Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 35, No. 3, pp. 203-212, September 2009.

공급사슬에서 계절적 수요를 고려한 채찍효과 측도의 개발

조동원 · 이영해†

한양대학교 산업경영공학과

Quantifying the Bullwhip Effect in a Supply Chain Considering Seasonal Demand

Dong Won Cho · Young Hae Lee

Department of Industrial and Management Engineering, Hanyang University, Seoul, 133-791, Korea

The bullwhip effect refers to the phenomenon where demand variability is amplified when one moves upward a supply chain. In this paper, we exactly quantify the bullwhip effect for cases of seasonal demand processes in a two-echelon supply chain with a single retailer and a single supplier. In most of the previous research, some measures of performance for the bullwhip effect are developed for cases of non-seasonal demand processes. The retailer performs demand forecast with a multiplicative seasonal mixed model by using the minimum mean square error forecasting technique and employs a base stock policy. With the developed bullwhip effect measure, we investigate the impact of seasonal factor on the bullwhip effect. Then, we prove that seasonal factor plays an important role on the occurrence of the bullwhip effect

Keywords: Supply chain management, Bullwhip effect, Multiplicative seasonal mixed model

1. 서 론

일반적으로 공급사슬은 원재료의 공급부터 최종고객의 전달까지 필요한 원재료공급업체, 생산업체, 도매업체, 소매자, 최종고객 등의 여러 단계를 포함하고 있다. 채찍효과(bullwhip effect)는 고객수요를 충족하기 위해 구성된 공급사슬의 각 단계에서 주문하는 주문량 분산이 하위단계보다는 상위단계에서 더욱더 커지는 현상을 의미한다. 채찍효과로 인해 공급사슬에서 발생되는 문제점은 생산일정계획의 잦은 변경, 재고의 증가, 재고보충기간의 증가, 수송과 선적의 심한 불균형, 제품 가용성의 감소 등의 있다(Chopra and Meindl, 2007; Lee *et al*., 1997a, 1997b). 그러므로 채찍효과는 공급사슬을 통합하여 총 비용은 최소화하면서 동시에 고객 서비스 수준을 향상시켜 총 수익을 극대화하고자 하는 공급사슬관리(supply chain management)에 악영향을 미치는 주요한 원인으로 인식되고 있다.

공급사슬에서 성과를 측정할 수 없으면 효과적인 관리가 이루어질 수 없듯이 채찍효과를 효과적으로 관리하기 위해서는 채찍효과를 정량적으로 측정할 수 있어야 한다. 채찍효과 측도는 채찍효과를 정량적으로 측정하기 위한 지표이다. 채찍효과 측도는 공급사슬에서 채찍효과의 발생 여부를 정량적으로 측정하여 채찍효과를 효과적으로 관리하기 위한 기초를 제공한다. 일반적으로 공급사슬의 채찍효과 측도로 가장 많이 이용되고 있는 지표로는 소매자가 공급자에게 기간별로 주문하는 발주량의 분산에 소매자가 직면하는 고객의 수요량의 분산을 나눈 비율로 나타낸다(Chen *et al*., 2000a, 2000b; Duc *et al*., 2008; Lee *et al*., 1997a; Luong, 2007; Luong and Phien, 2007). 그러나 채찍효과 측도를 구성하는 소매자 발주량의 분산과 고객의 수요량의 분산은 공급사슬 구조 및 운영 환경에 따라 다르기 때문에 이를 고려하여 계산해야 한다.

Forrester(1969)는 채찍효과를 처음 언급하면서 채찍효과는 공급사슬 구성원간에 제품, 정보 및 자금의 흐름에 대한 역동적인 현상의 결과로 발생한다고 주장하였으며 Sterman(1989)

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2007-313-D00911).
† 연락저자 : 이영해 교수, 426-791 경기도 안산시 상록구 사3동 한양대학교 산업경영공학과, Tel : 031-400-5262, Fax : 031-602-7730,
E-mail : yhlee@hanyang.ac.kr
2009년 3월 21일 접수; 2009년 6월 30일 수정본 접수; 2009년 8월 7일 게재 확정.

은 맥주분배게임(beer distribution game)을 통해 의사결정자의 시스템적 오류로 인해 채찍효과가 발생함을 설명하였다. Lee *et al*. (1997b)은 채찍효과의 발생 원인을 수요예측의 갱신, 배치식 주문, 가격 분산, 할당과 부족분 게임에 의해 규정하고 이를 정량적인 방법으로 입증하였다. 한편, 채찍효과의 발생에 대한 실증적 연구로서 공급사슬의 각 단계의 수요과정(demand process)을 분석하여 소매업, 유통업, 제조업 등의 다양한 산업에서 채찍효과가 존재함을 입증한 경우도 있다(Lee *et al*., 1997a; McCullen and Towill, 2002).

공급사슬에서 정량적 채찍효과 측도와 관련된 기존연구에서 채찍효과 측도의 주요한 구성 요소로는 고객의 수요과정, 수요예측기법과 재고정책을 통합적으로 고려하였다. 고객수요가 정상적 수요과정(stationary demand processes)을 따르는 경우에 대한 연구로서 Chen *et al*. (2000a, 2000b)과 Luong(2007), Luong and Phien(2007)은 수요과정이 AR(autoregressive model)이고 MA(moving average), ES(exponential smoothing) 및 MMSE (minimum mean square error)와 같은 수요예측기법을 적용하여 수요를 예측하고 목표재고량까지 주문하는 order-up-to-level 재고정책하에서 채찍효과의 측도를 개발하였다. Alwan *et al*. (2003)은 AR모형을 기반으로 MMSE 기법의 수요예측과 order-up-to-level 재고정책하에서 공급사슬의 상위단계에 대한 주문과정의 시계열 모형을 유도하고 추계적 특성을 연구하였다. Duc *et al*. (2008)은 ARMA(Autoregressive-moving Average)의 수요과정에 MMSE 기법에 의해 수요를 예측하고 base-stock 재고정책을 발주하는 채찍효과의 측도를 개발하였다.

비정상적 수요과정에 관한 연구로 Graves(1999)는 IMA(integrated moving average model)를 고려하여 채찍효과의 측도를 개발하였으며 Gilbert(2005)와 Gilbert and Chatpattananan(2006)는 고객의 수요과정이 ARIMA(auto-regressive integrated moving average)이고 매 기간 말에 특정 목표의 재고수준을 유지하려는 order-up-to a target 재고정책하에서 운영되는 2단계 공급사슬 구조를 갖는 시스템을 대상으로 채찍효과의 측도를 개발하였다. 특히, Gilbert(2005)의 연구 결과는 고객의 수요과정과 소매자가 고객의 요구를 충족하기 위해 발주하는 발주과정이 모수가 같지 않은 ARIMA를 따른다. 수요예측기법이 채찍효과에 미치는 영향에 관한 연구로는 Zhang(2004)의 연구가 있었다. Kelle and Milne(1999)는 고객의 수요가 정규분포를 따르고 (S, s) 재고정책하에서의 채찍효과 측도를 개발하였다.

기존연구에서 공급사슬에 대한 채찍효과 측도의 개발과 관련된 대부분의 연구는 먼저 2단계 공급사슬을 대상으로 한 후에 다음으로 조달기간을 고려하여 다단계 공급사슬의 채찍효과 측도로 확장하여 개발하였다. 기존연구에서 미진한 부분은 고객의 수요에 계절성이 포함된 경우의 연구가 미흡하다. 공급사슬의 수요에 계절성이 포함된 산업은 식료품, 의류, 전자, 항공 등에서 흔히 볼 수 있다(Box and Jenkins, 1976; Wei, 1990). 공급사슬의 하위단계의 수요에 계절성이 포함된 경우에 상위단계의 기본적인 대응 방법은 적절한 수요예측기법과 재고정책을 통해 계절재고의 수량을 결정한 후 이를 사전에 구매하거나 또는 생산하여 계절성으로 인해 발생할 수 있는 예기치 않은 상황에 대처한다(Chopra and Meindl, 2007). 그러나 공급사슬의 각 단계에서 계절성을 고려한 효율적인 의사결정에도 불구하고 공급사슬의 구성원간에 계절성에 대한 업무의 협업 및 조정의 부족으로 인해 계절성이 채찍효과의 발생에 원인이 될 수 있다.

그러므로 본 연구에서는 계절성이 포함된 고객의 수요를 갖는 공급사슬에 대해 채찍효과 측도를 개발하여 계절성이 채찍효과에 어떤 영향을 미치는지에 대해 밝히고자 한다. 본 연구의 구성으로 제 2장에서는 연구의 대상이 되는 공급사슬의 환경을 설명한다. 제 3장에서는 계절성이 포함된 공급사슬에 대한 채찍효과 측도의 개발과 함께 특성의 분석 및 수치실험을 수행한다. 제 4장에서는 결론과 함께 향후 연구 주제를 제시한다.

2. 문제형성

2.1 기호정의

D_t 기간 t의 고객 수요량
$\widehat{D}_t$ 기간 t의 고객 수요예측값
q_t 기간 t의 초기의 소재자의 발주량
S_t 기간 t의 목표재고수준
ϕ 1차 자기회귀계수
e_t 기간 t의 예측오차
Θ 1차 계절이동평균계수
δ SARMA의 상수
μ_d SARMA의 평균
σ_d^2 고객 수요량의 분산
L 소매자의 조달기간
D_t^L 기간 t부터 $t+L$-1까지의 수요(조달기간 동안의 수요)
$\hat{D}_t^L$ 조달기간 동안의 수요예측값
$\hat{\sigma}_d^L$ 조달기간 동안의 수요예측오차의 표준편차
z 정규분포의 정규화상수
s 계절주기($s = 1, 2, \cdots$)

2.2 제안된 공급사슬

계절성이 포함된 채찍효과 측도를 개발하는데 필요한 대상 시스템은 소매자와 공급자로 구성된 2단계 공급사슬로 하고 향후 다단계 공급사슬로 확장한다. 2단계 공급사슬에서 소매자가 직면하는 고객의 수요과정은 승법계절혼합모형(multiplicative seasonal mixed model)에 속하는 SARMA(1, 0)X(0, 1)$_s$ 시계열 모형으로서 식 (1)과 같으며 자기회귀계수와 계절이동평균계수의 차수가 각각 1이다. 그리고 고객의 수요량에 대한 수

요예측은 확정적인 조달기간을 고려한 MMSE 수요예측기법을 이용한다. 조달기간은 소매자가 공급자에게 제품을 주문해서 받을 때까지의 기간으로서 정수값을 갖는다.

$$D_t = \delta + \phi D_{t-1} + e_t - \Theta e_{t-s}, \text{ 단, } e_t \sim IIDN\left(0, \sigma_e^2\right). \quad (1)$$

식 (1)의 시계열 모형은 확률적 성질이 시간에 따라 변하지 않도록 정상성(stationarity)의 조건을 만족해야 한다. 그러므로 평균은 식 (2)와 같다.

$$E[D_t] = E[D_{t-1}] = \mu_d. \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)를 이용하여 SARMA(1, 0)X(0, 1)$_s$의 평균과 분산은 식 (3)과 식 (4)와 같다.

$$\mu_d = \frac{\delta}{1-\phi}. \quad (3)$$

$$\sigma_d^2 = \frac{1 - 2\Theta\phi^s + \Theta^2}{1-\phi^2}\sigma_e^2. \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)로부터 SARMA(1, 0)X(0, 1)$_s$에 대한 정상성의 조건은 $|\phi| < 1$이다. SARMA(1, 0)X(0, 1)$_s$ 모형을 식별하고 예측하는데 있어 하나의 모형이 존재하도록 하는 가역성(invertibility)의 조건은 $|\Theta| < 1$이다(Box and Jenkins, 1976; Wei, 1990).

소매자의 발주는 base-stock 재고정책이 적용되며 기간 초의 발주량 q_t는 식 (5)와 같다.

$$q_t = S_t - S_{t-1} + D_{t-1}. \quad (5)$$

식 (5)에서 q_t는 음수를 가질 수 있기 때문에 Chen *et al*. (2000a)이 가정했던 것과 마찬가지로 기간 초의 목표재고량보다 많은 재고량은 추가비용이 없이 공급자에게 반품될 수 있다. 한편, 목표재고량 S_t는 식 (6)과 같다.

$$S_t = \hat{D}_t^L + z\hat{\sigma}_t^L. \quad (6)$$

식 (6)에서 z는 고객의 서비스수준으로 정규화상수이다. 만약 식 (6)이 order-up-to-level 재고정책하에서 재고비용과 품절비용이 주어지면 총재고비용을 최소화 할 수 있는 최적의 목표재고량을 계산할 수 있다(Heyman and Sobel, 1984). 그러나 정확한 재고 및 품절 비용의 추정이 어려우므로 목표재고량을 결정할 때 서비스수준을 도입하여 결정한다. 서비스수준은 고객의 요구 시에 제품을 재고로부터 즉시 충족할 수 있는 확률을 의미한다. Base-stock 재고정책은 order-up-to-level 재고정책의 특별한 경우로서 서비스수준이 주어지면 목표재고량 S_t는 최적이다(Nahamis, 1997; Duc *et al*., 2008). 목표재고량의 계산은 서비스수준과 함께 조달기간 동안의 수요예측값 $\hat{D}_t^L$와 수요예측오차의 분산 $\hat{\sigma}_t^L$이 필요하다.

3. 채찍효과 측도

3.1 조달기간 동안의 수요예측값 및 수요예측오차의 분산

조달기간 동안의 고객의 수요와 수요예측값은 식 (7)과 식 (8)과 같다.

$$D_t^L = D_t + D_{t-1} + \cdots + D_{t+L-1} = \sum_{i=0}^{L-1} D_{t+i}. \quad (7)$$

$$\hat{D}_t^L = \hat{D}_t + \hat{D}_{t-1} + \cdots + \hat{D}_{t+L-1} = \sum_{i=0}^{L-1} \hat{D}_{t+i}. \quad (8)$$

그리고 소매자는 MMSE를 적용하여 고객의 수요를 예측하기 때문에 고객의 수요예측값 $\hat{D}_{t+i}$는 식 (9)의 조건부평균에 의해 결정된다(Box and Jenkins, 1976).

$$\hat{D}_{t+i} = E[D_{t+i} | D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots]. \quad (9)$$

식 (7)의 D_{t+i}는 식 (11)과 식 (10)을 통해 식 (12)를 얻는 재귀적인 과정처럼 이러한 과정을 반복하여 식 (13)을 얻을 수 있다.

$$D_{t+i} = \delta + \phi D_{t+i-1} + e_{t+i} - \Theta e_{t-s+i}. \quad (10)$$

$$D_{t+i} = \delta + \phi D_{t+i-2} + e_{t+i-1} - \Theta e_{t-s+i-1}. \quad (11)$$

$$D_{t+i} = (1+\phi)\delta + \phi^2 D_{t+i-2} + e_{t+i} + \phi e_{t+i-1} - \Theta e_{t-s+i} - \Theta\phi e_{t-s+i-1}. \quad (12)$$

$$D_{t+i} = \left(1-\phi^{i+1}\right)\mu_d + \phi^{i+1} D_{t-1} + \sum_{j=0}^{i}\phi^j e_{t+i-j} - \Theta\sum_{j=0}^{i}\phi^j e_{t-s+i-j}. \quad (13)$$

그리고 식 (13)을 식 (9)에 대입함으로써 고객의 수요예측값이 계산되며 식 (14)와 같다. 식 (14)의 마지막 항은 고객의 수요예측값의 예측오차로서 계절주기 s에 의해 결정된다.

$$\hat{D}_{t+i} = \left(1-\phi^{i+1}\right)\mu_d + \phi^{i+1} D_{t-1} - \Theta\sum_{j=0}^{i}\phi^j E\left[e_{t-s+i-j} | D_{t-1}, D_{t-2}, \cdots\right]. \quad (14)$$

정리 1 : 조달기간 동안의 수요예측값 $\hat{\sigma}_t^L$는 계절주기 s에 영향을 받으며 식 (15)와 같다.

$$\hat{D}_t^L=\begin{cases}\left(L-\dfrac{\left(1-\phi^L\right)\phi}{1-\phi}\right)\mu_d+\dfrac{\left(1-\phi^L\right)\phi}{1-\phi}D_{t-1} & \\ -\Theta\displaystyle\sum_{i=0}^{s-1}\dfrac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t-s+i}, & s\le L\\ \left(L-\dfrac{\left(1-\phi^L\right)\phi}{1-\phi}\right)\mu_d+\dfrac{\left(1-\phi^L\right)\phi}{1-\phi}D_{t-1} & \\ -\Theta\displaystyle\sum_{i=0}^{L-1}\dfrac{\left(1-\phi^{L-i}\right)}{1-\phi}e_{t-s+i}, & s>L\end{cases} \tag{15}$$

증명 : 식 (14)를 식 (8)에 대입한 후 정리하면 식 (16)이 된다.

$$\begin{aligned}\hat{D}_t^L&=\sum_{i=0}^{L-1}\begin{pmatrix}(1-\phi^{i+1})\mu_d+\phi^{i+1}D_{t-1}\\ -\Theta\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\phi^j E[e_{t-s+i-j}|D_{t-1},D_{t-2,}\cdots]\end{pmatrix}\\ &=\left(L-\frac{(1-\phi^L)\phi}{1-\phi}\right)\mu_d+\frac{(1-\phi^L)\phi}{1-\phi}D_{t-1}\\ &\quad-\Theta\sum_{j=0}^{i}\frac{(1-\phi^{L-1})}{1-\phi}E[e_{t-s+i-j}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots]\end{aligned} \tag{16}$$

식 (16)의 마지막 항은 조건부평균으로 조달기간과 계절주기의 크기를 고려하여 계산하면 식 (15)가 된다. 따라서 조달기간 동안의 수요예측값은 계절주기에 영향을 받는다. ■

정리 2 : 조달기간 동안의 수요예측오차의 분산은 계절주기 s에 영향을 받으나 반면에 기간 t에는 영향을 받지 않고 식 (17)로 주어진다.

$$\left(\hat{\sigma}_t^L\right)^2=\begin{cases}\sigma_e^2\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{L-s-1}\left(\sum_{j=0}^{L-i-1}\phi^j-\Theta\sum_{j=0}^{L-s-i-1}\phi^j\right)^2\right. & \\ \left.+\displaystyle\sum_{i=L-s}^{L-1}\left(\sum_{j=0}^{L-i-1}\phi^j\right)^2\right), & s\le L\\ \sigma_e^2\displaystyle\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{1-\phi^{L-i}}{1-\phi}\right)^2, & s>L\end{cases}. \tag{17}$$

증명 : 조달기간 동안의 수요예측오차의 분산은 식 (18)과 같다. $D_t^L-\hat{D}_t^L$은 식 (13)과 식 (14)의 기간을 조정하여 대입한 후 정리하면 식 (19)가 된다.

$$\left(\hat{\sigma}_t^L\right)^2=VAR\left(D_t^L-\hat{D}_t^L\right). \tag{18}$$

$$\begin{aligned}D_t^L-\hat{D}_t^L&=(D_t-\hat{D}_t)+(D_{t+1}-\hat{D}_{t+1})+\cdots\\ &\quad+(D_{t+L-1}-\hat{D}_{t+L-1})\\ &=\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\left(\phi^j e_{t+i-j}-\Theta\phi^j e_{t-s+i-j}\right)\\ &\quad+\Theta\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\phi^j E[e_{t-s+i-j}|D_{t-1},D_{t-2},\cdots].\end{aligned} \tag{19}$$

식 (20)과 식 (21)은 식 (19)을 조달기간 L과 계절주기 s의 크기에 따라 정리하면 된다.

$$\begin{aligned}s\le L,\ D_t^L-\hat{D}_t^L&=\sum_{i=L-s}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-i-1}\phi^j e_{t+i}\\ &\quad+\sum_{i=0}^{L-s-1}\sum_{j=0}^{L-i-1}\phi^j e_{t+i}-\Theta\sum_{i=0}^{L-s-1}\sum_{j=0}^{L-s-i-1}\phi^j e_{t+i}.\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}s>L,\ D_t^L-\hat{D}_t^L&=\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-i-1}(\phi^j e_{t+i}-\Theta\phi^j e_{t-s+i})\\ &\quad+\Theta\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-i-1}\phi^j e_{t-s+i}=\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{L-i-1}\phi^j e_{t+i}.\end{aligned} \tag{21}$$

그러므로 식 (20)과 식 (21)를 식 (18)에 대입하면 오차항의 시차가 다르기 때문에 식 (17)을 얻을 수 있다. ■

정리 2를 통해 조달기간 동안의 수요예측오차의 분산은 기간 t에는 영향을 받지 않으므로 모든 기간에 동일한 값을 갖는다. 반면에, 조달기간과 계절주기의 크기에 따라 $D_t^L-\hat{D}_t^L$의 결과는 다르기 때문에 조달기간 동안의 수요예측오차의 분산은 계절주기에 영향을 받는다. 정리 2의 결과는 소매자 발주량을 계산하는데 필요하다.

3.2 소매자 발주량의 분산

소매자 발주량을 고객의 수요과정으로 나타내면 정리 3이 유도된다.

정리 3 : 소매자 발주량 q_t는 계절주기 s에 영향을 받으며 식 (22), 식 (23), 식 (24), 식 (25)로 주어진다.

$$\begin{aligned}s=1,\ q_t&=\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}D_{t-1}-\frac{(1-\phi^L)\phi}{1-\phi}D_{t-2}\\ &\quad-\frac{(1-\phi^L)\Theta}{1-\phi}e_{t-1}+\frac{(1-\phi^L)\Theta}{1-\phi}e_{t-2}.\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}2\le s\le L,\ q_t&=\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}D_{t-1}-\frac{(1-\phi^L)\phi}{1-\phi}D_{t-2}\\ &\quad-\frac{(1-\phi^{L-s+1})\Theta}{1-\phi}e_{t-1}+\Theta\sum_{i=0}^{s-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}e_{t-s+i}\\ &\quad+\frac{(1-\phi^L)\Theta}{1-\phi}e_{t-s-1}.\end{aligned} \tag{23}$$

$$L=1,\ L<s,\ q_t=(1+\phi)D_{t-1}-\phi D_{t-2} -\Theta e_{t-s}+\Theta e_{t-s-1} \quad (24)$$

$$2\le L<s,\ q_t=\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}D_{t-1} -\frac{(1-\phi^L)\phi}{1-\phi}D_{t-2}-\Theta e_{t-s+L-1} +\Theta\sum_{i=0}^{L-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}e_{t-s+i}+\frac{(1-\phi^L)\Theta}{1-\phi}e_{t-s-1}. \quad (25)$$

증명 : 소매자 발주량 q_t는 식 (5)에 식 (6)을 대입한 후 정리 2를 적용하면 식 (26)과 같다.

$$\begin{aligned} q_t &= S_t - S_{t-1} + D_{t-1} \\ &= \left(\hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L\right) + z\left(\hat{\sigma}_{t-}^L - \hat{\sigma}_{t-1}^L\right) + D_{t-1} \\ &= \left(\hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L\right) + D_{t-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

그러므로 소매자 발주량은 조달기간 동안의 수요예측값 식 (15)를 식 (26)에 대입한 후 정리하면 $s\le L$에서 q_t는 식 (27)와 같으나 식 (27)의 네 번째 항이 $s\ge 2$인 경우에만 성립하므로 $s=1$과 $2\le s\le L$로 나누어진다. 그리고 $s>L$의 경우에 q_t는 식 (28)과 같고 네 번째 항은 $L\ge 2$에서만 성립하므로 $L=1,\ L<s$과 $2\le L<s$로 나누어진다.

$$s\le L,\ q_t=\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}D_{t-1}-\frac{(1-\phi^L)\phi}{1-\phi}D_{t-2} -\frac{(1-\phi^{L-s+1})\Theta}{1-\phi}e_{t-1}+\Theta\sum_{i=0}^{s-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}e_{t-s+i} +\frac{(1-\phi^L)\Theta}{1-\phi}e_{t-s-1}. \quad (27)$$

$$s>L,\ q_t=\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}D_{t-1}-\frac{(1-\phi^L)\phi}{1-\phi}D_{t-2} -\Theta e_{t-s+L-1}+\Theta\sum_{i=0}^{L-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}e_{t-s+i} +\frac{(1-\phi^L)\Theta}{1-\phi}e_{t-s-1}. \blacksquare \quad (28)$$

소매자 발주량의 범위를 조달기간 L과 계절주기 s의 $(L,\ s)$ 행렬로 나타내면 <Figure 1>과 같다.

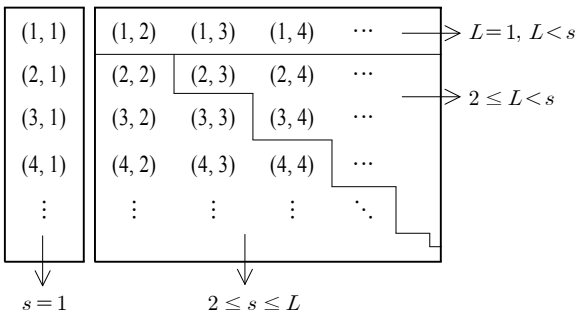

Figure 1. 계절주기와 조달기간의 크기에 따른 소매자 발주량

일반적으로 고객의 수요에 계절성이 포함되면 상위의 공급자로부터 제품을 조달하는 소매자도 계절성을 고려하여 발주한다(Chopra and Meindl, 2007). 정리 3은 고객의 수요에 계절성이 포함되어 있으면 소매자도 계절성을 고려하여 제품을 조달함을 입증한다.

정리 4 : 소매자 발주량 q_t의 분산은 계절주기 s에 영향을 받으며 식 (29)과 같다.

$$VAR(q_t)=\begin{cases} \sigma_d^2\left(1+\dfrac{2(\phi-\Theta)\left(1-\phi^L\right)\left(1-\phi^{L+1}-\Theta\phi\left(1-\phi^{L-1}\right)\right)}{(1-\phi)\left(1-2\Theta\phi+\Theta^2\right)}\right), & s=1 \\ \sigma_d^2+\dfrac{\left(\begin{array}{c}2\Theta\phi^s(1-\phi)+2(\phi-\Theta)+2\phi^{2L+2}\left(1-\Theta\phi^{-s}\right)^2 \\ -2\phi\left(\Theta+\phi^L(1+\phi)\left(1-\Theta\phi^{-s}\right)\right)(1-\Theta)\end{array}\right)}{(1-\phi)\left(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2\right)}\sigma_d^2, & 2\le s\le L \\ \sigma_d^2\left(1+\dfrac{2\phi\left(1-2\Theta\phi^{s-2}(1-\phi)\right)\left(1-\phi^2\right)}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\right), & L=1,\ L<s \\ \sigma_d^2\left(1+\dfrac{2\phi\left(1-\phi^L\left(1+\phi-\phi^{L+1}\right)\right)}{(1-\phi)\left(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2\right)}\right), & 2\le L<s \end{cases} \quad (29)$$

증명 : $s=1$에서 소매자 발주량의 분산은 식 (22)의 분산으로 식 (30)이 된다. 그리고 식 (30)의 각 항을 계산한 후 정리하면 식 (31)이 된다.

$$\begin{aligned} VAR(q_t) &= \left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)^2 VAR(D_{t-1}) + \left(\frac{\left(1-\phi^L\right)\phi}{1-\phi}\right)^2 VAR(D_{t-2}) \\ &+ \left(\frac{\left(1-\phi^L\right)\Theta}{1-\phi}\right)^2 VAR(e_{t-1}) + \left(\frac{\left(1-\phi^L\right)\Theta}{1-\phi}\right)^2 VAR(e_{t-2}) \\ &-2\phi\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)COV(D_{t-1},\ D_{t-2}) \\ &-2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)\left(COV(D_{t-1},\ e_{t-1})-COV(D_{t-1},\ e_{t-2})\right) \\ &+2\phi\Theta\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)^2\left(COV(D_{t-2},\ e_{t-1})-COV(D_{t-2},\ e_{t-2})\right) \\ &-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)^2 COV(e_{t-1},\ e_{t-2}) \end{aligned} \quad (30)$$

$$VAR(D_{t-1}) = VAR(D_{t-2}) = \sigma_d^2, VAR(e_{t-1}) = VAR(e_{t-2}) = \sigma_e^2,$$

$$COV(D_{t-1}, D_{t-2}) = \frac{\phi - \Theta\phi^2 + \Theta^2\phi - \Theta}{1 - 2\Theta\phi + \Theta^2}\sigma_d^2,$$

$$COV(D_{t-1}, e_{t-1}) = COV(D_{t-2}, e_{t-2}) = \sigma_e^2, COV(D_{t-2}, e_{t-1}) = 0$$

$$COV(D_{t-1}, e_{t-2}) = COV(D_{t-2}, e_{t-1}) = (\phi - \Theta)\sigma_e^2,$$

$$COV(e_{t-1}, e_{t-2}) = 0.$$

$$VAR(q_t)$$

$$= \sigma_d^2\left(1 + \frac{2\phi(1-\phi)\left(1+\Theta^2+\Theta(1-\phi)\right)}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\sum_{i=0}^{L}\phi^i\sum_{i=0}^{L-1}\phi^i\right)$$

$$+\frac{2\Theta\sigma_d^2(1-\phi^2)}{1-2\Theta\phi+\Theta^2}\left((\Theta-\phi)\sum_{i=0}^{L-1}\phi^i + (\phi-\Theta-1)\sum_{i=0}^{L}\phi^i\right)\sum_{i=0}^{L-1}\phi^i$$

$$= \sigma_d^2\left(1 + \frac{2(\phi-\Theta)\left(1-\phi^L\right)\left(1-\phi^{L+1}-\Theta\phi\left(1-\phi^{L-1}\right)\right)}{(1-\phi)\left(1-2\Theta\phi+\Theta^2\right)}\right). \quad (31)$$

$2 \le S \le L$의 경우는 식 (23)에서 분산으로 식 (32)가 되고 각 항을 계산한 후 정리하면 식 (33)이 된다.

$$VAR(q_t) = \left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)^2 VAR(D_{t-1}) + \left(\frac{(1-\phi^L)\phi}{1-\phi}\right)^2 VAR(D_{t-2})$$

$$+\left(\frac{(1-\phi^{L-s+1})\Theta}{1-\phi}\right)^2 VAR(e_{t-1}) + \Theta^2 VAR\left(\sum_{i=0}^{s-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}e_{t-s+i}\right)$$

$$+\left(\frac{(1-\phi^L)\Theta}{1-\phi}\right)^2 VAR(e_{t-s-1}) - 2\phi\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)COV(D_{t-1}, D_{t-2})$$

$$-2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L-s+1}}{1-\phi}\right)COV(D_{t-1}, e_{t-1})$$

$$+2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{s-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}COV(D_{t-1}, e_{t-s+i})$$

$$+2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)COV(D_{t-1}, e_{t-s-1})$$

$$+2\phi\Theta\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L-s+1}}{1-\phi}\right)COV(D_{t-2}, e_{t-1})$$

$$-2\phi\Theta\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{s-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}COV(D_{t-2}, e_{t-s+i})$$

$$-2\phi\Theta\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)^2 COV(D_{t-2}, e_{t-s-1})$$

$$-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^{L-s+1}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{s-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}COV(e_{t-1}, e_{t-s+i})$$

$$-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^{L-s+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)COV(e_{t-1}, e_{t-s-1})$$

$$+2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^L}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{s-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}COV(e_{t-s+i}, e_{t-s-1}). \quad (32)$$

$$VAR(D_{t-1}) = VAR(D_{t-2}) = \sigma_d^2, VAR(e_{t-1}) = VAR(e_{t-s-1}) = \sigma_e^2,$$

$$COV(D_{t-1}, e_{t-1}) = COV(D_{t-2}, e_{t-2}) = \sigma_e^2,$$

$$COV(D_{t-1}, D_{t-2}) = \frac{\phi - \Theta\phi^{s+1} + \Theta^2\phi - \Theta\phi^{s-1}}{1 - 2\Theta\phi^s + \Theta^2}\sigma_d^2,$$

$$VAR\left(\sum_{i=0}^{s-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)e_{t-s+i}\right) = \phi^{2L}(1-\phi)^2\left(\frac{\phi^{-2(s-1)}-1}{1-\phi^2}\right)\sigma_e^2,$$

$$\sum_{i=0}^{s-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)COV(D_{t-1}, e_{t-s+i})$$

$$= \left(\phi^{L+s+1}-\phi^{L+s}\right)\left(\frac{\phi^{-2(s-1)}-1}{1-\phi^2}\right)\sigma_e^2,$$

$$COV(D_{t-1}, e_{t-s-1}) = \left(\phi^s - \Theta\right)\sigma_e^2, COV(D_{t-2}, e_{t-1}) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{s-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)COV(D_{t-2}, e_{t-s+i})$$

$$= \left(\phi^{L+s}-\phi^{L+s-1}\right)\left(\frac{\phi^{-2(s-1)}-1}{1-\phi^2}\right)\sigma_e^2,$$

$$COV(D_{t-2}, e_{t-s-1}) = \phi^{s-1}\sigma_e^2, COV(e_{t-1}, e_{t-s-1}) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{s-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)COV(e_{t-1}, e_{t-s+i}) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{s-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)COV(e_{t-s+i}, e_{t-s-1}) = 0.$$

$$VAR(q_t)$$

$$= \sigma_d^2\left(1 + \frac{2\phi(1-\phi)\left(1+\Theta^2+\Theta\phi^{s-1}(1-\phi)\right)}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}\sum_{i=0}^{L}\phi^i\sum_{i=0}^{L-1}\phi^i\right)$$

$$+\left(\frac{(1-\phi^{L-s+1})\Theta}{1-\phi}\right)^2\sigma_e^2 + \Theta^2\phi^{2L}\left(\frac{\phi^{-2(s-1)}-1}{1-\phi^2}\right)\sigma_e^2$$

$$+\left(\frac{(1-\phi^L)\Theta}{1-\phi}\right)^2\sigma_e^2 - 2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L-s+1}}{1-\phi}\right)\sigma_e^2$$

$$+2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{\phi^{L+s+1}-\phi^{L+s}}{1-\phi}\right)\left(\frac{\phi^{-2(s-1)}-1}{1-\phi^2}\right)\sigma_e^2$$

$$
\begin{aligned}
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)\left(\phi^{s}-\Theta\right)\sigma_e^2\\
&-2\Theta\phi\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)\left(\frac{\phi^{L+s}-\phi^{L+s-1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{\phi^{-2(s-1)}-1}{1-\phi^{2}}\right)\sigma_e^2\\
&-2\Theta\phi\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)^{2}\phi^{s-1}\sigma_e^2\\
&=\sigma_d^2+\frac{\left(\begin{array}{c}2\Theta\phi^{s}(1-\phi)+2(\phi-\Theta)+2\phi^{2L+2}\left(1-\Theta\phi^{-s}\right)^{2}\\-2\phi\left(\Theta+\phi^{L}(1+\phi)\left(1-\Theta\phi^{-s}\right)\right)(1-\Theta)\end{array}\right)}{(1-\phi)\left(1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^{2}\right)}\sigma_d^2.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$L=1,\ L<s$도 동일한 방법으로 진행하면 분산은 식 (34)이며 각 항을 계산한 후 정리하면 식 (35)가 된다.

$$
\begin{aligned}
&VAR(q_t)=(1+\phi)^2VAR(D_{t-1})+\phi^2VAR(D_{t-2})\\
&+\Theta^2VAR(e_{t-s})+\Theta^2VAR(e_{t-s-1})-2\phi(1+\phi)COV(D_{t-1},D_{t-2})\\
&-2\Theta(1+\phi)COV(D_{t-1},e_{t-s})+2\Theta(1+\phi)COV(D_{t-1},e_{t-s-1})\\
&+2\phi\Theta COV(D_{t-2},e_{t-s})-2\phi\Theta COV(D_{t-2},e_{t-s-1})\\
&-2\Theta^2COV(e_{t-s},e_{t-s-1}).
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
&VAR(D_{t-1})=VAR(D_{t-2})=\sigma_d^2,\\
&VAR(e_{t-s})=VAR(e_{t-s-1})=\sigma_e^2,\\
&COV(D_{t-1},D_{t-2})=\frac{\phi-\Theta\phi^{s+1}+\Theta^2\phi-\Theta\phi^{s-1}}{1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^{2}}\sigma_d^2,\\
&COV(D_{t-1},e_{t-s})=\phi^{s-1}\sigma_e^2,COV(D_{t-2},e_{t-s})=\phi^{s-2}\sigma_e^2,\\
&COV(D_{t-1},e_{t-s-1})=\left(\phi^{s}-\Theta\right)\sigma_e^2,\\
&COV(D_{t-2},e_{t-s-1})=\phi^{s-1}\sigma_e^2,COV(e_{t-s},e_{t-s-1})=0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
VAR(q_t)&=\sigma_d^2\left(1+\frac{2\phi\left(1-\phi^{2}\right)\left(1+\Theta^{2}+\Theta\phi^{s-1}(1-\phi)\right)}{1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^{2}}\right)\\
&\quad+2\Theta\phi^{s+1}\sigma_e^2-2\Theta^2\phi\sigma_e^2-4\Theta\phi^{s-1}\sigma_e^2+2\Theta\phi^{s}\sigma_e^2\\
&=\sigma_d^2\left(1+\frac{2\phi\left(1-2\Theta\phi^{s-2}(1-\phi)\right)\left(1-\phi^{2}\right)}{1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^{2}}\right).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

마지막으로 $2\le L<s$도 같은 방법으로 진행하면 식 (25)의 분산은 식 (36)이 되고 각 항을 계산한 후 정리하면 식 (37)이 된다.

$$
\begin{aligned}
VAR(q_t)&=\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)^{2}VAR(D_{t-1})+\left(\frac{\left(1-\phi^{L}\right)\phi}{1-\phi}\right)^{2}VAR(D_{t-2})\\
&+\Theta^2VAR(e_{t-s+L-1})+\Theta^2VAR\left(\sum_{i=0}^{L-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}e_{t-s+i}\right)\\
&+\left(\frac{\left(1-\phi^{L}\right)\Theta}{1-\phi}\right)^{2}VAR(e_{t-s-1})\\
&-2\phi\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)COV(D_{t-1},D_{t-2})\\
&-2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)COV(D_{t-1},e_{t-s+L-1})\\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}COV(D_{t-1},e_{t-s+i})\\
&+2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)COV(D_{t-1},e_{t-s-1})\\
&+2\phi\Theta\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)COV(D_{t-2},e_{t-s+L-1})\\
&-2\phi\Theta\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L-2}\frac{\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)}{1-\phi}COV(D_{t-2},e_{t-s+i})\\
&-2\phi\Theta\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)^{2}COV(D_{t-2},e_{t-s-1})\\
&-2\Theta^2\sum_{i=0}^{L-2}\frac{\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)}{1-\phi}COV(e_{t-s+L-1},e_{t-s+i})\\
&-2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)COV(e_{t-s+L-1},e_{t-s-1})\\
&+2\Theta^2\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)\sum_{i=0}^{L-2}\frac{(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1})}{1-\phi}COV(e_{t-s+i},e_{t-s-1}).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
\begin{aligned}
&VAR(D_{t-1})=VAR(D_{t-2})=\sigma_d^2,\\
&VAR(e_{t-s+L-1})=VAR(e_{t-s-1})=\sigma_e^2,\\
&VAR\left(\sum_{i=0}^{L-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)e_{t-s+i}\right)\\
&=\phi^{2L}(1-\phi)^{2}\left(\frac{\phi^{-2(L-1)}-1}{1-\phi^{2}}\right)\sigma_e^2,\\
&COV(D_{t-1},D_{t-2})=\frac{\phi-\Theta\phi^{s+1}+\Theta^2\phi-\Theta\phi^{s-1}}{1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^{2}}\sigma_d^2,\\
&COV(D_{t-1},e_{t-s+L-1})=\phi^{s-L}\sigma_e^2,\\
&\sum_{i=0}^{L-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)COV(D_{t-1},e_{t-s+i})\\
&=\left(\phi^{L+s+1}-\phi^{L+s}\right)\left(\frac{\phi^{-2(L-1)}-1}{1-\phi^{2}}\right)\sigma_e^2,
\end{aligned}
$$

$$COV\left(D_{t-1}, e_{t-s-1}\right)=\left(\phi^{s}-\Theta\right)\sigma_e^2,$$

$$COV\left(D_{t-2}, e_{t-s+L-1}\right)=\phi^{s-L-1}\sigma_e^2,$$

$$\sum_{i=0}^{L-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)COV\left(D_{t-2}, e_{t-s+i}\right)$$

$$=\left(\phi^{L+s}-\phi^{L+s-1}\right)\left(\frac{\phi^{-2(L-1)}-1}{1-\phi^2}\right)\sigma_e^2,$$

$$COV\left(D_{t-2}, e_{t-s-1}\right)=\phi^{s-1}\sigma_e^2, COV\left(e_{t-s+L-1}, e_{t-s-1}\right)=0,$$

$$\sum_{i=0}^{L-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)COV\left(e_{t-s+L-1}, e_{t-s+i}\right)=0,$$

$$\sum_{i=0}^{L-2}\left(\phi^{L-i}-\phi^{L-i-1}\right)COV\left(e_{t-s+i}, e_{t-s-1}\right)=0.$$

$$VAR\left(q_t\right)$$

$$=\sigma_d^2\left(1+\frac{2\phi(1-\phi)\left(1+\Theta^2+\Theta\phi^{s-1}(1-\phi)\right)}{1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^2}\sum_{i=0}^{L}\phi^{i}\sum_{i=0}^{L-1}\phi^{i}\right)$$

$$+\Theta^2\sigma_e^2+\Theta^2\phi^{2L}\left(\frac{\phi^{-2(L-1)}-1}{1-\phi^2}\right)\sigma_e^2+\left(\frac{\left(1-\phi^{L}\right)\Theta}{1-\phi}\right)^2\sigma_e^2$$

$$-2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\phi^{s-L}\sigma_e^2$$

$$+2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{\phi^{L+s+1}-\phi^{L+s}}{1-\phi}\right)\left(\frac{\phi^{-2(L-1)}-1}{1-\phi^2}\right)\sigma_e^2$$

$$+2\Theta\left(\frac{1-\phi^{L+1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)\left(\phi^{s}-\Theta\right)\sigma_e^2$$

$$+2\Theta\phi\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)\left(\phi^{s-L-1}-\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)\phi^{s-1}\right)\sigma_e^2$$

$$-2\Theta\phi\left(\frac{1-\phi^{L}}{1-\phi}\right)\left(\frac{\phi^{L+s}-\phi^{L+s-1}}{1-\phi}\right)\left(\frac{\phi^{-2(L-1)}-1}{1-\phi^2}\right)\sigma_e^2$$

$$=\sigma_d^2\left(1+\frac{2\phi\left(1-\phi^{L}\left(1+\phi-\phi^{L+1}\right)\right)}{(1-\phi)\left(1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^2\right)}\right). \blacksquare \tag{37}$$

정리 4의 결과는 고객 수요에 계절성이 있으면 $s=1$인 계절성이 없는 경우와는 다르게 소매자의 발주과정에 대한 분산이 조달기간과 계절주기의 관계에 따라 다양하다.

3.3 채찍효과 측도의 개발 및 특성

채찍효과 측도는 소매자가 공급자에게 기간별로 주문하는 발주과정에서 얻어지는 발주량의 분산에 소매자가 직면하는 고객의 수요과정에 대한 수요량의 분산을 나눈 비율로서 식 (38)의 결과를 얻을 수 있다.

$$B\left(L,s,\Theta,\phi\right)=\frac{VAR\left(q_t\right)}{\sigma_d^2}$$

$$=\begin{cases}1+\dfrac{2(\phi-\Theta)\left(1-\phi^{L}\right)\left(1-\phi^{L+1}-\Theta\phi\left(1-\phi^{L-1}\right)\right)}{(1-\phi)\left(1-2\Theta\phi+\Theta^2\right)}, & s=1\\ 1+\dfrac{\left(\begin{array}{c}2\Theta\phi^{s}(1-\phi)+2(\phi-\Theta)+2\phi^{2L+2}\left(1-\Theta\phi^{-s}\right)^2\\ -2\phi\left(\Theta+\phi^{L}(1+\phi)\left(1-\Theta\phi^{-s}\right)\right)(1-\Theta)\end{array}\right)}{(1-\phi)\left(1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^2\right)}, & 2\le s\le L\\ 1+\dfrac{2\phi\left(1-2\Theta\phi^{s-2}(1-\phi)\right)\left(1-\phi^2\right)}{1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^2}, & L=1, L<s\\ 1+\dfrac{2\phi\left(1-\phi^{L}\left(1+\phi-\phi^{L+1}\right)\right)}{(1-\phi)\left(1-2\Theta\phi^{s}+\Theta^2\right)}, & 2\le L<s\end{cases} \tag{38}$$

식 (38)에서 $s=1$인 경우에는 일반적인 시계열 모형으로 Duc *et al*. (2008)의 연구결과와 일치한다. 그러나 계절성이 포함된 경우의 채찍효과 측도는 조달기간과 계절주기의 크기에 따라 다르기 때문에 계절성은 채찍효과에 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 이는 고객의 수요에 계절성이 포함된 경우에는 계절성을 고려하여 채찍효과를 측정해야 하며 또한 계절성을 고려한 채찍효과의 관리 방법이 요구된다.

다단계 공급사슬의 채찍효과 측도는 공급사슬의 단계마다 소요되는 조달기간에만 영향을 받기 때문에 공급사슬 단계마다 소요되는 조달기간을 합하여 채찍효과를 측정한다. n 단계 공급사슬에서 각 단계의 조달기간이 $L(1), L(2), \cdots, L(n)$이면 $\sum_{i=1}^{n}L(i)$은 공급사슬의 가장 하위 단계의 전체 조달기간이다. 그러므로 k 단계를 거쳐 제품을 보충하면 조달기간의 합은 $\sum_{i=1}^{k}L(i)$이고 이 값을 2단계 공급사슬의 조달기간에 대입하여 채찍효과를 측정한다.

정리 5 : 채찍효과 측도 $B(L, s, \Theta, \phi)$는 계절주기와 조달기간의 범위에 따라 다음과 같은 특성이 있다. ‘

가) $2 \le L < s$ 또는 $L=1, L<s$의 범위에서 $\phi>0$이면 $B(L, s, \Theta, \phi)>1$이다.

나) $2 \le L < s$의 범위에서 $\phi>0$이면 조달기간 L이 증가할수록 $B(L, s, \Theta, \phi)$도 증가하며 상한값은 $\dfrac{1+\phi+(1-\phi)\Theta^2}{(1-\phi)(1+\Theta^2)}$ 이다.

다) $2 \le L < s$ 또는 $L=1, L<s$의 범위에서 $\phi>0$이고 $\Theta>0$이면 계절주기가 증가할수록 $B(L, s, \Theta, \phi)$는 감

소하며 반면에 $\phi>0$이고 $\Theta>0$이면 계절주기가 증가할수록 $B(L, s, \Theta, \phi)$도 증가한다.

증명 : $2 \le L < s$에서 $\phi>0$이면 $\phi(1-\phi^L(1+\phi-\phi^{L+1}))>0$이고 $1-\phi>0$이다. 그리고 $L=1, L<s$에서 $\phi>0$이면 $1-2\Theta\phi^{s-2}(1-\phi)>0$, $1-\phi^2>0$, $1-2\Theta\phi^s+\Theta^2=(\phi^2-\Theta)^2+1-\phi^{2s}>0$이다. 그러므로 두 조건하에서는 모두가 $B(L, s, \Theta, \phi)>1$이다. 그리고 $g(L, \phi)=1-\phi^L(1+\phi-\phi^{L+1})$이라 하고 또한 $\Delta g(L) \equiv g(L+1, \phi)-g(L, \phi)$하자. 그러면 $\Delta g(L) \equiv 1-\phi^{L+1}(1+\phi-\phi^{L+2}) - (1-\phi^L(1+\phi-\phi^{L+1}))$ $=\phi^L(1-\phi^2)(1-\phi^{L+1})>0$이다. 그러므로 $\Delta g(L)$은 조달기간 L이 커지면 $B(L, s, \Theta, \phi)$이 증가한다. 그러나 조달기간의 증가에 따라 $B(L, s, \Theta, \phi)$가 수렴하는 상한값이 있다. 즉, 조달기간이 계절주기보다 작지만 $B(L, s, \Theta, \phi)$의 수렴여부를 판단하기 위해 수렴하는 상한값을 $B(L, s, \Theta, \phi)_{\lim}$라 하고 계절주기와 조달기간을 무한대로 하면 식 (39)의 결과를 얻을 수 있다.

$$B(L,s,\Theta,\phi)_{\lim} = \lim_{\substack{L\to\infty \\ s\to\infty}} B(L,s,\Theta,\phi) = \frac{1+\phi+(1-\phi)\Theta^2}{(1-\phi)(1+\Theta^2)}. \quad (39)$$

그리고 다)는 채찍효과에 계절주기가 어떤 영향이 있는지에 대한 특성으로 $f(s, \Theta, \phi)=\dfrac{1}{1-2\Theta\phi^s+\Theta^2}$이면 $\Delta f(s)$ $\equiv f(s+1, \Theta, \phi)-f(s, \Theta, \phi)=\dfrac{2\Theta\phi^s(\phi-1)}{(1-2\Theta\phi^s+\Theta^2)(1-2\Theta\phi^{s+1}+\Theta^2)}$

이다. 그러므로 $2 \le L < s$ 또는 $L=1, L<s$에서 $\phi>0$이고 $\Theta>0$이면 $\Delta f(s)<0$이므로 계절주기가 증가하면 채찍효과는 감소하며, 반면에 $\phi>0$이고 $\Theta<0$이면 $\Delta f(s) \ge 0$이므로 계절주기가 증가하면 채찍효과도 증가한다. ■

정리 5에서 가)의 결과는 계절이동평균계수 Θ에 영향을 받지 않고 채찍효과가 발생한다(<Figure 2>, <Figure 3>). 이는 계절성이 없는 $s=1$에 대해 Duc *et al.* (2008)의 연구의 결과에서 $\phi>\theta$(이동평균계수)이면 항상 채찍효과가 발생하는 조건과 다르다. 나)의 결과도 Θ에 영향을 받지 않고 발생한다. 즉, 채찍효과는 $2 \le L < s$에서 $\phi>0$이면 조달기간이 짧을수록 더욱더 감소한다. 그러나 조달기간의 증가에 채찍효과의 상한값이 있다. Duc *et al.* (2008)의 연구결과에서도 조달기간이 증가할수록 $B(L, s, \Theta, \phi)$가 증가하나 상한값이 존재한다. 따라서, 나)의 특성은 $2 \le L < s$라는 범위를 제외하면 Duc *et al.* (2008)의 결과와 동일하다. 나)의 특성을 이용하여 채찍효과를 감소시키기 위해서는 공급사슬을 구성하는 소매자와 공급자 간에 조달기간을 줄일 수 있도록 협업 또는 조정의 활동이 필요하다(<Figure 4>). 그리고 $2 \le L < s$ 또는 $L=1, L<s$에서 $\phi>0$이고 Θ의 값에 따라 계절주기가 증가하면 $B(L, s, \Theta, \phi)$가 증감하나 폭이 적다(<Figure 5>, <Figure 6>).

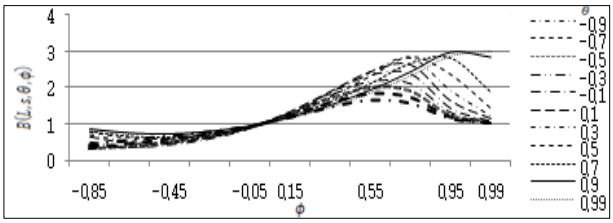

Figure 2. $s=3$이고 $L=2$일 때 $B(L, s, \Theta, \phi)$

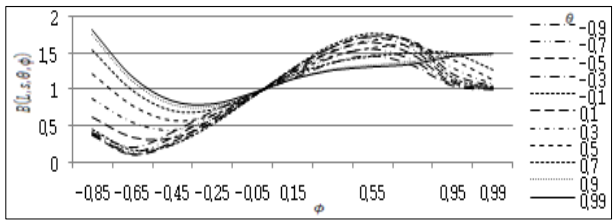

Figure 3. $L=1$이고 $s=4$일 때 $B(L, s, \Theta, \phi)$

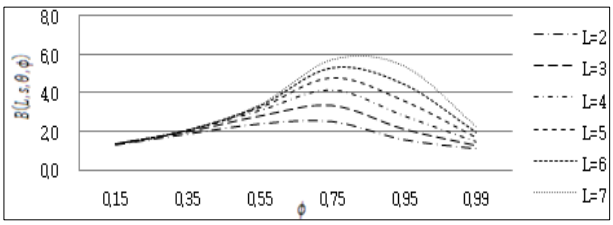

Figure 4. $s=8$이고 $\Theta=0.1$일 때 $B(L, s, \Theta, \phi)$

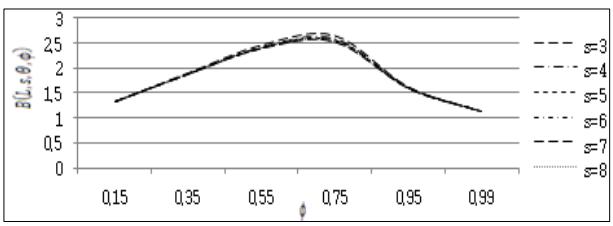

Figure 5. $L=2$이고 $\Theta=0.1$일 때 $B(L, s, \Theta, \phi)$

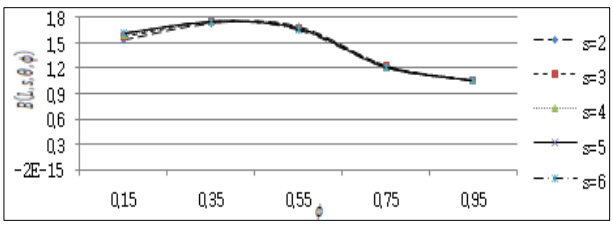

Figure 6. $L=1$이고 $\Theta=0.1$일 때 $B(L, s, \Theta, \phi)$

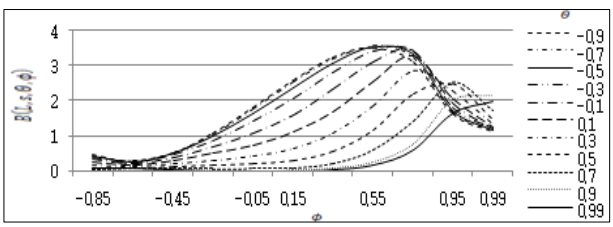

Figure 7. $s=2$이고 $L=3$일 때 $B(L, s, \Theta, \phi)$

$2 \le L < s$에 범위의 채찍효과 측도는 포함된 모수값의 변화에 채찍효과가 일정한 규칙을 갖지 않고 발생하였다. <Figure 7>은 $s = 2$이고 $L = 3$일 때 Θ와 ϕ의 값의 변화에 채찍효과의 변화를 나타내고 있다. 이상의 결과를 통해 알 수 있듯이 계절주기는 채찍효과의 발생에 영향을 미치며 식 (38)은 계절성이 있거나 없는 모든 경우의 채찍효과를 측정할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 계절적 수요를 고려한 채찍효과 측도의 개발로서 2단계 공급사슬을 대상으로 개발한 후 다단계 공급사슬로 확장하였다. 일반적으로 고객의 수요에 계절성이 포함된 경우에 대응해야 하는 소매자는 소매자가 제품을 조달하는데 있어서도 계절성을 고려하여 공급자에게 발주한다. 그러므로 고객의 수요에 계절성이 있으면 채찍효과도 계절성에 영향을 받을 것으로 예상할 수 있다.

본 연구의 결과는 계절성을 고려한 채찍효과 측도의 개발을 통해 계절성이 채찍효과에 영향을 미치는 것을 입증하였다. 개발된 채찍효과는 계절성이 없는 경우와 있는 경우를 모두 포함하여 채찍효과를 측정할 수 있다. 특히, 계절성이 없는 경우는 본 연구에 포함된 모든 정리에서 $s = 1$의 값을 대입하면 Duc *et al*. (2008)의 연구결과와 일치한다. 계절성이 포함된 채찍효과는 계절주기보다 더욱더 짧은 조달기간을 유지함으로써 채찍효과의 발생을 예방할 수 있기 때문에 공급사슬의 구성원은 일정수준까지 조달기간을 줄일 수 있도록 협업 및 조정의 활동이 요구된다. 그리고 계절성을 포함한 채찍효과 측도는 몇 가지 특성을 제외하고는 채찍효과 측도에 포함된 자기회귀계수, 계절이동평균계수, 계절주기 및 조달기간의 크기에 따라 발생할 수도 있으며 발생하지 않을 수 있기 때문에 모수간의 상호관계에 고려하여 채찍효과의 발생 여부를 판단해야 한다.

향후 연구로는 채찍효과에 대한 계절적 영향에 관하여 더욱더 많은 이해를 위해 계절적 시계열 모형에 기초한 다양한 수요예측기법 및 재고정책을 고려한 채찍효과 측도의 개발이 필요하다.

참고문헌

Alwan, L. C., Liu, J. J., and Yao, D-Q. (2003), Stochastic Characterization of Upstream Demand Processes in a Supply Chain, *IIE Transactions*, **35**(3), 207-219.

Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1976), *Time Series Analysis* : *Forecasting and Control*, Revised Edition, Holden-Day, San Francisco, California.

Chen, F., Drezner, Z., Ryan, J. K., and Simchi-Levi, D. (2000a), Quantifying the Bullwhip Effect in a Simple Supply Chain : The Impact of Forecasting, Lead Times, and Information, *Management Science*, **46**(3), 436-443.

Chen, F., Drezner, Z., Ryan, J. K., and Simchi-Levi, D. (2000b), The Impact of Exponential Smoothing Forecasts on the Bullwhip Effect, *Naval Research Logistics*, **47**(4), 269-286.

Chopra, S. and Meindl, P. (2007), *Supply Chain Management* : *Strategy, Planning and Operations*, Pearson International Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Duc, T. T. H., Luong, H. T., and Kim, Y. D. (2008), A Measure of Bullwhip Effect in Supply Chains with a Mixed Autoregressive-moving Average Demand Process, *European Journal of Operational Research*, **187**(1), 243-256.

Forrester, J. W. (1969), *Industrial Dynamics*, MIT Press, Cambridge.

Gilbert, K. C. (2005), An ARIMA Supply Chain Model, *Management Science*, **51**(2), 305-310.

Gilbert, K. C. and Chatpattananan, V. (2006), An ARIMA Supply Chain Model with a Generalized Ordering Policy, *Journal of Modeling in Management*, **1**(1), 33-51.

Graves, S. C. (1999), A Single-Item Inventory Model for a Nonstationary Demand Process, *Manufacturing and Service Operations Management*, **1**(1), 50-61.

Heyman, D. and Sobel, M. (1984), *Stochastic Models in Operations Research*, McGraw-Hill, New York.

Kelle, P. and Milne, A. (1999), The Effect of (s, S) Ordering Policy on the Supply Chain, *International Journal of Production Economics*, **59**(1-3), 113-122.

Lee, H. L., Padmanabhan, V., and Whang, S. G. (1997a), The Bullwhip Effect in Supply Chain, *Sloan Management Review*, **38**(3), 93-102.

Lee, H. L., Padmanabhan, V., and Whang, S. G. (1997b), Information Distortion in a Supply Chain : The Bullwhip Effect, *Management Science*, **43**(4), 546-558.

Luong, H. T. (2007), Measure of Bullwhip Effect in Supply Chains with Autoregressive Demand Process, *European Journal of Operational Research*, **180**(3), 1086-1097.

Luong, H. T. and Phien, N. H. (2007), Measure of Bullwhip Effect in Supply Chains : The Case of High Order Autoregressive Demand Process, *European Journal of Operational Research*, **183**(1), 197-209.

McCullen, P. and Towill, D. (2002), Diagnosis and Reduction of Bullwhip in Supply Chains, *Supply Chain Management* : *An International Journal*, **7**(3), 164-179.

Nahamis, S. (1997), *Production and Operations Analysis*, 3rd ed., Irwin McGraw-Hill, New York.

Sterman, J. D. (1989), Modeling Managerial Behavior : Misperceptions of Feedback in a Dynamic Decision Making Experiment, *Management Science*, **35**(3), 321-339.

Wei, W. W. S. (1990), *Time Series Analysis* : *Univariate and Multivariate Methods,* Addison-Wesley, Redwood City, California.

Zhang, X. (2004), The Impact of Forecasting Methods on the Bullwhip Effect, *International Journal of Production Economics*, **88**(1), 15-27.