리 내 기능을 연결해 주는 과도기적 단계'로, 이 단계에서의 지식은 자기중심적 언어 형태를 취하게 된다.

• 3단계 : 내면화, 자동화, 화석화
과제수행이 완전히 발달되어 내면화, 자동화가 이루어진 단계이다. 이 단계에서 아동은 ZPD를 벗어나서 과제를 수행하는데 더 이상 다른 중재자나 자신으로부터 도움이 필요없이 거의 무의식적으로 과제를 수행해 낼 수 있다. 이 단계는 자기통제와 사회적 통제를 벗어난 완전한 발달 상태로 Vygotsky의 표현을 빌리자면 '발달의 열매'가 이루어진 단계이다.

• 4단계 : 탈 자동화 - 전단계로 회귀
수행이 탈 자동화됨으로 인해 다음 ZPD로 회귀하는 단계를 말하는데, 이러한 현상은 다양한 상황에서 일어날 수 있으며 우선 새로운 능력을 발달시키기 위해서는 계속적인 ZPD계열의 순환과정을 거쳐야 한다. 즉 ZPD로의 재복귀가 요구되는 것이다. 탈-자동화와 ZPD로의 재복귀는 정규적으로 발생함으로써 타인규제에서 자기규제로의 과정을 거치고 내면화를 위해 새로이 ZPD를 벗어나는 과정을 되풀이하는 것이다.

Vygotsky는 교사 또는 유능한 또래 학생의 도움이라는 사회적 상호작용에서 학습이 시작된다고 보았다. 이러한 상호작용은 주로 언어를 매개체로 하고 있으며 언어의 의미가 모든 사람들에게 공통적인 것은 아니다. 즉, 7명을 원탁에 배열하는 경우의 수를 구하기 위해 교사가 곱셈의 개념을 사용하여 설명했다고 할지라도 학생은 그것을 곱셈이 아닌 나눗셈의 개념으로 인식할 수도 있다는 것이다. 언어의 의미는 주관적이며, 주관적 의미의 언어를 사용하여 개인의 사고활동이 이루어진다. 따라서 2단계에서의 자기중심적 언어 사용이 단순히 자신의 생각을 표현하는 것이 아니라 문제해결을 위한 사고의 수단이 된다. 사회적 상호작용을 거친 주관적 해석의 첫 단계가 되는 것이다. 이처럼 독립적으로 발달한 사고와 언어는 일정 시간이 지난 후에 서로 연합되고, 이러한 연합은 아동이 발달해가는 과정에서 변화하고 성장한다고 하였다.

1단계와 4단계에서 알 수 있듯이, Vygotsky 이론에서는 더 높은 수준의 학생 또는 성인과의 상호작용과 상호작용 과정에서 언어의 역할을 매우 중요시했다. 또한, Vygotsky는 아동의 인지발달이 성인 또는 뛰어난 동료와의 상호작용을 통해 이루어진다고 믿었다. 이러한 성인이나 동료는 아동이 지적으로 성장하는데 필요한 요소를 지원하는 안내자 혹은 교사의 역할을 할 수 있으며, 이러한 조력을 비계(Scaffolding)라고 했다. 이 용어는 아동이 궁극적으로 그들 스스로의 힘으로 문제를 해결할 수 있도록 하는 견고한 이해를 확립하는 동안에 제공되는 조력을 의미한다. 조력과정에서 아동의 인지적 기능이 증가함에 따라 아동 자신이 수행에 대해 더 많은 책임을 갖도록 자극하면서 아동이 보여주는 능력의 발전적 변화에 따라 도움을 경감시키는 조절적 기능이 비계설정의 핵심이다. 비계설정을 통한 학습이 아동의 새로운 근접발달영역을 창출하는 현상에 주목할 때, 교육학자 및 아동을 지도하는 교사, 부모의 관심은 아동들에게 어떻게 비계를 설정할 것인가의 문제에 직면하게 되었다.

그렇다면 비계설정이 적절하게 이루어지려면 어떻게 해야 하는가? Vygotsky는 적절한 비계설정을 위해서 아동의 발달 수준에 적합한 과제를 선정하여 아동에게 적절한 조절을 제공해야 한다고 했다. 현재 아동의 지적 발달 수준인 실제적 발달 수준보다 약간 윗 단계에 있는 잠재적 발달 수준의 과제를 아동에게 제시해야 한다는

것이다. Piaget(1952, 1980) 또한 아동의 발달 수준에 적합한 과제의 중요성에 대해서 언급했다. Piaget에 의하면 아동은 신체 발달에 따라서 지적 구조의 발달이 이루어지며, 지적 구조의 발달에 적합한 과제가 존재한다. 따라서, 일정한 신체적·지적 발달이 이루어진 후 그에 따른 학습이 이루어질 것을 강조했으며, 학생은 교사가 제시한 학생 지적 구조의 발달에 적합한 과제에 따라서 학습해 가는 존재이다. 즉, Piaget에 의하면 발달은 학습을 주도하는 주된 과정이며 학습은 이미 발견된 구조를 증명하는 발달에 종속된 과정이다. 반면, Vygotsky는 학습과정과 발달과정과의 통일성을 강조하며 아동의 발달수준에 적합한 과제를 강조했다. 학습은 발달에 있어서 중요한 역할을 하며 아동들의 근접발달영역 내에서의 과제를 전문적인 파트너로부터 교수 받는 것처럼 학습은 발달을 이끈다고 했다. 즉, 수업시간의 학생은 아동의 발달수준에 적합한 과제를 동료와의 상호작용 또는 교사의 안내를 통해 스스로 지식을 발견해 가면서 발달해 가는 능동적인 존재이다.

또한, 조윤동·박배훈(2002)은 Vygotsky식의 관점에서 수학적 대화는 수학적 대상에 관해 교사가 조직하는 토론이라고 주장했다. 이 경우에 교사는 상위개념을 도입하는 중요한 역할을 하며, 교사는 많은 학생들 가운데 하나가 아니라 ZPD에서의 안내자이다. 따라서, Vygotsky의 교육에 대한 접근법은 '도움을 받는 발견'(Berk & Winsler, 2000, p. 147)이라고 할 수 있다. 여기에서 발견을 위한 기본적인 조건은 성인 또는 더 높은 수준의 동료를 모방하는 과정이며, 인지기술과 전략을 한 세대로부터 다음 세대로 가르쳐 지는 것이라고 보았다. 이러한 관점에서 Vygotsky는 교육에서 모방을 적극적으로 평가하고 있음을 알 수 있으며, 수학적 지식을 발견해 가면서 할 수 있는 오류를 긍정적으로 받아들이지는 않았다. 그러나, 수학자들이 수학을 발견해 가는 과정에도 항상 오류는 있어왔다. 문제를 해결해 가는 과정에서 교사와 수준이 높은 동료의 세심한 배려가 주어진다고 할지라도 오류가 생겨날 여지는 충분하다. Vygotsky에 의하면 '7명을 원순열로 배열하는 경우'를 구하는 과정에서 생기는 오류는 교육적으로 배제되어야만 한다. 오류가 계속 발생할 수 있음에도 불구하고 그러한 오류는 교육적 불량품이므로 근원을 파헤쳐서도 안되며 재활용 되어서도 안된다. 결국, Vygotsky의 이론에 의하면 수학교사는 많은 수학 지식을 가지고 있어야 하며 잘못 되었다고 역사적으로 판명된 수학 지식에 대하여 학생에게 언급해서는 안된다.

<표 1> Vygotsky의 ZPD에서 학습이 이루어지는 과정

① 교사나 더 높은 수준 학생의 올바른 사고 과정을 모델로 모방(모방 대상자의 사고과정을 알기 위한 상호작용이 필요함, 발견의 시작) → ② 자기중심적 언어를 사용한 주관적 의미 해석(자기중심적 언어를 사고의 수단으로 활용) → ③ 내면화, 자동화(도움 없이 문제 해결, 발견의 완성) → ④ 더 높은 수준의 문제로 도약 → [①, ②, ③, ④의 순환]
의문점 : 학습과정에서 생길 수 있는 오류는 교육적으로 쓸모없는 것인가?

(2) Polya의 수학적 발견술

Vygotsky가 교사나 수준이 더 높은 학생을 모델로 하여 모방을 통한 학습을 강조하였다면 Polya(1986)는 교사의 발문 기술을 구체적으로 제시하면서 학생 개인의 발견을 이끌어 내려고 하였다. 이러한 측면에서 Vygotsky의 학생보다는 Polya의 학생이 좀 더 자주적 사고 활동을 하고 있다.

> '7명의 가족이 있다. 엄마의 자리를 고정한 후 나머지 6명의 가족을 원탁 위에 배열하는 경우의 수를 구하시오'

위의 문제를 해결하고자 할 때, Vygotsky의 학생이 수준이 더 높은 동료나 교사의 사고방식을 언어적 상호작용을 통해서 모방해 가고자 한다면 Polya의 학생은 교사의 발문을 따라서 자주적 발견을 행하고자 한다. 즉, 학습 방법론적 측면에서 교사의 발문이나 개인의 사고전략에 따라 행하는 Polya의 학생보다는 Vygotsky의 학생이 더 활동 지향적이다.

Polya는 수학교육은 수학적 사고, 곧 수학을 하는 정신적 활동의 교육이라고 정의하였다. 따라서, 수학교육은

수학의 성격과 그 교육적 가치판단을 따를 수 밖에 없다고 하면서, 수학을 완성된 수학과 발생과정의 수학으로 분류하였다. Polya는 "발생 상태 그대로의 수학"의 교육적 중요성을 강조하면서, 수학적 사고 과정에서 귀납, 유추, 추측이 있은 다음 증명이 뒤따른다고 했다. Polya에 의하면 수학적으로 사고한다는 것은 그것이 비록 하찮은 것이라고 하더라도 수학적 발견을 하는 것이고, 그것은 답을 구하는 문제이건 증명하는 문제이건 문제를 해결하는 것이다. Polya는 전문 수학자들이 완성된 수학을 발견하기까지의 과정을 수학교육에 도입하고자 하였다. 즉, 발생 상태의 수학적 추측의 개연성을 교육적 측면에서 강조하고 있으며 논증적 추론에 의해서 수학적 지식이 확립된다고 보고 있다. Polya는 수학적 문제해결의 단계를 문제의 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 반성의 4단계로 보았으며, 이 중에서도 반성 과정을 강조하고 있다. 즉, 반성 단계에서 교사는 학생 스스로가 자신의 문제해결과정에 대해 옳고 그름을 판단할 수 있는 기회를 준다는 것이다. '완성된 수학'을 향해서 '발생 상태 그대로의 수학'의 방법을 사용하여 나아가는 것이다. 따라서 Polya의 수학적 문제해결 단계는 학습 방법을 몰라 고민하는 학생들에게 효과적 학습 방법을 위한 안내서로 제시될 만하다.

Polya의 문제해결단계는 Hadamard(1945)의 발견적 사고 과정의 네 단계[1] 즉, 준비기, 부화기, 계시기, 검증기에 대응된다. Hadamard는 발명은 선행하는 준비 작업을 전제하지 않고는 이루어질 수 없다고 주장했다. 따라서 준비기를 가장 강조하고 있으며 문제 해결 전략의 추구라는 관점에서 준비기의 바람직한 의식적 준비 활동의 조건을 고려할 필요가 있다. Hadamard의 관점에서 Polya의 문제해결단계에서 문제이해 단계는 발견적 사고가 이루어지기 위한 중요한 단계이다. 부화기 동안의 무의식적 기제의 작동은 의식적 사고활동의 결과로 시작된다고 보았기 때문이다. Hadamard의 세 번째 계시기는 문제 해결 활동을 '발견'이라는 관점에서 묘사하기 위하여 설정한 것으로 볼 수 있다. 부화기의 무의식적 사고활동을 통해서 통찰의 순간이 다가오게 된다는 것이다. 마지막 검증기는 Polya의 반성단계에 해당되며 의식적 사고를 통해 결과를 정리하는 단계이다. 따라서 Polya의 문제해결단계는 Hadamard의 발견적 사고 과정의 네 단계를 촉진시키기 위한 여러 가지 교사의 발문과 권고로 이루어져 있다고 볼 수 있다.

각 단계에 나오는 발문과 권고는 Polya 발견술의 핵을 이루는데, 문제의 변형, 정의로 되돌아가기, 분해와 재결합, 유추하기, 일반화와 특수화 등 구체적인 목록을 제시했다. 특히 문제 이해 단계에서 사용하는 다양한 발문은 학생의 학습에 유용하게 사용될 수 있으며 발견의 시작을 가능하게 하는 전략이다. 순열과 조합에서는 대부분의 학생들이 문장제를 그림으로 나타내면서 문제해결의 실마리를 찾는다. 문제의 이해단계에서 '그림으로 그려보기'를 활용한 예이다. Polya가 제시한 목록은 문제해결을 지도하는 교수법으로서의 대화법인 동시에 수학적으로 사고하는 방법으로서의 자신과의 대화술이다. 그러나 이런 문제 해결 개념 속에는 문제가 이미 형식화되어 있으며 문제를 제기하는 지도가 전적으로 무시되고 있다는 비판을 받기도 했다. 즉, Polya의 문제해결 4단계는 창의적이고 발산적인 사고를 방해할 수 있다는 것이다. 이러한 면에서 창의적이고 발산적인 사고를 강조하는 순열과 조합을 지도하기에는 부족한 면이 없지 않다. 예를 들어 '서로 다른 모양의 주사위 2개를 던졌을 때 나올 수 있는 경우'를 구하는 문제를 해결한 학생이 '2개가 같은 모양이라면 어떻게 달라지는가?'라는 문제 제기를 할 수 있는 단계가 빠져있다.

Polya는 수학자의 사고가 자연스럽게 녹아있는 여러 가지 발견술적 발문과 권고를 이용하여 교사와 학생 사이의 대화를 장려하고 있다. 이것은 수학자의 발견술적 대화를 통해 수학자의 안목에 접하고 수학자 단체의 구성원이 되게 하려는 것이었다. 수학자처럼 세련되게 문제해결을 하도록 추구하고 있으나, 문제해결에 집착한 나머지 학생들이 수학자처럼 새로운 문제를 제기할 수 있는 부분을 간과했다.

---

[1] 준비기 : 해결하고자 하는 문제의 특성을 파악하고 심사숙고하여 선택한 관련된 표상의 결합을 의식적으로 시도
부화기 : 무의식적인 사고활동이 이루어지는 과정
계시기 : 돌연히 해결의 실마리가 떠올라 통찰의 순간이 온다.
검증기 : 의식적 사고를 통해 결과를 해결하고 명확하게 정리(Polya의 문제해결과정 4단계 중 반성에 해당된다.)

<표 2> Polya의 학습이 이루어지는 과정

① 문제의 이해(발견의 시작, 발생상태로의 수학을 시작하는 단계) → ② 계획의 작성 → ③ 계획의 실행 → ④ 반성(완성된 수학에 도달했는가를 확인, 발견의 완성)
의문점 : 학생은 새로운 문제를 제기할 수는 없는가? '서로 다른 모양의 주사위 2개를 던졌을 때 나올 수 있는 경우' 를 구하는 문제를 해결한 학생이 '2개가 같은 모양이라면 어떻게 달라지는가?' 라는 문제를 제기할 수도 있어야 한다.

(3) Bruner의 발견학습

Piaget(1952, 1980)는 인지발달을 환경에 적응하는 과정에서 끊임없이 일어나는 인지적 균형의 파괴와 동화 및 조절에 의한 새로운 균형화가 반복되는 쉠(scheme)의 끊임없는 재구성 과정이라고 보았다. 그는 인지발달이 연령에 따른다고 보았으며, 연령에 따라서 감각운동기(0세-2세), 전조작기(2세-7세), 구체적 조작기(7세-11세), 형식적 조작기(11세-12세)의 순서로 인지발달이 이루어진다고 보았다. Piaget의 논리 · 수학적 개념은 대상에 대한 주체 행동의 일반적인 조정으로부터 반영적 추상화에 의해 구성된 것이다. 반영적 추상화는 반사와 반성의 두 상보적인 과정으로 이루어진다. 여기에서 인식주체의 행동이나 조작인 내용을 상위의 수준으로 옮기는 것이 반사이고, 반성은 전단계에서 얻은 것을 새로운 면에서 재구성하거나 혹은 현단계에 이미 놓여져 있는 것과 전단계의 요소를 관련짓는 것이다. 여기에서 반성에 의해 창조된 새로운 형식은 다음 단계의 반사과정에서 보다 세련된 내용으로 받아들여져서 계속적인 반사와 반성의 순환이 이루어진다.

Piaget의 이론에 의하면 수학적 지식 및 사고의 본질은 조작(operation)이므로 학습은 조작의 바탕이 되는 여러 활동을 중심으로 구성되어야 한다. 또한, 교사는 학습자의 인지 발달 수준보다 조금 더 높은 수준의 활동을 제공하도록 노력해야 하며 따라서 학습자의 수준을 정확히 진단하기 위해 노력해야 한다. 이러한 피아제의 인지발달 단계 이론에 기초하여 Bruner는 EIS(Enactive representation, Iconic representation, Symbolic representation)이론을 제안했다. Bruner는 아동의 지능발달을 활동적 표현, 영상적 표현, 상징적 표현의 순서로 표현 수단의 증대와 그 사이의 조정 능력의 증대로 보고 있다. 또한, 모든 발달 단계의 학생에게 발달 단계에 맞는 표현양식으로 학문의 기본 원리나 구조를 가르칠 수 있다고 주장했다. 이것은 발달단계에 학습이 종속된다는 Piaget의 견해와 상반되는 개념이다. 여기에서 Bruner가 의미하는 구조란 개념들 사이의 관계망의 형성이다. 수학을 예로 들면, 수학적인 개념들을 단편적으로 지도할 것이 아니라 그들 사이의 관계를 지도하여야 한다는 것이다(강옥기, 2000). 즉, Bruner의 관점에서 순열과 조합의 학습은 단순히 '7명 중 3명을 순서대로 배열하는 경우'는 순열이고 '7명을 3명을 고르는 경우'는 조합이라고 분류하는 데서 끝나는 것이 아니다. 이러한 순열과 조합이 서로 어떠한 관계가 있는지를 보는 것이다.

Bruner는 학문은 독특한 기본적인 구조를 가지고 있다는 것을 전제로 하면서, 교육과정은 그 구조를 중심으로 조직되어야 한다고 보고 있다. '지식의 구조'라는 개념을 통해서 그는 모든 학습내용을 모든 수준의 학생에게 가르칠 수 있다는 가능성을 제시했다. 또한, '지식의 구조'를 가르침으로써 고등지식과 초보적인 지식 사이의 간격을 좁힐 수 있으며, 이해와 기억이 용이하고, 적용을 가능하게 한다고 주장했다. 또한, '지식의 구조'를 가르치기 위해서 교사는 수업자의 인지구조를 파악해야 하고, 수업자가 이해할 수 있을 정도의 쉬운 용어를 사용해야 하며 개념에 맞는 자료를 제시해 주어야 한다고 주장했다. 즉, 학생의 선행지식 또는 학습 준비도에 따라서 용어 선택도 달라져야 한다는 것이다. Bruner에 의하면 순열과 조합의 '지식의 구조'를 말하기 위해서는 '수세기 형식화'에 대한 논의가 먼저 이루어져야 한다. '수세기의 형식화'인 사칙연산의 다양한 개념이 확고하게 다져지지 않고서는 순열과 조합의 구조적 이해에 대해서 말하는 것은 매우 어렵다. 또한 Bruner의 발견학습에서 학생은 구체적인 자료를 다루는 가운데, 학생이 이해하고 있는 직관적인 규칙성과 대응하는 규칙성을 발견하게 된다고 했다(강옥기, 2000). 그는 이처럼 초기연구에서 공부하고

있는 내용의 구조에 대한 이해와 학습에서의 귀납적 추리의 가치를 강조했다. 귀납적 추리는 순열과 조합에서도 매우 귀중하게 활용되고 있다. '7명을 순서대로 배열하는 경우의 수'를 구하기 위해서 연연적 추리를 하는 학생은 거의 없을 것이며, 연역적 추리를 사용한다고 할지라도 그 활용의 범주가 매우 좁아 곧 어려움에 부딪히게 될 것이다. Bruner에 의하면 귀납적 추리를 위해 활동적, 영상적, 상징적 표현수단을 활용할 수 있다. 보통의 고등학생들은 순열 문제를 해결하고자 할 때 Polya의 문제이해 전략인 '그림 그려보기'라는 영상적 표현수단을 자주 활용한다. Vygotsky의 인지발달 3단계에 이르게 되면 자동화된 사고가 가능하며 이때 상징적 표현수단인 ${}_7P_7$의 활용이 가능하게 된다.

한편, Bruner의 발견학습에서 발견은 학생들이 자신의 행동과 마음을 통해서 능동적으로 학습하여 지식을 획득하고 자료와 증거를 재정리하여 새로운 통찰력을 갖는 행위라고 보았다. 즉, 학생이 행동과 마음을 통해서 능동적으로 학습할 만한 지식이 먼저 있어야 하며 그러한 지식들의 재정리를 통해 새로운 지식을 만들어 낼 수 있어야 한다고 보았다. 따라서 Bruner의 발견학습은 학문의 결과보다도 사고 과정을 중요시하며, 학자와 동일한 지적 활동을 하도록 가르치고 배우는 방법을 의미하며, 학습 내용의 최종 형태를 학습자 스스로 조직하도록 요구하는 학습이다. 이처럼 Bruner의 발견학습 이론은 기존 지식의 교육적 전달이 먼저 이루어진 후, 개인에 의한 자주적인 형성이 이루어진다고 보았다. 또한 기존 지식의 교육적 전달이 이루어질 때 전달 수단으로 학생의 현재 수준에 적합한 언어의 사용을 강조했다. 따라서, '7명을 순서대로 배열하는 경우의 수'를 구하기 위해서 '그림을 그리기' 전략을 사용하고 있는 학생에게 ${}_7P_7$을 바로 도입하는 것은 학생의 학습을 방해할 수도 있다. 또한, Bruner의 학생은 교사의 지식 전달이 이루어진 후 누구의 도움도 받지 않고 스스로 지식을 재구성할 수 있는 능력이 있어야 한다.

<표 3> Bruner의 학습이 이루어지는 과정

① 학생의 수준파악(선행, 사전학습 상태 확인) → ② 학생 수준에 적합한 언어를 사용한 기존지식의 교육적 전달 → ③ 학생의 자주적 학습(학생 스스로 구조를 파악할 수 있어야 한다. 발견의 완성)
의문점 : 교사의 지식 전달이 있은 후, 학생 스스로 지식을 구성할 수 없는 경우는 어떻게 해야 하는가?

(4) Lakatos의 수학적 발견술

20세기 과학철학은 두 번의 급격한 변화를 겪었다. 첫째는 1920년대와 30년대 빈(Vienna)을 중심으로 나타난 논리실증주의의 논리와 경험의 결합이었고, 다른 하나는 60년대와 70년대를 거치면서 과학철학자들이 과학의 역사와 과학 활동의 실제 모습에 보다 주목하게 된 '역사적 전환'이었다. '역사적 과학철학'이 탄생하던 이 시기에 대서양을 사이에 두고 포퍼(Popper), 쿤(Kuhn), 라카토스(Lakatos) 등의 독특한 개성을 지닌 학자들이 과학방법론의 성격을 두고 논쟁을 벌였다.

포퍼는 '과학적 발견의 논리 발문 Postcript to the Logic of Scientific Discovery'(3권, 1981-1982)'에서 반증주의(Falsificationism) 라는 새로운 과학관을 처음으로 제시한다. 포퍼에 의하면, 과학적 인식은 지각이나 관찰자료나 사실의 수집으로부터 시작하지 않고(즉, 관찰이나 실험의 관정을 통한 귀납적 일반화에 의하지 않고) 우리의 지식(보편진술)과 어떤 것(반증)이 일치하지 않을 때의 '문제'로부터 출발한다. 바꾸어 말하면, 문제는 지식과 사실 간의 모순의 발견에서 야기된다는 것이다.

미국의 과학 사회학자이자 철학자인 쿤(Thomas Khun)은 그의 저서 "과학혁명의 구조"(The Structure of Scientific Revolution)에서 패러다임이란 개념을 제시한다. 그는 모든 사람은 자기 나름대로의 규칙과 법칙을

가지고 있으며, 자신의 고정관념이나 선입견에 의해 모든 사물이나 현상을 선택적으로 지각하게 된다고 주장한다. 이처럼 사물이나 현상을 지각 또는 인식하는데 있어 고정관념이나 선입견의 역할을 하는 필터와 같은 지각체계를 패러다임이라고 제시하고 있다. 또한, 한 시대의 패러다임은 현실에 안주하려는 경향이 있으며 미래를 예측하기 어려운 낡은 패러다임이 등장하게 된다. 따라서, 새로운 패러다임에 적응하기 위해서는 패러다임의 빠른 전환이 필요하다고 주장한다(Thomas kuhn, 2007).

Lakatos는 Khun을 따라 과학의 역사적인 실제 전개과정에 충실하면서도 Popper를 따라 과학의 객관성과 합리성을 확보할 수 있는 견해를 제시하려 노력했다. 그리고 이 과정에서 포퍼식의 개인주의적 자유를 강조했으며, 포퍼식의 반증론을 데카르트-오일러 정리의 증명에 적용했다. 오일러의 다면체 정리를 주제로 택하여 18세기부터 20세기 초까지의 수학사를 역사 발생적으로 해석하고 이를 대화 형식으로 논의하고 있다. 그는 수학은 의심의 여지없이 확립된 정리의 수가 단조롭게 증가하면서 성장하는 것이 아니라 숙고와 비판, 증명과 반박의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선을 통해 성장한다고 주장했다. 이와 같이, Popper와 Khun의 주장을 적절히 활용했다는 점에서 Lakatos의 주장은 큰 의미를 갖는다. Lakatos는 수학적 오류의 교육적 활용 가능성을 제시해 주었다. 순열과 조합의 지도에서 '원탁에 배열하는 것은 원순열이다'는 Popper의 주장처럼 '한사람을 고정시키고 나머지 사람을 원탁에 배열하는 경우의 수 구하기' 같은 반증에 부딪히게 된다. 여기에서 문제의식이 발생한다. 정말로 '원탁에 배열하는 것은 원순열인가?' 이것은 Kuhn의 주장대로 고정관념이며 선입견이다. 따라서 새로운 패러다임이 필요하다. Lakatos의 증명과 반박의 논리에 의해서 '원탁에 배열하는 것은 원순열이다'는 추측은 끊임없이 개선될 것이다. 한편, Lakatos는 <증명과 반박의 방법>이라 부르고 있는 수학의 발견술을 다음과 같은 발견술적 규칙으로 요약하고 있다.

규칙 1 : 추측을 하면 그 증명이나 반박에 착수하여라.
규칙 2 : 전면적인 반례가 있으면 추측을 버리고 반례에 의해 반박될 적절한 보조 정리를 증명-분석에 추가하고 그 보조 정리를 조건으로 합체시킨 개선된 추측으로 기각한 추측을 대체시켜라. 모든 <감추어진 보조 정리>를 명백하게 하려고 시도하여라.
규칙 3 : 국소적인 반례가 있으면 그것이 또한 전면적인 반례인지 아닌지 검사해 보아라.
규칙 4 : 만일 국소적인 반례이지만 전면적인 반례가 아닌 반례가 있으면 반증되지 않는 보조 정리로 반박된 보조 정리를 대체시켜 증명-분석을 개선하도록 시도하여라.
규칙 5 : 만약 어떤 유형이든 반례를 얻었다면 연역적 추정에 의하여 그것들이 더 이상 반례가 되지 않는 보다 깊은 정리를 발견하도록 시도하라.

라카토스의 연구에 대한 이상의 논의를 바탕으로 오류주의적 관점에서 본 수학의 탐구 양식은 네 단계로 정리할 수 있다.

1단계 : 수학적 추측을 제기하는 단계
2단계 : 제기된 추측을 부분 추측으로 분해하여 추측의 비판 가능성을 높이는 사고 실험, 곧 증명 단계
3단계 : 추측을 검사하여 원래의 추측과 그 증명, 곧 부분 추측 체계의 약점과 제한점을 검사하여 원래의 추측과 증명을 반박하는 단계
4단계 : 증명을 재검토하여 <유죄인 보조 정리>를 들추어내고 그에 대응하는 조건을 원래의 추측에 첨가하여 추측을 개선하는 단계

이것은 Polya의 문제해결과정(문제의 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 반성) 4단계와 유사하다. Lakatos는 Polya가 간과한 문제 제기 단계를 1단계로 놓으면서 학생을 보다 능동적인 학습활동을 하는 존재로 보았다.

Lakatos는 수학적 발견의 논리에 대한 그의 연구가 Polya의 발견술의 부흥을 목적으로 하고 있다고 밝히고 있다. 그러나, 인식론적 차이 때문에 발견술의 개념에 차이가 발생하고 있음을 알 수 있다. 곧, Polya는 발견술에 의해 추측하고 이어서 추측을 정당화하려고 시도하지만 Lakatos는 정당화의 과정과 발견의 과정의 통합을 시도하고 있는 것이다(강문봉, 1993). 따라서 Polya의 학생보다는 Lakatos의 학생이 더 능동적이고 창의적인 존재이다. 그러나, 모든 발견이 지식과 사실 간의 모순에서 시작되는 것은 아니다. 따라서, Lakatos와 다른 학자들의 발견학습 이론은 교실 수업에서 상보적인 관계를 형성할 수 있다.

<표 4> Lakatos의 학습이 이루어지는 과정

① 수학적 추측 → ② 추측의 증명 → ③ 추측과 증명의 반박 → ④ 추측의 개선
의문점 : 모든 발견이 지식과 사실 간의 모순에서 시작되는 것은 아니다. 오류가 없는 발견이 있을 수도 있다. 그때의 발견은 어떻게 이루어져야 하는가?

2. 발견학습과 발문

발견학습에 대한 이론은 '발견이란 무엇인가?'에 대한 견해에 따라서 크게 두 가지로 분류할 수 있다. Vygotsky, Polya, Bruner가 발견이란 기존의 지식을 정리하고 종합하여 새로운 지식으로 구성한다는 관점에 따라 이론을 전개했다면 Lakatos는 발견이란 지식과 사실 사이의 모순에서 제기되는 문제에서 시작된다고 보았다. 학생이 수학자처럼 수학을 해야 한다고 생각하는 공통적 견해에서 출발하지만 Vygotsky, Polya, Bruner가 모두 발생적 형태의 수학을 인정하면서도 완성된 수학을 지향하는 세련되고 근엄한 수학자의 모습을 추구했다면, Lakatos는 오류를 수정해 가면서 더 나은 형태의 수학을 추구하는 인간적인 수학자의 모습을 추구하고 있다. 교실 수업에서 어느 쪽이 더 좋은 발견학습 이론인가에 대한 논의는 무의미하다. Vygotsky의 이론에서 '올바른 것'만이 교육적 의미가 있는가에 대한 해답을 Lakatos가 제시해 주고 있다면 Lakatos의 이론에서 지식과 사실 사이의 모순이 없는 발견에 대한 해답은 Vygotsky, Polya, Bruner가 제시해 주고 있다. 또한 Bruner의 이론에서 학생 스스로 지식을 구성할 수 없는 경우에 대해서는 Polya와 Vygotsky가 단순한 전달자가 아닌 조력자로서의 교사역할을 강조함으로써 그 답을 제시하고 있다. 위의 발견학습 이론들은 완전한 무(無)에서 유(有)를 창조하기는 불가능한 것으로 보고 있다. 따라서 학생의 선행 지식과 현재의 수준을 모두 강조하고 있으며 이를 바탕으로 발견학습을 시도하고 있다. 교실 수업에서 발생하는 다양한 상황에서는 상황에 맞는 각각의 발견학습을 제시하는 교사의 노력이 필요하다. 또한 각각의 발견학습 이론에서 공통적으로 중요하게 생각한 것이 교사의 역할이었다. 전달자로서의 교사 역할뿐 아니라 교사와 학생 사이의 상호작용을 매우 중요하게 여겼으며 전달자 또는 상호작용의 촉진자 역할은 언어를 매개체로 이루어졌다. 따라서 발견을 촉진시킬 수 있는 교사 발문에 대한 관심도 매우 높았다. Polya는 각 문제해결단계에 적합한 발문을 다양하게 제시하고 있으며 비록 발문은 아니지만 교사의 지식 전달 수단으로서의 언어 사용에 대한 Bruner의 이론도 눈여겨 볼 만 하다. 학습의 자주적 지식 구성 과정과 교사의 발문을 중요시 한다는 측면에서 구성주의에서의 학습이론은 발견학습과 많은 부분이 닮아있다. 구성주의는 교사가 학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성을 도모하기 위해 발문 및 응답에 의한 상호작용적인 추측 및 논박 활동을 통해 수학을 지도하기를 요구한다. 또한, 박영배(1996)는 발문을 학생으로 하여금 수학적 사고활동을 할 수 있도록 동기를 유발하고, 스스로 수학 지식을 구성해 나갈 수 있도록 자극을 주는 교사의 조언으로 보았다. 이에 대해서 히라바야시 이치에이(平林一榮, 1989)는 학생과의 상호작용을 위한 발문의 필요조건으로 6가지를 제시했다(박영배, 1996 재인용).

첫째, 학습 내용과 학습자의 심적 상태를 고려한 긴장감을 불러일으키는 질문이어야 한다. 즉, 적극적인 관심을 유발시키는 질문이어야 한다는 것이다.

둘째, 교재 내용에 대해 개별적으로 질문해야 한다.

셋째, 추리 방법을 체득시키기 위한 질문이어야 한다.

넷째, 발문에 사용되는 표현을 고려해야 한다. 즉, 간결한 말을 사용해야 하며, 쓸데없는 말의 사용을 억제하고 초점화된 말을 사용해야 하며, 올바른 용어와 수준 차를 고려한 용어를 사용해야 한다는 것이다.

다섯째, 발문과 발문 사이에 학생들의 사고활동을 위한 적절한 시간을 주어야 한다. 교사는 발문을 한 후, 학생이 대답하기까지 기다릴 수 있어야 한다.

여섯째, 발문의 의도적인 전개를 위한 순서를 결정하고, 학생 반응에 대처할 방법을 고려해야 한다. 즉, 교사는 학생의 올바른 반응을 이끌어 내기 위해 계획적인 발문을 해야 하며, 예상 외의 반응까지도 예측할 수 있어야 한다는 것이다.

Barnes(1990)는 발문을 사실 확인적 발문, 논리 추구적 발문, 자유 발전적 발문 등의 세 가지 유형으로 제시했다. Vacc(1993)는 Barnes가 제시한 세 가지 유형의 발문에 대해 구체적인 예를 제시했다.

(사실 확인적 발문) : 그림에서 도형 O의 이름은 무엇인가?
(논리 추구적 발문) : 이들 도형을 서로 같은 것끼리 세 부분으로 나눈다면, 어떻게 나누어질 수 있을까? 그림에서 두 개의 서로 같은 부분으로 나누어질 수 있는가?
(자유 발전적 발문) : 그림에서 도형 E는 도형 O와 어떻게 닮았나?

이처럼 발견학습과 구성주의에서는 발문과 응답을 중심으로 하는 상호 작용을 통한 학습을 중요시하고 있으며 발문에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다.

Ⅲ. 순열과 조합 선행연구 고찰

1. 이산수학에서의 순열과 조합

조합론, 그래프이론, 이산구조론, 선형대수학, 수치해석, 디자인 이론, 선형계획법, 조합적 행렬론, 최적화 이론 등은 현대 수학과 과학에서 꼭 필요한 연구 분야이며, 이 모든 과목의 시작이 이산수학이다. 즉, 현대 수학 이론과 공학적 이용으로 이어지는 다리 역할을 하는 것이 바로 이산수학이다(이준열, 1991).

Rosenstein은 교과과정에 이산수학을 포함시키는데 찬성하는 많은 논문을 토대로 이산수학의 성격을 응용성, 접근 가능성, 유인성, 적절성으로 보고 있다. Hart(1991)는 이산수학을 중등학교 수학교육에서 독립된 영역으로서 가르치기 보다는 전통적인 교육과정의 내용을 보충해 주는 입장에서 이산 수학을 강조할 것을 주장하고 있다. 즉, Hart는 이산수학의 네 가지 성격 중에서 보완성을 가장 큰 특징으로 보았으며 전통적인 교육과정 속에서 접근가능성, 유인성, 적절성은 충분히 반영될 것으로 보았다(강혜진, 2002 재인용).

순열과 조합은 이산수학의 한 단원으로서 이산수학이 갖고 있는 접근 가능성, 유인성, 적절성, 보완성의 특징을 모두 갖고 있다. 그렇다면 이러한 네 가지 특징을 잘 드러낼 수 있는 교수·학습법에는 어떤 것이 있는가? Rosenstein은 이산수학은 가르치는 것 그 자체가 목적이 되는 것이 아니라 학교 수학 개혁의 도구라고 보고 있다. 또한, 학생들에게 제공될 문제가 교사들에게도 새롭고 지식의 최첨단에 가까울 때, 수업이나 토론은 "책에 있지 않은" 방법을 발견하는 흥분을 불러일으킬 수 있을 것이라고 했다. 구성주의의 학습에서는 발견학습, 실험, 문제해결, 협력학습, 공학 기술의 이용과 같은 학습 방법이 추천되고 있는데, 그는 이산수학은 이러한 학습 방법이 적용되기 용이한 많은 내용으로 이루어져 있다고 주장했다(강혜진, 2002). 또한, 강문봉(1993)은 수학 교육이 경직된 이유로 수학자들이 오류없이, 연역적으로 수학의 개념과 정리를 발견한 것이 아닌데도 학생들에게는 연역적 방법에 따르는 사고를 하도록 요구하고 있기 때문이라고 했다. 그는 Lakatos의 수리 철학이 이러한 수학교육의 경직성에 대한 대안을 제시해 준다고 하면서, 동시에 그것이 수학의 공리·연역적 구성을 무시해도 좋다는 것으로 이해되어서는 안된다고 강조했다(우정호, 2004). 이처럼 이산수학의 한 분야인 순열과 조합에서 교수·학습법의 변화를 요구하는 많은 연구결과가 있으며, 교사는 전통적 교수법의 한계를 자주 경험하게 된다.

2. 수학 I 에서의 순열과 조합

7차 교육과정에서 순열과 조합은 지수와 로그, 수열, 행렬, 수열의 극한, 지수함수와 로그함수에 이어서 수학 I 의 거의 마지막 부분에 등장하고 있다. 현행 교과서는 순열과 조합을 독립된 단원으로 다루는가 하면 확률의 소단원으로 다루고 있는 교과서도 있다. 수학 I 에서 순열과 조합이 확률과 통계 단원의 일부분으로서 그 의미가 다루어지는 것에 대해서 Freudenthal과 우정호 등은 다음과 같이 주장했다. 우정호(1998)는 순열과 조합이 확률과 통계 직전에 배열되어 있어 마치 확률과 통계 단원을 위한 준비 단계처럼 보이기도 한다고 했다. 이는 학교수학에서의 확률 개념이 고전적 관점을 택함으로써 현실적 사고와 멀어지고 복잡한 계산 패턴의 학습이 강조되고 있으며, 심리적으로도 우연 현상의 이해를 돕지 못한다고 비판하기도 했다. Freudenthal(1973)은 조합론과

확률론은 같지 않은데, 현재에는 확률론을 가르친다기보다는 조합론을 가르친다고 비판했다. 확률론에서는 '확률적 독립성과 종속성, 조건부 확률'을 가장 중요한 개념으로서 택하고 있으나 조합론에서는 그렇지 않다는 것이다(이경화, 1996, 재인용). 결국, 이들은 순열과 조합은 확률과는 독립적으로 해석되어야 한다고 보고 있다. 그러나, 중등수학 교과서에서는 우정호(1998)의 주장처럼 순열과 조합을 확률과 통계 단원의 앞쪽에 구성함으로써 교사나 학생들에게 순열과 조합이 확률 통계를 위한 준비 단원인 것처럼 인식하도록 했다. 이들의 공통적인 주장은 순열과 조합은 확률과는 독립적으로 인식되어야 한다는 것이다. 순열과 조합은 '수세기'에 대한 비형식적 선행 지식에서 출발하며 비형식적 문항인 문장제로부터 '수세기 형식화'인 사칙연산 개념을 활용해야 한다. 따라서 비형식적 상황에서 출발하여 형식화를 추구한다는 측면에서는 확률과 동일하지만 '가능성'의 개념에서 출발하는 확률과는 다르다. '가능성'의 개념이 '수세기'와 관련이 있을 수도 있지만 '수세기'를 넘어선 경우가 대부분이기 때문이다. 따라서 순열과 조합을 '수세기'와 관련하여 지도할 수 있는 교수·학습법이 필요하며 본 연구에서는 다양한 발견학습법을 적합한 교수·학습법으로 보고 있다.

3. 순열과 조합에서의 개념의 중요성

학교 수학에서 학생들은 문제 진술이 '선택'이면 조합, 그리고 '배치' 또는 '배열'이면 순열이라고 생각하는 경향이 있고, 조합 문제가 배치 유형으로 변형되어 진술되면 순열 문제로 혼동하여 풀곤 한다. 이것은 Batanero 외(1997)가 지적한 바와 같이 중등 과정의 교과서에서는 선택 유형의 진술을 비롯한 잠재적 조합 모델을 명시적으로 고려하고 있지 않기 때문에 많은 학생들이 문제의 유형을 잘못 확인하여 문제 해결에 자주 실패하게 되는 것이다. 이러한 실패를 극복하기 위해, Polya(1973)는 문제해결 4단계 중 2번째 단계인 계획의 작성 단계에서 사고 전략으로서 문제를 달리 진술해 보거나, 미지인 것이나 결론이 같거나 또는 유사한 문제를 생각해 보고, 유용한 패턴을 찾아볼 것을 권고한다.

한편, Roberts(1984)는 조합론의 역사에서 '상자에 공을 넣는 문제'가 중요한 역할을 한다고 하였다. 상자의 구별 여부와 공의 구별 여부, 그리고 빈 상자가 생길 수 있는지의 여부에 따라 다양한 경우가 있으며, 그 중 순열은 r개의 서로 다른 색의 공을 n개의 서로 다른 상자에 많아야 하나의 공을 넣는 경우를 의미하고, 조합은 r개의 같은색 공을 n개의 서로 다른 상자에 많아야 하나의 공을 넣는 경우를 의미한다고 하였다. 따라서, 학생들은 순열과 조합을 한 가지 상황이 아닌 다른 여러 상황으로도 볼 수 있는 시각을 가져야 한다고 주장했다(이주영 외 2006, 재인용).

이처럼, 순열과 조합문제의 진술은 여러 가지로 변형될 수 있으므로 다양한 문제 상황에서도 구조를 정확히 파악할 수 있어야 하며, 따라서 순열과 조합에서 다루는 문제들은 일반적인 공식만을 사용해서는 해결할 수 없다(Dossey, 1992). 즉, 순열과 조합에 대한 깊이 있는 개념이해가 선행되어야 하며, 이지화(2005, pp. 17-19)는 순열과 조합의 개념 제시에 대한 의미 있는 방안을 제시했다.

<제시1> 서로 다른 것 중에서 몇 개를 취하여 그들을 일렬로 세울 때 늘어세운 하나하나를 "순열"이라고 한다. 서로 다른 것 중에서 몇 개를 취하여 조를 만들때, 이 하나하나의 조를 "조합"이라고 한다.

<제시2> 회장 1명, 부회장 1명을 뽑는 경우의 수를 "순열"이라고 한다. 대표 2명을 뽑는 경우의 수를 " 조합" 이라고 한다.

<제시3> 뽑았을 때 순서가 정해져 있는 경우의 수를 "순열" 이라고 한다.뽑았을 때 순서가 정해져 있지 않은 경우의 수를 "조합" 이라고 한다.

<제시4> 뽑은 항목간에 순서가 있는가? 순서가 있다. (순열) 순서가 없다.(조합)

<제시5> 뽑힌 것끼리 서로 자리를 바꾸면 차이가 있는가? 차이가 있다. (순열) 차이가 없다. (조합)

이지화는 <제시5>가 동인과 단서 변인이라는 교육학적 측면에서 바람직하므로 <제시5>를 수업시간에 활용하도록 하겠다고 하였다. 학생의 수준 및 학습심리학적 측면에서는 <제시1>부터 <제시5>까지 모두가 의미 있는 것으로 보이며, 학생에 따라서 가장 쉽게 느껴지는 개념 제시방법이 다를 것으로 보인다. ${}_nP_r$과 ${}_nC_r$을 영상적 표현 방법으로 이해하고 있는 학생에게 개념이해가

선행되지 않은 ${}_nP_r$과 ${}_nC_r$을 바로 도입하는 것은 위험하다. 이지화의 다섯 가지 개념 제시 방법은 순열과 조합에 있어서 개념이 매우 중요하다는 점과 교사가 개념 제시 방법에 대해서 고민해야 한다는 것을 암시하고 있다.

Ⅳ. 연구방법 및 절차

1. 연구대상

이 연구는 Y고등학교 2학년 학생 2명을 대상으로 하였으며, 2006년 11월부터 2008년 2월까지 14개월간 진행되었다.

Y고등학교는 각 학년 6학급씩 총 18학급이며, 학생수 491명의 Y읍에 위치하고 있는 학교이다. 읍단위 학교로서는 규모가 큰 편이며, 상위권 학생의 대부분은 인근 사립 고등학교로 진학하고 나머지 중하위권 학생들이 Y고등학교에 진학하고 있었다.

S_1학생과 S_2학생의 수학성적을 살펴보면, S_2학생은 전국연합학력평가 3등급, S_1학생은 5등급의 성적을 거두고 있었다. 단, 두 학생의 교내 수학성적은 1,2등급이며 수학뿐 아니라 다른 교과 성적도 우수하였다.

S_1과 S_2를 1년여 동안 관찰한 결과 S_2는 문제풀이에 실패하는 것을 크게 두려워하지 않았으며, 어려운 문제에 대한 도전 의식이 강했다. 그러나, S_1은 수학시간에 질문도 거의 하지 않았으며, 교사의 질문을 회피하고 눈도 마주치지 않는 학생이었다. 이러한 교사의 관찰 결과가 학생 자신이 느끼는 수학적 성향과 어떤 차이가 있는지 알아보기 위해 교사연구자는 설문지를 나누어 주고 작성하도록 했다. 설문 조사 결과 수학에 대한 느낌과 태도는 교사의 관찰결과와 유사한 반응을 보였으며, S_2가 S_1에 비해 긍정적이었다. 그러나, 학습능력과 성취도에 대한 답에서는 S_1이 훨씬 긍정적인 반응을 했다.

학습 방법에서 S_1과 S_2 모두 예습, 복습을 잘 하지 않는다고 답했으며 다른 학생이 풀지 못한 문제는 그 후에도 푸는 방법을 계속 생각해 본다는 공통점이 있었다. 특이한 점은 S_2는 수업시간에 중요한 것은 필기를 하면서 듣지만 수학은 쓰면서 공부하는 것이 아니라고 생각한다는 점이다. 이 응답에 대해 교사가 부연설명을 요구하자, S_2는 수학과 쓰기는 별개의 것이라고 주장했다. 또한, 노트정리와 공부는 별개이며 대부분의 노트정리를 수행평가 점수를 위해서 한다고 답했다.

2. 연구방법 및 절차

(1) 연구방법

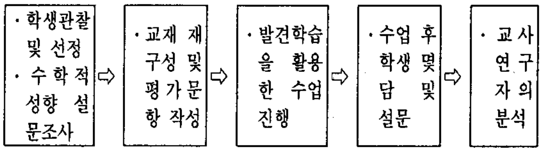
이 연구는 '순열과 조합' 단원에 대한 발견학습 사례를 통해 학생의 정의적 반응을 살펴보는 정성연구이다. 따라서 학생과의 수업과정을 비디오로 촬영하였으며, 녹음, 관찰기록지 작성 등 실험교수에서 지향하는 일련의 과정을 거쳤다. 또한 연구결과 분석에서 삼각검증법을 활용하여 연구의 신뢰성을 높이고자 하였다.

(2) 연구절차

이 연구는 2006년 11월부터 2007년 3월까지 연구대상 선정을 위한 관찰, 2007년 3월 연구대상 선정 및 순열과 교재 재구성, 2007년 8월부터 9월 중순까지 순열과 조합 수업 10차시, 2008년 1월 학생 면담의 순으로 진행되었다. 10차시의 수업은 <표 5>과 같은 순서로 이루어졌다.

<표 5> 순열과 조합 수업 전개

차시	학습내용	주요 교수·학습활동	평가활동
1차시	순열, 중복순열	교과서 문제 해석하기	
2차시	같은 것이 있는 순열	문제풀이 및 설명하기	평가1회
3차시	조합	교과서 문제 해석하기	
4차시	이항정리	문제풀이 및 설명하기	평가2회
5차시	활동지	문제 해석하기	
6차시	활동지	문제 풀기(협동학습)	
7차시	활동지	문제 풀기(협동학습)	
8차시	활동지	문제 정리 (발견한 내용 정리)	평가3회
9차시	순열과 조합 기호	기호의 개념 말하기	평가4회
10차시	순열과 조합 기호	기호의 개념 말하기	평가5회



<그림 1> 연구절차

(3) 자료의 수집과 분석

1) 예비교수

학생 선정을 위해 2006년 11월부터 2007년 2월까지 약 3개월 동안 관찰기간을 가졌으며, 처음 선정했던 학생들과 4차시분의 예비 교수를 실시했다.

예비 교수에서 사례연구 대상자로 선정된 학생1과 학생2는 학교평가 3등급, 전국연합학력평가에서 5등급의 비슷한 성적을 받았으며, 개성이 강하고 자기표현을 잘 하지 않는 학생들이었다. 따라서, 연구과정에서 원활한 의사소통이 이루어지지 않았으며, 교사의 노력에도 불구하고 학생들의 협동을 기대하기가 어려웠다. 또한, 학교의 가장 구석진 곳에 있는 수학 교과실에서 수업을 함으로써 학생들이 수업 참여를 꺼려할 수 밖에 없는 외적 환경까지 더해졌다. 수학 교과실은 모둠 수업을 위해 큰 네모 탁자에 의자 네 개가 딸려 있었으며, 항상 어두워서 전등을 켜야만 수업이 가능한 곳이었다. 교사는 이러한 상황 속에서 경험부족으로 학생들에게 적절한 동기부여를 하지 못하고 있었다. 그리고, 연구가 진행되는 4회 동안 간간히 이루어지는 학생의 협동학습에 계속해서 간섭하려고 하였다. 교사 스스로가 발견이 이루어지기 전까지 걸리는 오랜 시간을 참아내지 못하고 있었으며, 이는 본 연구가 진행되는 과정에서도 자주 볼 수 있는 장면이었다. 이처럼 예비 교수 결과 학생 참여의지의 부족과 교사의 경험부족, 외적환경의 미비 등, 수업 진행시 보완해야 할 많은 것들을 얻을 수 있었다.

2) 자료의 수집과 분석

예비 교수의 단점을 보완하기 위해, S_1과 S_2를 선정할 때는 약간의 학력 차이가 나면서 서로에게 우호적인 학생들을 선정했다. 수업장소는 학생들의 출입이 잦은 도서관 푸른 글방으로 옮겨 10차시의 수업을 진행했다. 푸른 글방은 밝고, 환기가 잘되며 도서관의 책을 활용할 수 있다는 장점이 있었고, 학생 또한 매우 협조적이어서 수업진행이 원활했다. 1차시부터 4차시까지는 녹화는 하지 않은 채 비디오만 삼각지지대에 고정시켜 놓았고, 5차시부터 두 학생의 협동학습 과정을 중심으로 비디오 촬영이 이루어졌다.

교사는 수업을 위해서 2007년 3월 순열과 조합 단원 내용을 연구 대상자의 수준에 맞추어 재구성한 활동지와 평가문항을 제작했으며, 수업과 평가는 <표 5>와 같은 순서로 2007년 8, 9월에 이루어졌다. 학생의 소감 발표 내용은 모두 비디오로 녹화하고 관찰일지를 작성하였으며, 이러한 자료를 토대로 연구결과를 분석했다. 또한, 교사 연구자의 독단적 견해를 배제하기 위해 연구결과 분석에 동료교사 1인과 지도교수가 함께 참여했다.

V. 연구결과

1. 연구문제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

(1) 개념의 이해를 용이하게 할 수 있도록 하는 교사의 발문 기술에는 어떤 것들이 있는가?

'순열과 조합'은 특정한 공식을 사용하지 않는 문장제 문제로 구성되어 있었다. 따라서 전통적 교수법으로는 학생의 학습 유도에 한계가 있었으며, 새로운 교수법 도입이 절실히 요구되었다. 이에 본 연구에서는 '순열과 조합 단원' 의 지도에 발견학습법을 도입하였다. 발견학습에서 발문의 역할은 매우 중요하며 발문을 중요시하는 많은 연구 결과들이 있다. 그렇다면 '순열과 조합' 개념 이해를 용이하게 하는 발문 기술에는 어떤 것들이 있는지 알아보도록 하자.

(2) 발견을 통한 지도법이 학생의 학습에 미치는 영향은 무엇인가?

Shulman(1986)에 의하면 안내의 정도에 따라 교사의 교수법이 구분될 수 있다. 규칙이나 해가 모두 주어졌을 때 교수방법은 전적으로 설명식이라고 한다면, 규칙도 해도 주어지지 않은 교수 방법을 '순수한' 발견 교수라고 할 수 있다. 둘 중 하나가 주어졌을 때가 '안내되는' 발견 교수법이다. 본고에서는 '순열과 조합' 단원에서 안내되는 발견을 통한 지도법이 학생에게 어떠한 영향을 미치는지 정의적 측면에서 살펴보고자 한다.

2. 연구결과

(1) '개념의 이해를 용이하게 할 수 있도록 하는 교사

의 발문 기술에는 어떤 것들이 있는가?'에 대한 결과

먼저, 기호와 개념을 일치시키고자 할 때 교사가 효율적으로 사용할 수 있는 발문에 대해서 알아보자. 수학 교사들은 기호를 사용하지 않고도 순열과 조합 문제를 해결할 수 있다는 것을 잘 알고 있다. 또한, 기호 사용을 간과해서는 안 된다는 것도 인지하고 있다. 이것은 교사 스스로가 기호와 개념이 일치되었을 때의 기호 사용이 문제 이해와 풀이를 용이하게 만든다는 것을 잘 알고 있기 때문이다.

다음은 ${}_nP_r$의 기호를 설명하고 있는 과정이다.

> T : 크기가 다른 주사위 2개를 던져서 나오는 경우의 수를 구해보자. 몇 가지일까?
> S_2 : 36가지요.
> T : 어떻게 36가지가 나왔는가?
> S_1 : 6×6
> T : 왜 6×6을 했는가? ㉠
> (중략)
> T : 서로 다른 n개 중 r개를 선택해서 순서대로 배열하는 경우의 수를 ${}_nP_r$이라고 하자. ${}_nP_r$이 무슨 뜻인가? ㉡
> S_1 : 서로 다른 n개 중 r개를 선택해서 순서대로 배열하는 경우의 수? 으으으 너무 길다.
> T : 으응! 서로 다른 n개 중 r개를 선택해서 순서대로 배열하는 경우의 수이구나! 그런데, S_1 말대로 정말 길긴 길다. 그래서 기호가 필요한거지. 그럼 ${}_4P_2$는 무슨 뜻인가? ㉢
> S_2 : 서로 다른 4개 중 2개를 선택해서 순서대로 배열하는 경우의 수.
> T : 서로 다른 4개 중 2개를 선택해서 순서대로 배열하는 경우의 수는 몇 가지인가? ㉣
> (중략)
> T : 그러면 ${}_4P_3$을 이용할 수 있는 문제를 만들어 보자. ㉤
> S_2 : 서로 다른 4개 중 3개를 선택해서 순서대로 배열하는 경우의 수니까.......

기술이다. 무의식적으로 깨달은 것을 의식적으로 생각해 보도록 하는 기회는 학생에게 본인이 알고 있다고 생각하는 것의㉠의 경우는 교사가 학생이 무의식적으로 알고 있는 것에 대해서 의식적으로 생각할 수 있는 기회를 제공하는 발문 본질을 스스로 깨닫게 하는 중요한 과정이다. 이는 Polya의 '정의로 되돌아가기' 전략이며, Bruner가 언급한 선행지식과 관련된 부분을 명확하게 하기 위한 발문이다.

㉡과 ㉢은 기호설명을 한 후, 기호의 뜻이 무엇인가를 재확인하는 과정이다. 기호와 개념이 일치되게 하려면 이러한 재확인 과정이 꼭 필요하다. 여기에서 문제해결 과정에서의 해결전략을 위한 발문도 중요하지만, 이에 못지않게 개념을 확실하게 다져줄 수 있는 반복된 교사의 질문이 큰 도움이 되는 것으로 보인다. 이러한 재확인 과정을 권오남(2005) 등은 "재성(revoicing)"이라고 명명하면서 교사 담화의 중요한 특징으로 강조하고 있다.

> 재성은 교수자가 학생의 말이나 그 중의 일부를 반복하는 '반복(repetition)', 교수자가 학생의 말에 정보를 추가하는 '확장(expansion)', 교수자가 학생의 말을 새롭게 또는 다른 방법으로 진술하는 '재진술(rephrasing)', 교수자가 특정학생에게 생각, 주장, 논증의 공헌을 돌리는 '보고(reporting)'의 네 개의 하위 코드로 구분하였다. (권오남 외, 2005)

이처럼, 교수·학습 과정에서 오개념이 형성되지 않도록 교사는 도입부분에서 많은 노력을 기울여야 하겠다. 그러나, 이러한 노력에도 불구하고 오개념이 형성될 수 있는 가능성을 배제할 수는 없다. 따라서, 형성된 오개념을 잘 활용하는 교사의 지혜가 필요하며, 이러한 측면에서 오개념을 활용하여 개념을 정립해가는 Lakatos의 이론은 시사하는 바가 크다.

다음은 원순열에 대한 오개념을 이용한 수업 과정이다.

부모를 포함한 6명의 가족이 둥근 식탁에 둘러앉을 때, 엄마의 자리는 항상 고정되어 있다고 하자. 이 가족이 둥근 식탁에 둘러앉는 방법은 몇 가지인가?

> S_1 : 흐흐! 너무 쉽다. 5!?
> S_2 : 정말 쉽다. 응? 그런데 엄마 자리가 고정되어 있네?
> S_1 : 그러면 나머지 자리에 5명만 배열하면 되니까, 4!이겠다.
> S_2 : 맞다.
> T : 그래? 엄마 자리 고정시켜 놓고 나머지 자리에 5명을 배열하니까 4!이라고 했다! 그러면, 원순열로 계산한 건가?

S_1 : 둥근 식탁이니까, 원순열이죠. ㉠

T : 둥근 곳에 배열하면 모두 원순열인가? ㉡

S_2 : 네! 둥근 곳에 배열한 건 모두 원순열이었죠. ㉢

T : 흐흠. n명을 원탁에 배열하는 방법이 $(n-1)!$라고 했는데…. 그 공식이 나오게 된 원리가 뭐였더라? ㉣

S_2 : 먼저 일렬로 배열했죠. 그 다음에 일렬로 배열한 것을 원탁에 배열해 보면, 같은 배열이 n개씩 나왔죠. 그래서, $\frac{n!}{n}$을 했어요.

S_1 : 뭐라고? 다시 설명해봐.
(그림으로 S_2가 S_1에게 설명함)

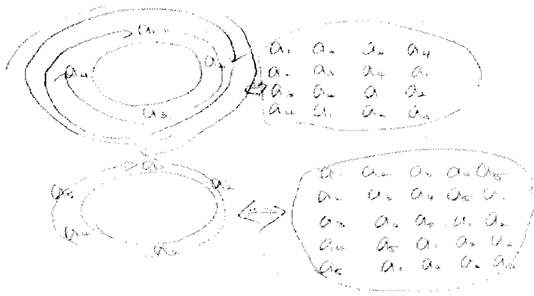
T : 그래! 일렬로 배열했을 때는 다른 것이었는데, 원탁에 배열하면 같은 배열이 되는 것이 n개씩 나왔었지. 그럼, 여기에서도 그럴까?
(S_1, S_2 직접 그림 그리고 써봄)

S_1 : 아니다! ㉤

S_2 : 그럼 원탁에 배열한다고 무조건 원순열인 건 아니라는 말인가요? ㉥

T : 그렇지! 둥근 곳에 배열한다고 무조건 원순열인 건 아니란다. 원순열에 대해서 다시 생각해 보자.

㉠과 ㉢에서 알 수 있듯이, S_1과 S_2는 원순열에 대한 오개념을 갖고 있었다. 그들의 오개념은 '원 위에 배열하는 것은 원순열이다.'였다. 이는 원순열 문제가 원탁 위에서의 자리배열 위주로 제시되어 왔기 때문이다. 따라서, 원 위에 배열하지만 원순열이 되지 않는 예, 또는 원 위에 배열한 건 아니지만 원순열이 되는 예를 제시함으로써 학생들이 새로운 경험을 할 수 있는 기회를 주어야 한다. 여기에서 교사는 ㉣처럼 오개념을 수정하기 위한 '되돌아가기' 전략을 사용하였다. 처음에 원순열의 개념을 설명했던 시점으로 돌아가서 원순열 공식이 나오게 된 원리부터 시작하였다. ㉤, ㉥처럼 두 학생이 순열에 대한 오개념을 인정하도록 하기 위해서 그림을 그려보는 과정이 병행되었다. 자신의 오개념을 확인하기 위한 과정으로 '되돌아가기', '그림으로 그려보기' 등 Polya의 문제해결 전략이 자주 사용됨을 알 수 있다. 결국 두 학생은 '원 위에 배열하는 것은 원순열이다'라는 추측을 기각하게 되었다. 두 학생은 이 문제를 통해서 새로운 추측을 하게 되었으며, 추측의 반박과 개선 또는 기각을 통해서 보다 엄밀한 추측에 도달하게 될 것이다. 비록, Lakatos처럼 어려운 개념을 다룬 것은 아니었지만 교사가 ㉡과 같이 말함으로써 학생들은 자신들의 원순열 개념에 대해서 다시 한 번 생각할 수 있는 기회를 갖게 되었다. 여기에서 주어진 문제는 '원 위에 배열하는 것은 원순열이다'의 반례로서 주어진 것이며 Lakatos에 의하면 이것은 전면적 반례에 해당된다.



<그림 2> S_1이 S_2와 함께 원순열의 개념을 찾아가는 과정

다음은 순열과 조합의 개념에 대한 수업 과정이다.

(문제) 여섯 개의 숫자 1,2,3,4,5,6이 있다. 이러한 조건 하에서 다음 기호에 대하여 아는 대로 쓰시오.

(1) ${}_nP_r$

개념	위의 조건하에서 기호에 맞는 문제 만들기

(2) ${}_nC_r$

개념	위의 조건하에서 기호에 맞는 문제 만들기

S_1 : 우리 둘 다 맞았다고 할 수 있나요?

T : 그럼, 너희 둘 모두 순열과 조합의 기호에 대해서 잘 알고 있는 것 같구나.(교사는 개념을 S_2와 같은 방법으로 설명했었다. S_1의 기호 설명은 교과서에서 제시한 방법이었다.)

S_2 : 그럼, 어느 쪽이 더 명확한가요?

T : 어느 쪽이든 본래의 기호 개념 의미에서 크게 벗어나지만 않으면 된다. 문제 만들기도 잘 했구나. 순열과 조합의 가장 큰 차이점이 무엇인지를 생각해 보자.㉠

S_1 : 그런데, S_2가 쓴 개념이 훨씬 의미가 명확한 것 같다. 순열에서는 순서가 의미 있다는 것을 명시

해 주었네. ㉡

S_2 : 순열과 조합은 '순서에 따라서 배열이 달라지는 가'가 가장 큰 차이잖아.

S_1 : 그래. 맞다. 네 말을 듣고 보니 훨씬 명확해 진 것 같아. 그런데, 문제 만들기도 약간 차이가 있네. 나는 '1,2,3,4,5,6을 한 번씩 사용해서 만들 수 있는 세 자리 자연수'라고 했는데, S_2는 '1,2,3,4,5,6 중 서로 다른 세 수를 사용해서 만들 수 있는 세 자리 자연수'라고 했네. ㉢

T : 그럼, 두개 모두 답을 구해보자. ㉣

S_1, S_2 : 같아요. 둘 다 ${}_6P_3$이예요.

T : 약간의 표현 차이가, 다른 문제처럼 보이게 했을 뿐이야. ㉤

교사는 두 사람의 답에 대해서 ㉠처럼 열려진 입장을 취했다. 발견학습에서 가장 중요한 것은 학생 스스로가 위축되지 않도록 '교사가 많은 배려를 해야 한다.'는 것이었다. 교사가 학생의 답에 대해서 정오(正誤)를 말했을 때, 학생들의 발견학습은 중지되곤 하였다. 그래서, 옳고 그름을 말하는 대신 한 번 더 생각할 수 있는 발문을 제시했다. S_1은 교사의 질문과 S_2와의 대화를 통해서 자신의 개념 설명의 부족한 점을 ㉡처럼 발견했다. Vygotsky에 의하면 S_1은 상호작용과 모방을 통해서 발견의 출발점에 섰다.

㉤은 순열과 조합의 선행연구에서 문제의 구조적 동형과 관계있다고 할 수 있다. 비록, 학생들이 만든 문제여서 아주 사소한 차이가 있었지만 두 문제가 결과적으로는 같은 문제였다는 것을 알려주고 있다. 이처럼 상호작용의 활성화를 위해서는 교사의 허용적인 태도와 인내심이 요구된다.

※ 여섯 개의 숫자 1,2,3,4,5,6 이 있다. 이러한 조건 하에서 다음 기호에 대하여 아는 대로 쓰시오.

(1) ${}_nP_r$

개념	위의 조건하에서 기호에 맞는 문제 만들기
서로 다른 n개 중에서 r개를 뽑아 순서대로 배열한 경우의 수	1,2,3,4,5,6 중 서로 다른 3개를 사용해 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수

<그림 3> S_1의 순열기호 개념 쓰기

※ 여섯 개의 숫자 1,2,3,4,5,6 이 있다. 이러한 조건 하에서 다음 기호에 대하여 아는 대로 쓰시오.

(1) ${}_nP_r$

개념	위의 조건하에서 기호에 맞는 문제 만들기
서로 다른 n개 중 r개를 뽑아 일렬로 배열하는 경우의 수	1,2,3,4,5,6 을 한번씩 사용하여 만들 수 있는 세자리 자연수는?

<그림 4> S_2의 순열기호 개념 쓰기

(1) 다섯 개의 숫자 1,1,2,2,2를 모두 사용하여 만들 수 있는 자연수의 개수를 구하여라.

(2) 1과 2를 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수를 구하여라.

S_1 : 두 문제도 같은 문제인가? (1)은 같은 것이 있는 순열이니까 간단하고, (2)는 1과 2로 어떻게 다섯 자리 자연수를 만드나? 두 자리 자연수 밖에 못 만드는데…. (침묵) ㉠

T : 다섯 자리 자연수에는 어떤 것들이 있을까? ㉡

S_2 : 12345, 11234, …. 아! 똑같은 숫자를 여러 번 쓸 수 있겠다!

S_1 : 뭐라고?

S_2 : 똑같은 숫자를 여러 번 쓸 수 있다고, 11111, 11112 이런 것들도 다섯 자리 자연수잖아.

S_1 : 아하! 맞다. 같은 숫자를 여러 번 쓸 수 있구나! 11111로, 11112로, 11122로, 11222로, 12222로, 22222로 만들 수 있는 순열을 찾으면 되겠구나! 이렇게 경우를 나누면 되겠다. 그러면 각자가 같은 것이 있는 순열이니까….

S_2 : 다섯 자리에 1또는 2를 넣는 것으로 생각해도 될 것 같은데,….

T : 각각 답이 얼마가 나오는지 풀어보자.

S_1, S_2 : 32. 똑같이 나오네.

T : 모두 잘 풀었다.

S_1 : 그러면 선생님 이 문제는 중복순열로 풀어도 되고, 같은 것이 있는 순열로 풀어도 된다는 말인가요? 중복순열과 같은 것이 있는 순열은 서로 다른 것이라고 했는데….

T : 중복순열, 같은 것이 있는 순열, 조합의 문제들은 얼마든지 서로를 호환해서 쓸 수 있다.

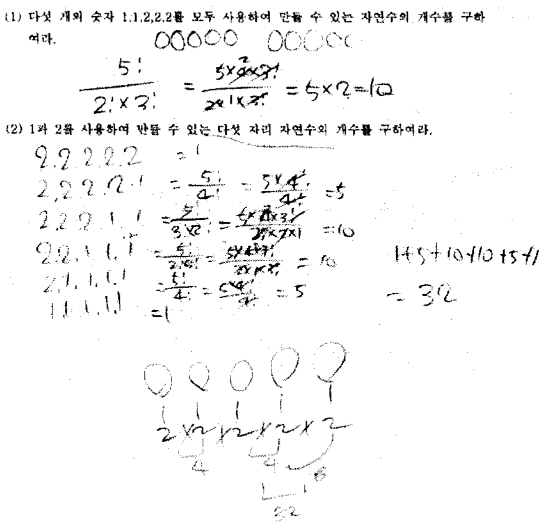
S_2 : 호환해서 쓸 수 있다는 게 조합문제를 순열로 풀 수도 있고, 순열문제를 조합으로 풀 수도 있다는 뜻인가요?

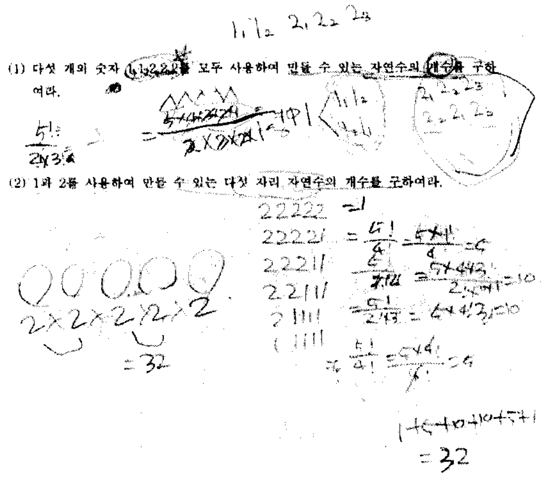
T : 그럼, 당연히 그럴 수 있지. 조합도 해석하기에 따라서는 순열을 이용할 수 있고, 실제로 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$로 쓰기도 하잖니? 얼마든지 서로를 이용해서 표현할 수 있단다. ㉢

S_2 : 그 식은 ${}_nP_r = r!\,{}_nC_r$로도 쓸 수 있겠죠. 그래서, 순열과 조합이 왔다 갔다 하긴 하는데, 그런데 그 식이 왜 나왔더라? ㉣

학생이 ㉠과 같은 반응을 보이자, 교사는 ㉡을 통해서 같은 숫자가 여러 번 쓰인 다섯 자리 자연수가 있음을 학생들 스스로 발견하도록 했다. S_1이 ㉠처럼 말하자, S_2는 묵묵부답으로 일관했다. 후의 면담에서 S_2는 순간적으로 S_1과 같은 의문을 가졌었다고 했다.

교사가 ㉢처럼 말하자 학생들은 기호의 의미를 다시 한 번 생각하기 시작했다. 때에 따라서, 교사는 ㉢처럼 학생이 확산적 사고를 할 수 있는, 학생의 현재 수준을 뛰어넘는 '정리'를 해 줄 필요가 있었다. '순열과 조합'과 같은 단원에서 기호의 의미에 대한 이와 같은 '정리'는 단순한 '내용정리'가 아니다. 학생의 현재 사고 수준을 한 단계 높여줄 수 있는 '확산되고 유의미한 정리'라고 할 수 있다





<그림 5> S_1, S_2 의 풀이과정

S_2 : 선생님이 다섯 자리 자연수를 말해보라고 했을 때, 갑자기 같은 수가 반복해서 쓰여도 된다는 생각이 들더라구요. 그래서, 숫자 두 개로 100자리 자연수도 만들 수 있다는 것을 알게 됐어요.

T : 선생님이 했던 말들이 도움이 됐었는지 모르겠구나.

S_1 : 순열, 조합이 서로를 이용하여 표현할 수 있다는 건, 아직 이해가 안되요. 그런데, 대신 순열과 조합에서 기호의 의미를 아는 것이 중요할 거는 같네요.

S_2 : 그런데, 너무 머리 아프다. 머리가 복잡해지네요.

다음은 수업 후에 교사와 학생의 면담내용이다.

T : 선생님이 자꾸 개념을 물어봐서 귀찮지는 않았니?

S_1 : 아니요. 실제 수업에서도 이렇게 계속 물어보셨으면 좋겠어요. 선생님이 물어보실 때마다 새롭게 느껴져요.

T : S_2는 어떻게 생각하니?

S_2 : 개념이 중요하다는 걸 알겠어요. 그런데, 깊이 들어가니까 너무 어려워요. 복잡하기도 하구요. 어쨌든 개념이 명확해지긴 했어요.

이처럼 개념도입 단계에서 교사의 재확인, 오개념 수정을 위한 발문 등은 학생의 개념 확립을 위해서 유용한 것으로 보인다. 또한, S_1은 실제 수업에서도 개념 확인

을 위한 과정이 필요하다고 말하고 있다. 이는 개념 형성을 위해서, 학생에게 같은 개념을 새로운 형태로 반복해서 제시할 수 있는 기회를 부여하는 교사의 노력이 필요함을 말해 주고 있다.

(2) '발견을 통한 지도법이 학생의 학습에 미치는 영향은 무엇인가?'에 대한 결과

개념이 정립된 후에는 적절한 시기에 최소한의 교사 안내가 이루어져야 하며, 학생들끼리의 상호작용이 훨씬 더 중요하다. 교사는 주로 개념도입 과정에서 안내자 역할과 학생들이 발견한 것을 정리해 주는 정리자로서의 역할을 하였다. 이 때, S_2와 S_1은 비중의 차이가 있기는 했지만 서로의 안내자 역할을 하는 것이 관찰되었다. S_1은 주로 S_2에게 의존하여 문제를 해결해 나갔으며, 문제해결의 주도자 역할도 S_2가 주로 하였다. S_1의 발견학습 형태는 S_2의 발견유형을 모방하는 형태로 나타났다.

<u>교수 에피소드1</u>

(문제) 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c라고 할 때, 등식 $(a-b)(a-2c)=0$이 성립하는 경우의 수는?

S_1 : 나는 45가 나왔는데, 너는?

S_2 : 51 아닌가?

S_1 : 이상하네. 네 풀이과정 좀 줘봐. … 이건 $a=b$ 또는 $a=2c$이므로, 여기까지는 같은데 a, b, c의 형태가 (a, a, c), $(2c, b, c)$ 여기도 같고,…. 응? 이상하다. 6×6, 3×6이라고? 왜? 6×5, 3×5 아닌가?

S_2 : 왜 6×5, 3×5인데?

S_1 : a와 c는 다르니까, b와 c도 다르니까 ㉠

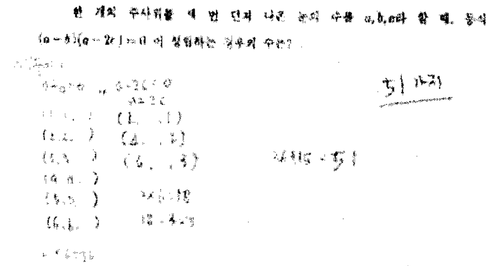
S_2 : 문자가 다르면 서로 다른 수여야 하나? ㉡ 달라야 한다는 조건이 없는데, 이상하네. 예를 들어서 (1, 1, 1) 이나 (2, 2, 2)도 $a=b$를 만족하잖아. 그리고, (4, 2, 2)는 $a=2c$를 만족하고, … 문자가 다르다고 서로 다를 이유가 없는데….

S_1 : 그러고 보니, 주사위를 여러 번 던지면 처음에 나온 숫자가 다음 번에 또 나올 수 있구나! 그러면, 3은 왜 뺐어? 겹치는 경우가 있었나?

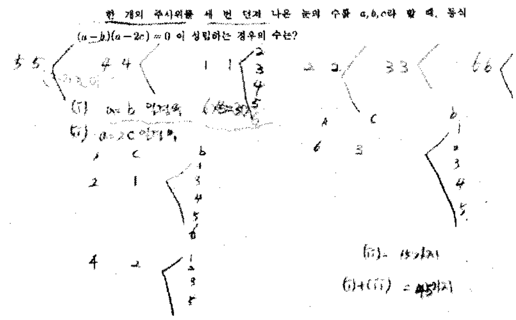
S_2 : 응, $a=b$, $a=2c$를 동시에 만족하는 경우가 있잖아. 형태가 $(2c, 2c, c)$처럼 되어있을 때. (4, 4, 2)는 $a=b$일 때도 세어지고 $a=2c$일 때도 세어지니까 한번 빼야지.

T : 그럼 경우의 수는 몇 가지인가?

S_1 : 51이요.



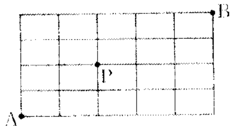
<그림 6> S_2의 문제풀이



<그림 7> S_1의 문제풀이

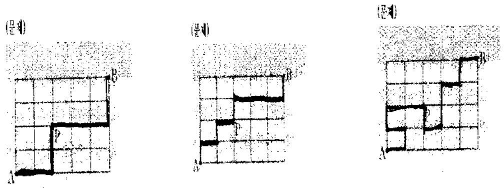
위의 문제 풀이과정에서 교사는 전혀 개입할 필요가 없었다. 이 문제의 경우는 S_1과 S_2 모두 유사한 형태의 풀이 방법을 사용하였다. S_1이 ㉠처럼 생각한 것에 대해서, S_2는 문자가 다르다고 해서 서로 다른 수일 필요는 없다고 설명해 준다. 이처럼 S_1에게서 문자에 대한 오류의 전형적인 모습을 관찰할 수 있었으며, 교사는 S_1, S_2에게 다시 한 번 이 문제에 대해 설명할 수 있는 기회를 주었다. a, b, c가 서로 다른 문자이므로 서로 다른 수일 것이라고 생각한 것은 변수의 개념에 대한 선행연구에서 보여진 오류 중의 하나이다(김남희, 1997). S_1은 교사의 장황한 설명보다는 S_2와의 대화를 통해서 S_2의 사고방식을 모방해 가고 있었다.

교수 에피소드2

> (문제)
>
> 
>
>
> 위와 같은 도로망이 있다. A지점을 출발하여 P지점을 지나서 B지점으로 가는 최단 경로의 수를 구하시오.

S_1 : 같은 것이 있는 순열로 하면 되겠다. ㉠
T : 그런데, 왜 같은 것이 있는 순열로 계산하지?
S_1 : 비슷한 문제에서 풀이과정이 그렇게 나왔던데요.
T : A에서 P를 거쳐서 B로 가는 방법을 그려보자.
S_1, S_2 : (경로 그리기: 그림 S_1, 그림 S_2)
T : (그림 T)처럼 그려도 되지 않나?
S_1 : 정말 (그림 T)처럼 그려도 되네.
(침묵)
T : A에서 P, P에서 B로 최단거리로 가려면, 오른쪽, 왼쪽, 위, 아래에서 어떤 쪽으로 움직여야 할까? ㉡
S_2 : 오른쪽과 위로 움직여야겠네.
S_1 : 아! 그렇네.
(중략)
S_2 : 어떻게 움직이든 A에서 P로 가려면 항상 오른쪽으로는 2칸, 위쪽으로 2칸 움직여야 하고,…….

위의 대화내용에서 알 수 있듯이 S_1은 문제를 보자마자 풀이과정을 찾아내었다. 그러나, 교사가 왜 그렇게 문제를 풀었는가 질문했을 때, 쉽게 대답하지 못하고 우물거리는 것을 관찰할 수 있었다. (침묵)에서 교사는 S_1, S_2가 생각할 수 있는 시간을 주었으나, 학생들은 반응 없이 3분여 동안의 시간을 보냈다. S_1과 S_2는 무반응 상태를 오랜 시간동안 방치하면 더 이상의 진전이 없고, 학습의욕이 현저하게 떨어지는 것을 관찰할 수 있었다. 이에, 교사는 ㉡과 같은 질문을 던졌다. 질문 ㉡에 대한 S_2의 대답으로 두 학생의 협동학습이 활발하게 이루어지기 시작했다.



(그림 S_1) (그림 S_2) (그림 T)

<그림 8> S_1, S_2, T의 최단거리 찾기

여기에서 S_2는 이 문제는 조합으로 풀어도 된다고 대답하면서 다른 풀이법을 교사에게 알려주었다.

T : 그러면 왜 조합을 사용했을까?
S_2 : ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$로 계산해도 답은 똑같은데…. 왜 조합으로 풀어도 똑같나?
S_1 : ${}_5C_2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!}$ 하고, a, a, b, b, b를 배열하는 것처럼 5개 중에서 같은 것이 2개, 3개 있는 것을 일렬로 배열하는 계산 결과가 같다. ㉠
T : 왜 계산결과가 같을까? ㉡
(침묵)
T : ${}_5C_2$는 무슨 뜻인가? ㉢
S_2 : 서로 다른 5개 중에서 2개를 고르는 경우의 수!
S_1 : 그럼, a, a, b, b, b를 일렬로 배열하는 것이 서로 다른 5개 중에서 2개를 고르는 경우와 같단 말인가? ㉣
(침묵)
T : 그럼 a, a, b, b, b를 일렬로 배열하려면 좌석이 몇 개 필요한가? ㉤
S_2 : ①②③④⑤번 좌석이 필요하죠.
S_1 : 아! 알았다! 5개 좌석 중에서 a가 들어갈 자리 2개만 골라주면 되겠구나! 그러면, 나머지 세 개의 자리에는 b를 넣어주면 되니까 ….
S_2 : 뭐라고? 다시 설명해 봐. ㉥

S_1은 ㉠에서는 조합과 같은 것이 있는 순열의 계산결과가 같으므로 두 가지 방법으로 풀어도 된다고 말하고 싶어했다. 그래서, ㉡과 같은 교사의 질문에 대답을

할 수가 없었다. 그러나, ${}_{n}C_{r}$의 의미를 묻는 교사의 질문에 ㉣처럼 의미상 두 가지 방법이 같은 것일 수도 있다는 생각을 하게 된다. 그래서, ㉥처럼 S_1이 안내자가 되고, S_2가 S_1의 발견과정을 모방하게 된다. 이처럼, 두 학생은 서로가 안내자와 안내자를 모방하는 발견자의 역할을 바꾸어 가면서 협동학습을 진행했다. 이는 Vygotsky(1978)의 주장대로 수준이 높은 학생의 도움으로 발견해 가는 과정을 보여주고 있다. 따라서, S_2는 S_1의 조력을 통해 순열과 조합 개념에 대한 새로운 근접발달영역을 창출하게 되었다.

위의 대화 내용에서도 알 수 있듯이, 발견학습 과정에서 (침묵)의 상태가 자주 발생하게 된다. 탐구하고 발견하는 과정에서 (침묵)상태는 스스로 생각하는 시간을 가질 수 있고, 상대방에게 자신의 생각을 알리기 전에 생각을 정리할 수 있는 유용한 시간이다. 그러나, 너무 오랫동안 (침묵)상태를 유지하는 것은 학습 집중력을 떨어뜨리는 결과를 초래하므로 교사의 적절한 대응이 있어야 할 것이다. 즉, 교사는 (침묵)상태를 조절해 주는 비계 역할을 했다고 볼 수 있다.

<u>교수 에피소드3</u>

(문제) 정오각뿔의 각 면을 6가지 색으로 칠하는 방법은 모두 몇 가지인가?

S_1 : 어! $\frac{5!}{6}$ 아닌가?

S_2 : 아닌데,….5!은 뭐고, 나누기 6은 왜 했어?

S_1 : 아까 T선생님이 원순열을 계산할 때, n개를 원순열로 배열하면 $\frac{n!}{n}$이라고 하던데,…. 그러니까, 6개 배열한 것 중에 5개만 원순열로 배열하면 되니까, $\frac{5!}{6}$ 아닌가? ㉠

S_2 : 와! 그건 아닌데. 6개를 원탁에 배열하는 원순열이 $\frac{6!}{6}$인 이유가 있었잖아.㉡

S_1 : 이유가 뭐였더라. 먼저 일렬로 6명을 배열한 것까지는 생각나는데….

S_2 : 원순열로 배열하기 전에 먼저 일렬로 순서대로 배열하면 6!이고, 다음에 원탁에 각각을 배열하지.

S_1 : 그런데, 왜 나누기 6을 했더라?

S_2 : 6!가지 중에 일렬로 배열하면 다른 배열인데, 원탁에 배열하면 같아지는 배열이 생기던데. 뭐였더라? 한 번 찾아보자.

S_1 : $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$을 일렬로 배열한 것과, 원탁에 배열한 것이 어떤 차이가 있지?

S_2 : 원탁 그림에 a_1부터 배열해 보자.
$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_6$하고, $a_2, a_3, a_4, \cdots, a_6$과 서로 같을까? 다를까?

S_1 : 달라, 달라!

S_2 : 같잖아!

S_1 : 으으으! 잘 모르겠어. 야, 직접 해보자. (동전 여러 개에 라벨 붙여서 시행). 아아! 맞다. 배열 자체에는 변화가 없구나! 그냥, 어디서부터 출발했냐에 따라서 다르게 보였을 뿐이구나! 그런데, 왜 나누기 6이야? ㉢

S_2 : 6개가 묶여서 1개로 되니까,…㉣

S_1 : 잘 모르겠어.

T : 6÷2는 얼마지?㉤

S_1 : 3이요.

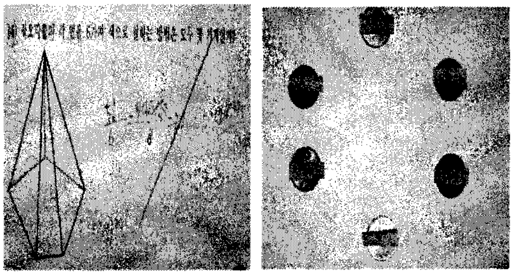
T : 왜?

S_2 : 6개를 2개씩 하나로 묶으면 3묶음이 나오니까.

T : 그럼 거꾸로 6개를 2개씩 하나로 묶는 경우를 뭐라고 해야 할까?

S_1 : 6÷2 아하! 순서대로 일렬로 배열한 6!개를 6개씩 하나로 묶었으니까, $\frac{6!}{6}$이구나! 그럼 이 문제는 5개만 원순열로 배열하니까 $\frac{5!}{5}$개구나. ㉥

S_2 : 그 다음에 밑면에 들어갈 수 있는 수가 6개니까, $5\times\frac{5!}{5}$가 된다.



<그림 9> S_1의 문제풀이

㉠에서 S_1은 원순열에 대한 공식을 정확히 기억하고

있었다. 그러나, 원리를 확실히 이해하지 못해서 위와 같은 문제에 틀린 답을 제시했다. S_2는 자신이 알고 있는 원순열의 개념을 S_1에게 설명하려고 노력했다. 그러나, S_1은 S_2의 설명보다는 ⓒ처럼 직접 시행해 보면 뭔가 알 수 있을 것이라고 생각했다. 그리고는 원순열과 순열과의 차이점을 깨닫게 되었다. S_2는 원순열과 순열의 차이점을 나눗셈의 개념을 이용해서 이해하고 있다고 답했다. 그래서, ⓔ에서처럼 S_1에게 나눗셈의 개념을 설명하려고 시도했다. 그러나, S_1은 여전히 이해하지 못하고 있다. 결국 ⓜ에서 교사가 나눗셈의 개념에 대해서 질문하고, S_1은 ⓗ처럼 나눗셈의 개념을 이용해서 원순열의 개념을 깨닫게 되었다. 교사는 나눗셈의 개념에 대해서 학생이 이미 알고 있는 사실을 확인하면서, '거꾸로 생각하기' 과정을 한 번 더 거쳤다. '거꾸로 생각하기'는 무의식적으로 알고 있는 개념을 의식화하는데 효과적인 것으로 보인다. 이것은 Polya의 문제해결 전략에도 언급되어 있으며, Polya는 이것을 '정의로 되돌아가기'라고 표현하였다.

이처럼 S_1은 S_2의 도움을 받고, 직접 실행해 보면서 교사의 개념설명 만으로는 부족했던 원순열의 개념을 이해하게 되었다. 이 때 교사는 학생이 무의식적으로 알고 있는 나눗셈의 개념을 의식화하기 위한 안내를 해 주었다. S_1은 소견 발표회에서 언급했듯이, 동료 S_2가 사용하는 언어를 교사의 언어보다 더 쉽게 이해하는 것 같았다. 이처럼 교수·학습 과정에서 심리적 안정감은 학습을 위한 전제조건이며 S_1이 S_2와 활발한 상호작용을 하게 된 것은 동료와의 유대감이 형성된 때문인 것으로 보인다.

이 문제를 잘못 풀었던 S_1의 경우는 형식적 수학에 충실하고자 했다. 그래서, 공식을 확실히 기억하고 있었고, 원순열에 대한 오개념을 가지고 잘못된 일반화를 시도했다. 그것이 비록 잘못되었다고 할지라도 S_1은 공식을 간단히 사용할 수 있는 잘못된 일반화가 장시간의 탐구과정보다 편하게 느껴졌다고 했다.

교수 에피소드4

(문제) 회원 10명인 어떤 모임에서 각 회원이 나머지 다른 회원들과 꼭 한번씩 악수할 때, 회원들끼리 서로 악수한 횟수를 구하여라.

T : 와! 둘 다 너무 잘했구나. 그런데, 조합의 계산 방법이 약간 다르네. 한 번 설명해 보렴.

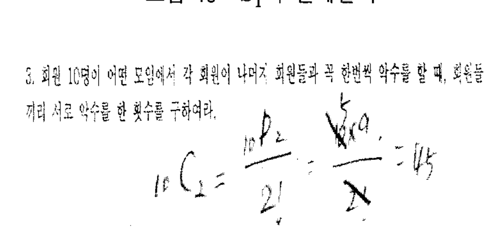
S_1 : 서로 다른 10명의 회원 중에서 2명을 고르기만 하면 되니까, ${}_{10}C_2$이구요. ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$을 이용해서 문제를 풀었어요.

T : 그럼, 조그맣게 써진 부분은 뭐니?

S_1 : 아까, S_2가 가르쳐 줬잖아요. 10개 중에 2개를 고른다는 a를 먼저 뽑고, b를 뽑거나 b를 먼저 뽑고, a를 뽑거나 어쨌든 a, b를 뽑은 건 마찬가지구요. 그래서, 먼저 10개 중 2개를 순서대로 뽑고 나서 …. 순서를 고려하지 않아도 되니까, 2개가 하나로 묶어져서 나누기 2를 했어요. 계산해 보니, 답이 같게 나오더라구요. ㉠

T : S_2가 쓴 것은 약간 다른데, 어떤 의미지?

S_1 : S_1이 쓴 것과 같은 의미인데요. 저는 a, b 두 개를 순서대로 배열한 방법이 하나로 묶어졌다는 의미에서 2!을 사용했어요. ㉡



<그림 10> S_1의 문제풀이

<그림 11> S_2의 문제풀이

교사는 두 학생이 이 문제를 제대로 풀 수 있다고 해석하고, 풀이과정을 보면서 자신의 풀이과정을 설명해 보도록 했다. S_1은 풀이과정을 설명하면서 공식 활용에 익숙해져 있는 상태였으나, 차츰 공식이 나오게 된 원리에 대해서 고민하게 되었다고 했다. 그래서, 풀이과정에 대한 교사의 질문에 ㉠과 같이 답하고 있다. ㉠에서는 나누기의 개념을 설명한 과정이 나오는데, 이것은 앞의 문제에서 S_2의 설명을 모방한 것으로 보인다.

㉡에서 교사는 S_2에게 아주 잘했다고 칭찬해 주었다. 그러자, S_2는 S_1이 교사의 질문에 답하는 것을 보고, ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$이라는 식이 왜 나왔는지를 알게 되었다고 답했다. 즉, 기본개념은 S_2가 먼저 알고 있었지만 S_1의 설명을 듣고 S_2는 기본개념이 공식으로 일반화 될 수 있었던 과정을 깨닫게 된 것이다.

<u>교수 에피소드5</u>

(문제) 13명의 배구선수 중에서 주장 한명을 뽑고, 나머지 5명을 뽑는 경우의 수를 구하여라.

S_1 : 13명 중에서 1명의 주장을 뽑는다. 그것이 ${}_{13}C_1$이고, 나머지 12명 중에서 5명을 뽑는 경우니까, ${}_{12}C_5$. 그래서 두 개를 곱하면 되지.

S_2 : 응. 나는 일단 13명 중에서 1명을 뽑는 방법은 13가지라고 알고 있었어. 그래서 기호로 표현하지 않았어. 그리고, 주장을 제외하고 나머지 12명 중에서 5명을 뽑아야 하니까, 그것은 ${}_{12}C_5$로 썼지.

T : 그런데, S_1아. 조합의 기호를 계산할 때, 여전히 공식에 의존하고 있는 것 같다.㉠

S_1 : 하지만, 이제는 그 공식이 나오게 된 원리를 정확히 알고 있어요. 왜 ${}_{12}C_5 = \frac{12!}{5!7!}$인지 알아요. 먼저, 12명 중에서 5명을 순서대로 배열하고, 이 문제에서 순서는 의미가 없으니까, a, b, c, d, e 5명을 순서대로 배열한 경우가 하나로 묶어지는 거죠. 그래서 나누기 5!이요.㉡

T : 그럼, $\frac{12!}{7!}$이 12명 중에서 5명을 순서대로 배열하는 방법이니? ㉢

S_1 : 그러니까,…. 그것도 공식에 그렇게 나왔던데. ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$이라고,…. 그리고 계산도 같아요. ㉣

T : S_2는 이 공식에 대해서 어떻게 생각하니?

S_2 : 그러니까요…. 공식이 많은 개수를 순서대로 배열할 때, 필요하다고 한 것까지는 기억이 나는대요. 뭐였더라.

T : $n!$이 무슨 뜻이었지?

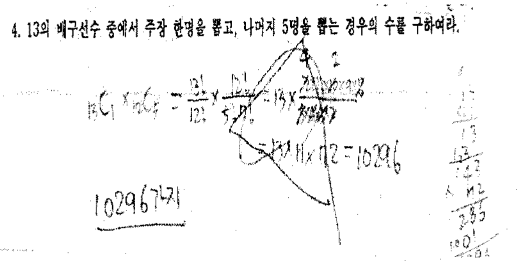
S_1 : $1\times2\times3\times\cdots\times n$이요.

S_2 : 아! 맞다! 만약에 ${}_{100}P_{30}$을 계산하려면 서로 다른 100개 중에서 30개를 순서대로 배열해야 하니까 좌석이 30개가 생겨서 첫 번째 자리에 100개가 들어갈 수 있고, 두 번째 자리에 99개가 들어갈 수가 있고,…. 30개의 숫자를 곱해야 해서 $n!$을 사용한다고 했어요.㉤

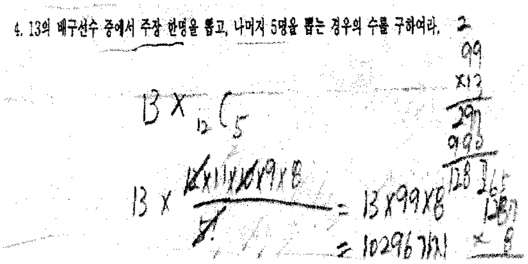
S_1 : 언제 그런 설명도 했었나? 기억이 안나네. 그런데, 선생님이 말한대로 의미상으로 문제를 푼다면, 30개의 숫자를 언제 다 곱하냐? 흐흠.㉥

S_2 : 이제 기억이 난다. 그래서, 여러 개의 숫자를 곱해야 할 때, 사용하려고 ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$을 외우라고 했던 것 같아.

T : 그래, 바로 그거야.



<그림 12> S_1의 문제풀이



<그림 13> S_2의 문제풀이

㉠에서 교사는 S_1이 조합의 의미를 정확히 모르고 있다고 생각했다. 풀이과정만 봐서는 마치 공식을 사용해서 푼 것처럼 보였기 때문이다. 그러나, S_1은 기호의 계산 과정에서 사용된 나눗셈의 의미를 정확히 설명했다. 교사는 ㉢처럼 또 한 번 질문했다. 즉, 조합에 나온 공식 중 일부가 순열을 뜻하는가를 질문한 것이다. S_1은 또 공식에 그렇게 나왔었다고 애매하게 대답했다. 같은 질문을 S_2에게 하자, S_2는 ㉤처럼 답했다. 정확히는 기억하고 있지 않았지만, 왜 $n!$을 사용하고 있는가를 인지하고 있었다.

S_1은 ㉥과 같이 말함으로써, '교사가 가르친대로 학생이 학습하지 않는다'는 것을 보여주고 있다. 대부분의 학생들이 교사가 가르친 내용을 자신만의 방식으로 받아들이고 있다. 또는, 교사가 가르친 방식을 전혀 받아들이지 않고 있기도 하다.

S_2는 교사의 사고방식을 기억을 되살리면서 모방해 가고 있었고, S_1은 전혀 받아들이지 못하고 있다가 S_2의 설명을 듣고 S_2를 모방해 가고 있는 듯 했다. 실제로, 수업이 끝난 후의 소견 발표에서 S_1은 S_2의 설명이 훨씬 쉬웠고, S_2가 사용한 방법으로 자신도 문제를 풀어 나갔다고 답했다.

<u>교수 에피소드6</u>

(문제) 붉은공 4개와 흰공 6개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 A가 먼저 공 2개를 꺼낸 다음 B가 2개를 꺼내어 붉은 공을 많이 가진 사람이 이기는 것으로 하자. (1) A가 이기는 경우 분류해서 쓰기 (경우의 수를 구하는 것이 아님) (2) B가 이기는 경우 분류해서 쓰기 (경우의 수를 구하는 것이 아님)

S_1 : A가 이기려면 붉은 공의 개수가 어떻게 되야 하나? 으! 머리 아파! 글씨 쓰기 귀찮다. 붉은 공은 R로, 흰 공은 W라고 써서 A의 붉은 공의 개수가 더 많아야 하니까….

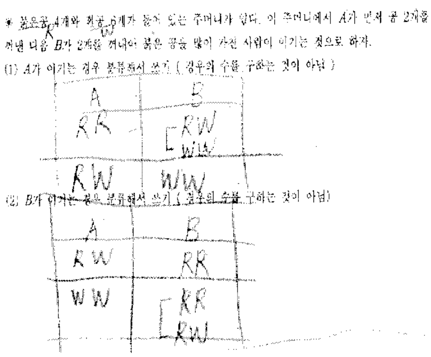
S_2 : 그래, 문자로 표시하면 훨씬 간단하겠구나! 나는 글로 일일이 썼는데 ….

S_1 : 내가 표로 만든 것과 네가 글로 쓴 것이 같은 의미일까? 너, 너무 어렵게 썼다. 왜 갑자기 B에서는 흰 공의 개수를 따진 거야? 그냥 붉은 공 개수로 계속 나갈 것이지. ㉠

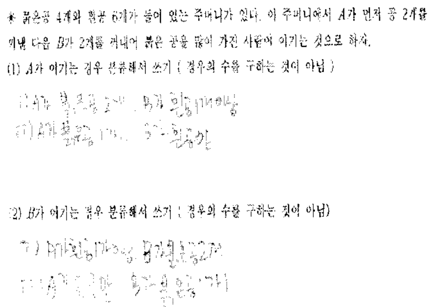
S_2 : 그래, 정말 그러네. 일단, 의미가 같은지 먼저 보자. A가 붉은공 2개, B가 흰공 1개 이상이라는 말은 기호로 표시하면 A는 RR, B는 RW 또는 WW. 네가 그린 표의 첫 번째 줄하고 똑같이 나오네. ㉡

S_1 : 그래! 같은 의미다.

S_2 : 우리, 경우의 수도 한번 구해 볼까? ㉢



<그림 14> S_1의 문제풀이



<그림 15> S_2의 문제풀이

㉠에서 S_1은 '분류하기' 기법을 S_2보다 많이 알고 있는 듯하다. S_1은 '분류하기'에서 '기준'이 일정해야 분류하기가 쉬웠다고 했다. S_2는 ㉡처럼 S_1의 분류방법이 훨씬 효율적이라고 생각했으며, ㉢처럼 경우의 수를 직접 구해보자고 제안했다. S_2는 이 문제에서 '분류하기'의

한 기법을 S_1에게 배웠으며, 문제에서 요구하지는 않았으나 경우의 수를 구해보는 것이 재미있었다고 답했다.

Ⅵ. 결론 및 제언

순열과 조합은 단순한 공식만으로는 풀 수 없었으며, 다양한 문제가 문장제 형태로 제시되고 있었다. 또한 순열과 조합 개념 사이의 구조적인 이해를 위해서는 '수세기의 형식화'인 사칙연산의 다양한 개념에 대한 확고한 이해가 필요했다(Bruner, 1960). 따라서 전통적 교수·학습법으로는 문장제가 대부분인 순열과 조합의 이해에 어려움을 겪을 수 밖에 없었으며, 비형식적인 개념에서 출발하여 형식적 완성을 도모할 수 있는 발견학습법의 도입이 적절한 것으로 보였다. 이에 본 연구에서는 순열과 조합에서 발견학습법의 활용을 제안하였으며 발견학습법이 학생의 학습에 어떤 영향을 미치는지 살펴보고자 하였다.

탈교과적 문장제 문제가 대다수인 순열과 조합은 이산수학과 수학Ⅰ의 한 단원으로서 새로운 교수법을 활용할 수 있는 여러 가지 조건을 갖추고 있었다. 비슷한 문제 상황 속에서 조건을 변형시켜 다양한 문제를 만들 수 있었고, 문제 풀이 과정에서 많은 논쟁거리를 얻을 수 있었다. 이에 교사는 다양한 문장제 문제 상황을 제시하고 적절한 발문을 통해서 수준이 다른 동료 학생과의 협동 학습을 유도하였으며, 문제 해결에 동료학생의 도움을 받을 수 있도록 하였다.

또한 발견을 통한 협동학습에서 교사는 Polya의 문제해결 전략에 언급이 되어있는 '그림 그리기', '거꾸로 생각하기'등을 활용하여 문장을 구체화 해 보도록 유도하였으며, 수준이 다른 동료와의 상호작용이 사고의 구체화에 효과적이라고 결론지었다. 실제로 학생과의 면담에서 S_1은 쓰기와 말하기를 통한 동료와의 상호작용이 사고를 구체화 하는데 정서적인 안정감을 주었다고 대답하였다. 위의 실험교수에서도 알 수 있듯이 S_1과 S_2는 서로가 더 편하고 쉬운 방법을 사용한 쪽의 탐구과정을 모방하고 있었다. 교사의 개입은 주로 개념 도입과 개념 정리 부분에서 이루어졌으며, 교사는 함부로 '정답' 또는 '오답'을 말하지 않았다.

S_1과 S_2는 이 수업이 끝난 후, 소감발표회에서 몇 가지 의견을 제시했다.

첫째, S_1은 S_2와 같은 친절한 동료가 함께 수업을 진행해 간다는 것이 즐거웠다고 했다. S_1은 S_2의 발견과정을 자세히 관찰하고, 질문함으로써 자신의 사고 과정을 구체화 해갔다. 또한, S_1은 교사의 안내보다는 동료의 안내가 심리적으로 훨씬 가깝게 느껴졌으며, 그 이유 중 하나로 교사의 언어보다는 동료의 언어 사용이 친근하게 느껴졌기 때문이라고 답했다.

둘째, S_2는 S_1에게 본인의 발견과정을 설명해 줌으로써 자신이 알고 있는 것이 무엇인가를 더 정확하게 알 수 있었다고 했다. S_1이 던지는 질문이 처음에는 사소한 질문이라고 생각되었지만, S_2가 발견한 것 중 오류가 생길 수 있는 부분을 S_1의 질문에 대해 답하면서 수정해 갈 수 있었다고 한다.

셋째, S_1은 어느 순간 스스로 문제를 풀 수 있다는 것을 깨닫게 되었다고 했다. S_2와 대화하면서 뭔가를 깨닫게 되었고, S_1이 무심코 깨달은 것이 무엇인가를 의식화 하는 것이 이 수업에서 교사의 역할이었다.

넷째, S_1은 이러한 수업이 재미있기는 했지만, 공식으로만 풀 수 있다면 공식을 가지고 풀 수 있는 방법을 알려 주었으면 좋겠다고 했다. 이 의견에는 S_2도 동감하면서, 시간이 너무 오래 걸린다는 단점도 지적했다. 여기에서 교사는 형식적인 내용을 지나치게 강조하지는 않았는지, 비형식적인 요소를 강조한 수업을 했음에도 형식적 요소의 평가를 하지는 않았는지, 깊은 사고력을 필요로 하는 문제를 시간이 오래 걸린다는 이유로 기피하지는 않았는지 반성해 보아야 하겠다.

이 외에도 활동지 문제 유형이 더 다양했으면 좋겠다는 등의 의견도 제시되었다. 즉, 교재를 재구성하는 교사의 노력이 더 필요할 것으로 보인다.

위의 학생들의 답변에서 알 수 있듯이 발견학습법을 활용한 순열과 조합의 지도는 정의적인 측면에서 S_1, S_2에게 큰 도움이 되었던 것으로 보인다. 특히, 이런 수업이 재미있었다는 답에서 교사는 한가닥 희망을 갖게 되었다. 이외에도 본고에서는 발견학습 과정에서 유용하게 쓰일 수 있는 교사의 발문 기술에 대해서 논의하면서 반복된 개념의 재확인 발문과 무의식적으로 알고 있는 것을 의식화하는 발문, 오개념을 활용한 발문의 중요성

을 강조했다. 또한 학생이 교사를 모방하기도 하지만 수준이 더 높은 동료 학생을 모방하기도 한다는 것을 인지해야 하며, 따라서 교사는 수준이 더 높은 동료 학생을 활용할 수 있어야 한다고 제안했다. 이는 Vygotsky(1978)와 Lakatos(1976)의 이론을 활용한 것이었으며, 학생들의 반응 또한 긍정적이었다.

본 사례연구에서 S_1과 S_2 두 학생은 마지막 소감발표에서 순열과 조합을 공부하면서 여러 번 생각했고, 많은 시행착오를 겪었으며, 시간이 너무 많이 걸렸지만 이러한 수업이 재미있었다고 답했다. 이처럼 발견을 통한 협동학습에 대해서 S_1과 S_2 두 학생은 긍정적 반응을 보여주었으나, '순열과 조합 단원의 학업성취도에 어떤 영향을 주었는가'에 대해서는 더 많은 연구가 필요할 것으로 보인다. 또한, 이 연구에서의 발견학습은 특정 교육과정 또는 교육사조에서 강조하는 발견학습이 아니다. 교육사조의 흐름을 무시할 수는 없으나, 사례연구의 특성상 사례연구 대상자들의 지역적·문화적 환경과 학습능력 수준을 고려하여 다양한 발견학습법을 적용하였다. 따라서, 본 연구에서의 발견학습은 그것이 Bruner, Polya 또는 Vygotsky 등 한 학자의 발견학습에 초점을 맞추지 않았고, 학생의 현재 상황에 맞추어 필요하다고 생각되는 모든 발견학습법이 적용되었다. 이러한 다양한 발견학습의 적용에 대해서는 '순열과 조합' 과 관련된 발견학습 이론의 고찰을 통해 그 타당성을 찾고자 하였다. 실제로 교실 수업에서 한 가지 발견학습 이론만으로는 수업 적용에 어려움을 겪을 수 있으며 여러 가지 발견학습 이론이 서로 상보적 관계를 형성하고 있음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

강문봉 (1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

강옥기 (2000). 수학과 학습지도와 평가론. 서울: 경문사.

강옥기 (2004). 제 7차 교육과정에 따른 중등수학 교재연구. 서울: 경문사.

강혜진 (2002). 학교수학에서의 이산수학의 필요성과 영역별 내용 비교. 부산외국어대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김연식 · 우정호 · 박영배 · 박교식 (2001). 수학교육학 용어 해설(9). 학교수학 **3(2)**, pp.475-499. 서울: 한국수학교육학회.

김진호 (2002). 비형식적 수학적 지식과 형식적 수학적 지식의 결합에 관한 소고. 학교수학 **4(4)**. pp. 555-563. 서울: 대한수학교육학회.

고영미 · 이상욱 (2004). 고등학교 이산수학의 의미와 교수-학습법. 수학교육논문집 **18(2)**. pp.209-216. 서울: 한국수학교육학회

권오남 (2005). 탐구 지향 미분방정식의 개발 실제 : 교수실험을 통한 접근. 수학교육논문집 **19(4)**, pp. 733-767. 서울: 한국수학교육학회.

박영배 (1996). 수학 교수 · 학습의 구성주의적 전개에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

이경화 (1996). 확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문.

이지화 (2005). 학습도구를 활용한 순열과 조합의 지도에 관한 연구. 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문

이주영 · 김서령 · 박혜숙 · 김완순 (2006). 조합문제 사이의 구조적 동형. 수학교육 **45(1)**, pp.123-138. 서울 : 한국수학교육학회.

이준열 (1991). 수학과 교육과정에서 이산수학의 역할. 수학교육 **30(2)**, pp.97-106. 서울: 한국수학교육학회

임레 라카토스/우정호역 (1991). 수학적 발견의 논리. 서울: 민음사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 (2004). School Mathematics as a Major Subject for 'Humanity Education'. 학교수학 제 **6(4)**. 서울: 대한수학교육학회

G. Polya/우정호 역 (1986). 어떻게 문제를 풀 것인가?-, How to Solve It. 서울: 천재교육.

조윤동 · 박배훈 (2002). 비고츠키 이론의 수학교육적 적용에 관한 연구. 수학교육학연구 **12(4)**, pp.473-491. 서울: 대한수학교육학회.

정수현 (2007). 수학적 모델링을 통한 수업 실현 연구. 숙명여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

황우형 · 김경미 (2008). 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해 분석. 수학교육 **47(4)**, pp.519-543. 서울 : 한

국수학교육학회.

Thomas Khun/김명자 역 (2007). 과학혁명의 구조. 서울: 까치

Barnes, D. (1990). Language in the Secondary Classroom: *A Study of Language Interaction in Twelve Lessons in the First Term of Secondary Education.* In D. Barnes, J. Britton, & H. Rosen(Eds.), *Language, the Learner and the School.* pp.11-17. Baltimore, Md.: Penguin Books.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effecy of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils, *Educational Studies in Mathematics* 32, pp. 181-199.

Bruner, J. S. (1960). *The Process of Education. Cambridge*: Harvard University Press.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: It's role and it's influence. In D.A Grouws(Ed), *Handbook of research on mathematics tracking and learning* pp.39-48 New York: Macmillan publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gelman R., & Gallisel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*(2nd Edition). Cambridge. MA: Harvard University Press.

Hadamard, J. (1945). *An Essay on the Psychology of Invention in the mathematical Field.* New York: Dover Publication.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1952). *The child's conception of number.* London: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J. (1980). The psychogenesis of knowledge and its epistemological significance. In M. Piattelli-Palmarini(Ed.), Language and learning: *The debate between Jean Piaget and Noam Chomsky*(pp.23-24). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Polya, G. (1973) *Induction and Analogy in Mathematics.* New Jersey: Princeton University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher.* **15(2)**, pp.4-14

Vacc, N. N. (1993). Questioning in the Mathematics Classroom. *Arithmetic Teacher,* **41(2)**, pp.88-91.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society : The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA : Harvard University Press.

The study of instruction on permutation and combination through the discovery method

Kim, Mi-Jeong
Hampyung girl's High school
E-mail: cometrue85@hanmail.net

Kim, Yong-Gu
Chonnam National University
E-mail: kimm@chonnam.ac.kr

Jung, Inchul
Korea University
E-mail: ijung@korea.ac.kr

In this study, we apply the discovery method in the instruction of Permutation and Combination, and examine the effect upon the student's emotion after the instruction change. The research progressed through the instruction by the discovery method for two students of highschool Y. This research has been done for about one and half year from November 2006 to February 2008. We draw our research results through a series of processes consisted of videotaping a classroom activities, recording interview details and writing an observation diary, with the aim of the experimental instruction. In the end, we get to the conclusion that students showed a strong positive attitude on the discovery instructional method and that diverse discovery method has supplementary relation in classwork

* ZDM Classification : K24
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : Discovery method, Heuristics, Questioning