

## 소성 가공 공정 해석을 위한 2차원 사각 요소망 자동 생성

김상은\*, 양현익\*\*

### Two Dimensional Automatic Quadrilateral Mesh Generation for Metal Forming Analysis

Sang-Eun Kim\* and Hyun-Ik Yang\*\*

#### ABSTRACT

In a finite element analysis of the metal forming processes having large plastic deformation, largely distorted elements are unstable and hence they influence upon the result toward negative way so that adaptive remeshing is required to avoid a failure in the numerical computation. Therefore automatic mesh generation and regeneration is very important to avoid a numerical failure in a finite element analysis. In case of generating quadrilateral mesh, the automation is more difficult than that of triangular mesh because of its geometric complexity. However its demand is very high due to the precision of analysis. Thus, in this study, an automatic quadrilateral mesh generation and regeneration method using grid-based approach is developed. The developed method contains decision of grid size to generate initial mesh inside a two dimensional domain, classification of boundary angles and inner boundary nodes to improve element qualities in case of concave domains, and boundary projection to construct the final mesh.

**Key words :** Metal Forming, Remeshing, Quadrilateral Mesh, Automatic Mesh Generation

#### 1. 서 론

소성 가공에 의한 제품들은 재료에 소성변형을 가함으로써 제조된다. 따라서 일찍부터 재료 혹은 소성 가공에 소모되는 에너지의 절감과 가공 과정의 분석을 위해 가공 공정 전반에 걸친 해석이 수행돼왔으며, 현재도 연관된 활발한 연구가 진행되고 있다. 대변형을 일으키는 소성 가공 공정의 유한 요소 해석에서 초기 요소망은 매우 불안정해지고 급부적으로 발생하는 과도한 변형에 의해 요소의 퇴화 현상이 발생하게 된다. 이러한 경우 수치 해석의 오차가 많이 발생하게 되므로 요소망 재생성(adaptive remeshing)은 그 시점과 필요에 따라 적절하게 이루어져야 한다. 요소망 재생성의 기본적인 개념은 퇴화된 요소를 새로운 양질의 요소로 재구성하고 초기 요소의 변형율, 응력, 온

도, 그리고 경계 조건 등의 각종 물리적 정보들을 사상(mapping) 하는 것이다. 요소망 재생성은 요소망 재생성 결정과 신 요소망 생성 및 데이터 전환의 세 단계로 나눌 수 있다. 요소의 퇴화는 소성 진행 과정의 해석 과정 중에 빈번하게 일어나므로 요소망 재생성 시기 결정과 수행은 자동적으로 이뤄지는 것이 필수적이며 대체로 다음과 같은 세 가지 방법들이 제시되어왔다. 첫째는 유한 요소에서 계산된 변형율, 변형율 속도 또는 응력의 오차 노름(norm)에 기초한 평가 방법<sup>[1]</sup>이 있으며, 둘째로 요소의 특징적인 기하학적 변형에 의한 평가 방법<sup>[2]</sup>과 마지막으로 자코비안 행렬(Jacobian matrix)의 계산에 의한 평가 방법<sup>[3]</sup> 등이 있다. 요소 형상 측면에서 삼각 요소망은 상대적으로 사각 요소망 보다 자동화가 용이하지만 삼각 요소의 형상 함수가 일차식(linear)인 반면에 사각 요소의 경우에는 쌍일차식(bilinear)이므로 해석의 정확도를 고려해 볼 때 사각 요소를 선호한다. 따라서 소성 가공 공정과 같이 대변형을 수반하는 유한 요소 해석에서도 균일한 처짐을 갖는 사각 요소가 사용되고 있다. 그러나 사각 요소망의 생성은 삼각 요소망 생성에 비해 기하학적 구

\*비회원, 삼성테크윈

\*\*교신저자, 동신대학원, 한양대학교 기계공학과

- 논문투고일: 2006. 08. 30

- 논문수정일: 2009. 03. 02

- 심사완료일: 2009. 04. 20

속이 많아서 자동화하는데 어려움을 겪고 있어 이에 관한 연구가 계속되고 있다. 사각 요소망의 생성 방법은 크게 간접 생성법(indirect method)<sup>[4]</sup>과 직접 생성법(direct method)<sup>[7]</sup>으로 구분할 수 있다. 간접 생성법은 초기 삼각 요소망을 생성한 후에 인접 삼각 요소를 적절히 조합하여 최종적으로 사각 요소망을 구현하는 것이며, 직접 생성법은 초기 삼각 요소를 생성하지 않고 해석 영역에 대해 직접 사각 요소망을 구현하는 것이다. 특히 대변형 소성 가공의 요소망 생성에서는 Blacker과 Stephenson에 의해 제시된 페이빙(Paving)<sup>[9]</sup> 법과 격자 기반 생성법(grid-based approach)<sup>[10]</sup>이 널리 쓰이고 있다. 페이빙법은 해석 영역의 외곽 경계를 따라 요소를 순차적으로 채워나가는 데 형상의 외곽 경계 절점을 내부가에 따라 7가지로 분류하여 요소를 생성하는 방법이다. 따라서 외곽 요소 형질뿐만 아니라 내부 요소 또한 우수한 형질을 갖지만 요소의 겹침(overlapping)을 피하기 위해 각 페이빙 경계상에 생성된 요소마다 교차 검사를 위해 매우 많은 계산량이 필요하다는 단점이 있다. 이에 비해 격자 기반 생성법은 해석 영역 내부에 균일한 격자를 씌워 영역 내부에 부분 혹은 완전히 포함된 격자를 선택하여 초기 요소망을 구성하고 적절히 경계 투영(boundary projection)하여 최종 요소망을 얻어내는 방법이다. 따라서 페이빙과 비교해 많은 계산량을 요구하지 않아 빠른 시간 내에 요소망을 생성할 수 있다는 장점이 있으나 경계 투영 방법에 따라 외부 요소의 형질이 균일한 내부 요소의 형질에 비해 떨어지는 단점이 있다.

요소 저짐에 의해 재생성된 요소망은 국부적 요소 세분화(local mesh refinement)를 포함하는데 주로 변형률, 변형률 속도, 유효 변형률 등에 기초한 가중치들을 사용하여 일정 요소들을 그룹화 한 후 선택적으로 요소 세분화를 수행한다<sup>[11-13]</sup>. 이러한 국부적인 요소의 세분화는 차후에 발생하는 처짐을 예상하여 보다 나은 해석 결과를 얻고자 하는데 목적이 있다.

본 연구에서는 소성 가공 공정 해석에서 자동 요소망 생성에 중점을 두어, 임의의 경계를 갖는 2차원 영역에서 사각 요소망 직접 생성법을 제안하였다. 또한 내부 요소의 균일성을 위해 격자 기반 생성법에 의해 내부 격자 생성 후 격자 외부 절점을 경계 투영하여 사각 요소망을 재생성하였다. 앞서 언급한 바와 같이 격자 기반 생성법은 상대적으로 내부 요소가 균일하다는 장점을 가지고 있는 반면에 외부 경계로 투영하는 경우의 수가 많아 자동화하는데 어려움이 많고, 간접 생성법의 경우 계산량이 많은 단점이 있다. 따라서 이러한 단점을 보완하기 위해 요소망 생성 단계에서

초기 격자 크기의 구속 조건과 격자의 경계 투영에 대한 알고리즘을 제한함으로써 상대적으로 적은 계산량으로 균일한 사각 요소망을 구현하는 방법을 제시하였다. 또한 라플라시안 유연화법(Laplacian smoothing method)<sup>[14]</sup>을 사용하여 생성된 요소망의 형질을 개선하였으며 요소망 재생성 결과는 기하학적 요소 형질을 기준으로 한 인자를 사용하였다. 마지막으로 요소 세분화 단계에서는 다이(die)형상과 변형률에 따른 국부적 요소 세분화를 수행하였다.

## 2. 자동 요소망 생성

### 2.1 용어 정의

자동 요소망 생성은 크게 내부 요소망 생성과 초기 요소망 생성으로 나눌 수 있다. 이에 관해 기존 연구에서는 초기 격자 생성 이후 경계와 격자에 절점을 구성한 후 Delaunay 삼각화를 통해서 경계 요소를 생성하거나<sup>[15]</sup> 직접 사각으로 생성하는 경우에도 경계 각도에 따라 내부 요소를 분리(splitting)하는 방법<sup>[11,12,17]</sup> 등이 제안되었으나 본 연구에서는 해석 영역의 내부 요소망 생성 이전에 균일 요소망을 얻기 위해 격자가 가질 수 있는 최대 크기(the maximum grid size)를 결정하고 이후 경계 투영을 위한 경계 각도의 분류, 내부 절점의 분류, 경계 투영 방법을 통해 전 해석 영역에 대해 균일한 형질의 요소를 직접적으로 생성시켰다(Fig. 1).

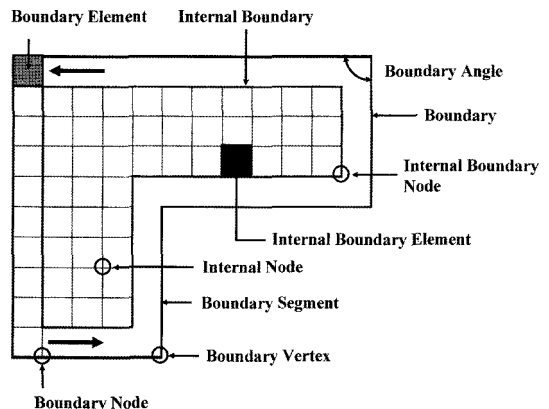


Fig. 1. Definition of terms.

- 1) 경계: 해석 영역의 경계
- 2) 내부 경계: 내부 요소망의 경계
- 3) 내부 경계 절점: 내부 경계에 생성된 절점
- 4) 내부 절점: 내부 경계 절점을 제외한 내부 경계상의 절점

- 5) 내부 경계 요소: 내부 요소 중 내부 경계 절점을 포함하는 요소
- 6) 경계 절점: 경계에 생성된 절점
- 7) 경계 요소: 경계 절점을 포함하는 최외곽 요소
- 8) 경계 꼭지점: 경계에 고정된 절점
- 9) 경계 선분: 경계 꼭지점과 그에 이웃한 경계 꼭지점을 잇는 선분
- 10) 경계각: 이웃한 경계 선분 사이의 각

**2.2 내부 요소망 생성**

**2.2.1 격자 크기 결정**

해석 영역 내부에 대한 균일한 크기의 격자를 생성하기 위해서는 내부 격자의 연속성이 보장되어야 한다. 이를 위해서 격자가 가질 수 있는 허용 크기가 제한되며 이것은 경계 선분의 최소 길이와 이웃하지 않는 경계에 위치한 임의의 점들 간의 해석 영역 내부의 최소 길이에 의해 결정된다. 따라서 격자 제거 조건을 고려하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad SL \\ & \text{Subject to } 1.4SL - BS_{ij} - 2ED \leq 0 \quad (1) \\ & 1.4SL - 0.4H_{ij} - 2ED \leq 0, \text{ if } i - j \neq 1 \quad (2) \end{aligned}$$

여기서 ED는 격자 제거 길이이며, SL은 격자 크기, BS<sub>ij</sub>는 경계 선분의 길이, H<sub>ij</sub>는 이웃하지 않는 경계 꼭지점 간의 영역 내 길이이며 i와 j는 경계 꼭지점을 나타낸다. 따라서 허용되는 격자의 크기는 식 (1)과 식 (2)의 구속 조건을 동시에 만족하는 값 중 최대값을 선택하게 된다. 그러나 대개의 경우, 즉 경계 선분간의 내부 거리가 충분하다면 식 (1)을 만족하는 격자 크기를 선택하게 되며, 그 값은 대략 경계 선분 최소 길이의 1/2~1/3에 해당한다. 위 두 식들의 계수들은 요소형상에 대한 수치적 실험을 통해 결정되었다.

또한 생성된 내부 격자의 외부 절점의 개수는 경계 절점의 수보다 많아야 한다. 왜냐하면 격자 외부의 절점 개수가 경계 절점수 보다 적게 되면 경계 요소들 사각으로 생성할 수 없게 되기 때문이다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$N(IBM) \geq N(BV) \quad (3)$$

여기서 N(IBM)은 내부 격자의 외부 절점의 개수이며 N(BV)은 경계 절점의 개수이다. 그러나 식 (1)과 식 (2)를 만족하지 않는 경우에도 식 (3)을 만족하는 경우 연속된 격자망을 생성할 수 있는데 이러한 경우에는

경계 요소의 형상이 대단히 떨어지게 되므로 만족할 만한 결과를 얻어낼 수 없다. 따라서 격자 크기를 결정할 때 식 (1)-(3)의 구속 조건을 모두 만족하는 격자 크기를 취하는 것이 좋다.

**2.2.2 내부 요소망 생성**

위의 식 (1)과 (2)에 의해 균일 격자의 최대 크기(SL<sub>max</sub>)를 결정한 후 생성 절점의 최대·최소 선침을 기준으로 전체 해석 영역을 포함하는 최외곽 경계에 대하여 균일 격자를 생성한다. 이후 생성된 균일 격자에서 경계와 겹치거나 바깥쪽에 생성된 격자, 즉 경계 내부에 요소를 이루고 있는 네 개의 절점을 모두 포함하지 않는 요소를 제거한다.

**2.2.3 격자 제거**

격자 제거(Element Elimination)의 개념은 내부 격자 생성 시 양질의 격자를 얻기 위해 경계 요소 중 경계로부터 일정 거리 이하의 격자를 제거하는 것이다. 이것은 내부 요소와 경계 요소의 크기에 일관성을 유지시킨다.

$$ED = (0.25 \sim 0.5)SL \quad (4)$$

식 (4)와 같이 경계 격자 중 하나 혹은 둘 이상의 절점이 경계와 격자 제거 길이 내에 존재하면 제거된다. 여기서 계수는 요소형상에 대한 수치적 실험을 통해 결정되었다.

**2.3 초기 요소망 생성**

**2.3.1 경계각과 내부 경계 절점의 분류**

경계각과 내부 경계 절점은 다음과 같이 분류된다 (Fig. 2).

1) 경계각의 분류

아래 경계각들은 요소 형상실험을 통해 가장 적절한 경우를 선정하여 분류하였다.

- Angle 1 0° ≤ α<sub>i</sub> < 130°
- Angle 2 130° ≤ α<sub>i</sub> < 180°
- Angle 3 180° ≤ α<sub>k</sub> < 360°

2) 내부 경계 절점의 분류

- IBNT 1(Inner Boundary Node Type 1)  
: 내부 경계 절점을 공유하는 요소가 1개
- IBNT 2(Inner Boundary Node Type 2)  
: 내부 경계 절점을 공유하는 요소가 2개 혹은 3개

**2.3.2 경계 투영 및 경계 요소 생성**

경계각과 내부 경계 절점이 분류되면 특정 내부 경

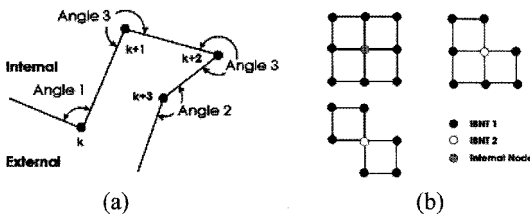


Fig. 2. Classification of (a) boundary angle type, (b) inner boundary node type.

계 절점에서 경계 꼭지점으로 경계 투영하게 된다. 이때 투영되는 선분의 길이는 경계 요소의 형질을 고려하여야 한다. 투영 방법은 경계각의 종류에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

1) Angle 1의 경우

경계 꼭지점과 최단거리에 존재하는 내부 경계 절점을 찾는다. 이때 내부 경계 절점은 경계 꼭지점마다 유일해야 하며 경계 꼭지점과의 연결 시 경계와 교차하지 않아야 한다. 따라서 Fig. 3(a)에서와 같이 선택된 내부 경계 절점에서 경계 꼭지점을 포함하는 양 경계 선분으로 투영하여 경계 절점과 경계 요소를 생성한다.

2) Angle 2의 경우

Angle 1의 경우와 동일하나 이 경우에는 Fig. 3(b)에서와 같이 내부 경계 절점과 경계 꼭지점을 직접 연결한다.

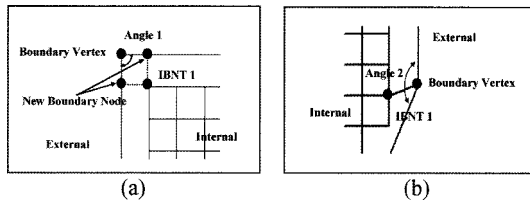


Fig. 3. Boundary projection. (a) Angle 1, (b) Angle 2.

3) Angle 3의 경우

생성된 경계 요소의 형질을 고려하여 경계 꼭지점에서 일정 거리에 있는 내부 경계 절점을 검색한다. 이를 위해 검색 반경을 정의하고 이 검색 반경 내에 포함되는 IBNT2의 개수(n)에 따라 투영 방법이 결정된다(Fig. 5). 검색 반경(SR)은 다음과 같이 정의한다.

$$SR = (2 \sim 3)SL \tag{5}$$

경계 요소는 경계 꼭지점과 검색 반경 내에 포함되는 IBNT2에 이웃한 내부 경계 절점을 연결하여 생성된다. 이때 생성되는 경계 요소는 내부 요소들과 겹침

을 피하기 위해 내부 요소와 교차 검사를 수행한다.

1. n=0일 때

검색 반경 내에 IBNT2가 존재하지 않을 경우에는 Angle 2와 같이 경계 꼭지점과 가장 가까운 내부 경계 절점을 연결한다.

2. 1 ≤ n ≤ 3일 때

검사 반경 내에 IBNT2의 경우를 갖는 내부 경계 절점의 수가 3개 이하일 경우, IBNT2에 이웃한 내부 경계 절점과 경계 꼭지점을 연결하여 경계 요소를 생성한다. 경계 요소 생성 시 제약 조건은 다음과 같다.

Case 1 다른 내부 요소와 겹침이 발생할 경우

Case 2 사각 요소를 생성하지 못할 경우

위 세 가지 제약 조건에 해당하는 경우에는 경계 요소를 생성하지 않으며, 따라서 Fig. 4와 같이 검색 반경을 재정의하여 위 조건을 재검토한 후 경계 요소를 생성하게 된다.

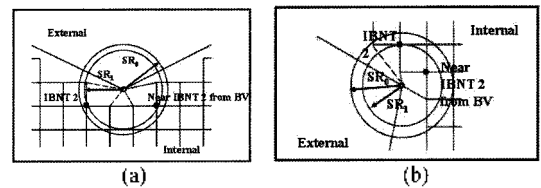


Fig. 4. Redefinition of SR. (a) Case 1, (b) Case 2.

3. n ≥ 4일 때

n ≥ 4인 경우에는 경계 요소 생성 제약 조건들을 만족하지 못하게 된다. 따라서 검색 반경을 재정의하여 n ≤ 3이 되도록 한다.

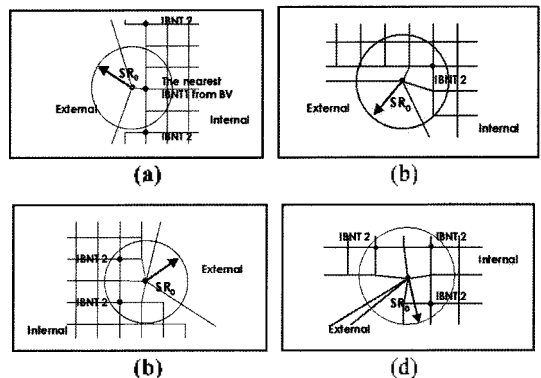


Fig. 5. Boundary projection in case of Angle 3. (a) n=0, (b) n=1, (c) n=2, (d) n=3.

위와 같이 경계 꼭지점에서 경계 투영이 완료된 이

후, 경계 꼭지점과 투영된 내부 경계 절점 이외의 나머지 내부 경계 절점은 각 경계 선분에 등간격으로 투영되어 새로운 경계 절점을 생성하여 연결하면 Fig. 6과 같이 요소망 생성이 완료된다.

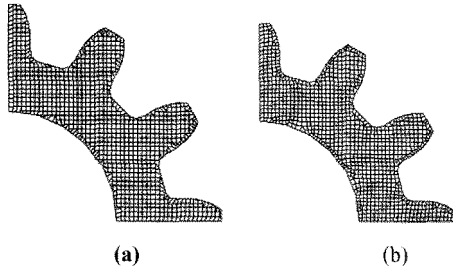


Fig. 6. Final mesh (a) before smoothing, (b) after smoothing.

### 3. 요소망 재생성

#### 3.1 요소망 재생성 시기의 결정

FEM 해석 과정에서는 해석 영역에 대한 이산화(discretization)와 미지 함수 보간(interpolation)에 의한 오차가 발생하며 더욱이 대변형을 수반하는 소성 가공 공정 해석에서는 요소 퇴화에 의해 더 이상 해석 진행이 불가능해지는 경우가 발생하게 된다. 따라서 선체 해석 영역에 대한 요소망 재생성이 필수적이며 기준치 이상의 오차가 발생한 요소에 대해 세분화를 수행하여 해석의 정밀도를 높일 수 있다. 이 과정에서는 해석 영역의 경계를 재정의 하는 것이 중요하다. Fig. 7은 요소망 재생성에 대한 일반적인 알고리즘이다.

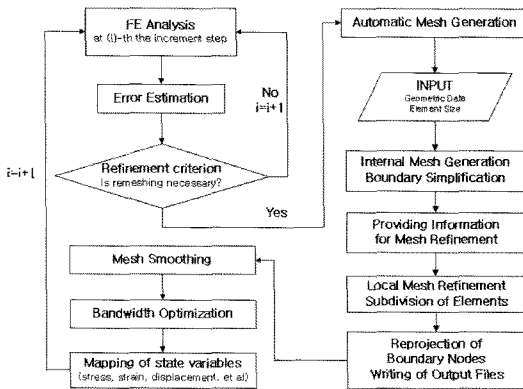


Fig. 7. Flowchart of remeshing algorithm.

자동 요소망 재생성 단계에서 가장 중요한 것은 재생성 시기를 결정하는 것이다. 따라서 이에 관한 연구가 활발히 진행되어 왔으며 다음의 몇 가지로 요약될

수 있다.

1) 응력, 변형을 및 변형을 속도 등의 오차 norm)을 기반으로 한 방법<sup>[1]</sup>

첫 번째 방법으로 Zienkiewicz 등은 다음과 같은 방법을 제안하였다. 변형을 오차의 L2 norm  $\|e_\epsilon\|$  과 예측된상대오차(the predicted relative error,  $\eta^*$ )는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|e_\epsilon\|^2 = \int_{\Omega} (\epsilon^* - \hat{\epsilon})^2 d\Omega = \sum_{i=1}^m \|e_{\epsilon_i}\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} (\epsilon^* - \hat{\epsilon})^2 d\Omega, \quad (6)$$

$$\eta^* = \sqrt{\frac{\|e_\epsilon\|^2}{\|\epsilon^*\|^2 + \|e_\epsilon\|^2}} \quad (7)$$

이때  $m$ 은 요소의 총 개수,  $\epsilon^*$ 는 유한 요소 해석에 의한 변형율을 나타내며  $\hat{\epsilon}$ 는 실제 변형율을 나타낸다. 최대 허용가능 상대오차(a maximum permissible relative error,  $\eta_{max}^*$ )가 주어지면 각각의 요소  $i$ 마다 최대 허용 오차를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\|e_\epsilon\|_{i,max} = \frac{\eta_{max}^* (\|\epsilon^*\|^2 + \|e_\epsilon\|^2)^{1/2}}{\sqrt{m}} \quad (8)$$

따라서 어떤 요소에 대하여  $\|e_\epsilon\|_{i,max}$  보다 큰 오차가 발생할 경우, 요소망 재생성을 실시하게 된다.

2) 기하학적 접근법<sup>[2]</sup>

기하학적인 접근법은 두 개의 일정한 요소 선분이 180도에 이르게 되면 재생성을 하게 되는 방법이다.

3) 자코비안 행렬의 행렬식(determinant) 계산에 의한 방법<sup>[3]</sup>

요소 각 절점의 Gauss 직분점의 자코비안 행렬식 중에서 가장 작은 값이 정해진 양의 상수값 보다 작게 되면 재생성을 실시하게 된다.

본 연구에서는 기하학적 접근법을 이용하여 요소의 형질, 즉 각 요소 선분의 최대 최소길이의 비나 대각 길이의 비의 평균값과 최대값에 일정 기준치를 주어 계산한 인자값 이용하여 재생성을 판단하는 방법<sup>[4]</sup>을 채택하였다(Fig. 8). 즉,

$$D = p_1 \bar{a} + p_2 \bar{d} + p_3 a_{max} + p_4 d_{max} - 1 \quad (9)$$

여기서,  $a$ 는 요소 선분의 최대 최소길이의 비이며  $d$ 는 대각길이의 비이고  $p_1$ 과  $p_2$ 는 0.4,  $p_3$ 과  $p_4$ 는 0.1의 값을 갖는다. 이때  $\bar{a}$ ,  $\bar{d}$ 는 각각의 평균값을 의미한다. 그리고  $D$ 는 요소망 재생성을 판단하는 기준이 되며 이 값이 0.5를 넘을 경우에 요소망을 재생성하게 된다. 따라서 이 방법을 사용하는 경우에는 해석 중에 요소 형질에 관한 관찰이 필요하다.

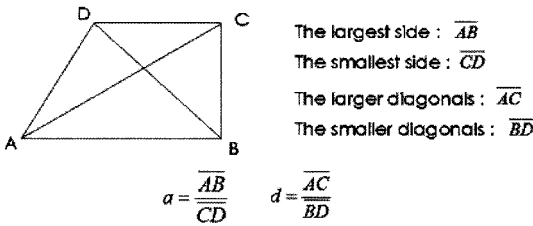


Fig. 8. Element quality check.

3.2 요소망 밀도 조절

요소망 세분화는 균일 요소망 세분화(uniform mesh refinement)와 국부적 요소망 세분화로 나눌 수 있다. 균일 요소망 세분화는 전 해석 영역에 대해 요소의 크기를 줄이는 것을 말하며, 국부적 요소 세분화는 제한적, 선택적 세분화라고 할 수 있다. 본 연구에서는 변형율과 다이의 곡률을 고려하여 국부적 요소 세분화를 수행하였는데 이는 한정된 요소의 개수로 보다 정확한 결과를 얻어 낼 수 있기 때문이다.

좀 더 자세히 본 과정을 설명하면 먼저, 변형율이 큰 요소가 선택적으로 세분화된다. 따라서 요소의 스트레인 상대값(the relative value of strain of elements,  $\beta$ )을 다음과 같이 정의하고 특정 요소의  $\beta$ 가  $\beta_0$ 를 초과하게 되면 세분화된다<sup>10)</sup>.

$$\beta_i = \frac{\bar{\epsilon}_i}{\bar{\epsilon}_{\max}}, \quad 0.8 \leq \beta_0 \leq 0.9 \quad (10)$$

다음으로 작은 반경을 갖는 오톱 형상의 다이와 접촉한 요소 또한 세분화된다. 왜냐하면 요소의 크기에 비해 다이의 곡률 반경이 너무 작게 되면 경계부에서 해석결과가 좋지 않기 때문이다. 따라서 다이와 요소의 크기에 의한 요소 세분화를 결정하기 위한 인자( $\gamma$ )를 다음과 같이 정의한다.

$$SL > \gamma \cdot DR \quad (11)$$

여기서 DR은 접촉한 다이 반경(die radius)이다(Fig. 9). 이때  $\gamma$ 는 0.3~0.5의 값을 갖게 된다.

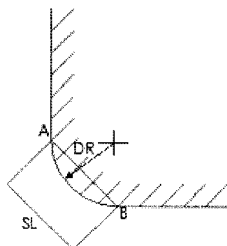


Fig. 9. Defining die radius(DR) and SL to determine  $\gamma$ .

3.3 요소 분해

요소망의 연결성(connectivity)을 위해 세분화가 결정된 요소를 분할하고 이웃한 요소 또한 적절히 분해하여 연결하는 것이 무엇보다 중요하다. 따라서 요소가 경계 선분을 포함하는지의 여부, 요소의 상호 위치와 요소 선분의 중간 절점(mid-side node)포함 개수를 고려해야 한다. 본 연구에서는 이를 위한 요소의 분해 방법으로 다음의 알고리즘을 제시하였다(Fig. 10).

1) 중간절점을 하나 포함하고 있는 요소의 경우

1. 경계를 포함하는 경우(Template c)

요소의 중심과 경계를 포함하는 요소 선분의 중심에 절점을 생성한 후 연결한다. 그리고 중심 절점을 포함하지 않는 선분들이 공유하는 절점과 중심 절점을 연결한다.

2. 경계를 포함하지 않는 경우(Template b)

중간절점을 포함하는 선분의 반대편 선분에 새로운 중간절점 생성한다. 이때 생성된 절점은 이웃 요소와 절점을 공유한다.

2) 중간절점을 둘 포함하고 있는 요소의 경우

경계의 포함 여부와 관계없이 중간절점의 상대적인 위치만 고려한다.

따라서 이웃한 경우는 Template c, 반대편일 경우에는 Template b를 택한다.

3) 중간절점을 셋 이상 포함하고 있는 요소의 경우  
 중간절점을 포함하지 않는 선분에 새로운 중심 절점을 생성한다(Template a).

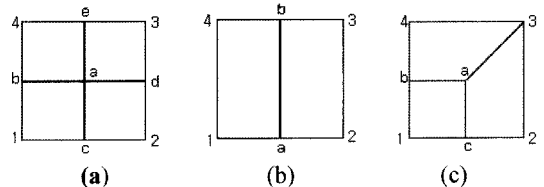


Fig. 10. Templates used in sub-division of elements  
 Template a, b, c. (a) one into four with mid-side nodes, (b) one into two with opposite mid-side nodes, (c) one into three with two adjacent mid-side nodes.

4. 유연화

요소 형상을 개선하기 위해서 반복적으로 라플라시안 유연화 과정을 거치게 된다. 이것은 한 절점과 연결된 다른 절점과의 상대적인 거리를 이용하게 된다. 즉, 각각의 절점들의 위치는 요소 선분을 공유하는 연속적인 이웃 절점들 사이의 거리의 평균값을 취하게 된다<sup>11)</sup>.

$$x_i^n = \frac{1}{K_{ij}} \sum_{j=1}^{K_i} x_j^{n-1}, y_i^n = \frac{1}{K_{ij}} \sum_{j=1}^{K_i} y_j^{n-1} \quad (12)$$

여기서,  $i$ 는 질점을 나타내며,  $j$ 는 1에서  $K_i$ 사이의 값을 갖는다. 또한  $K_i$ 는  $i$ 번째 질점에 요소 선분을 공유하는 연속적인 이웃 질점의 수를 나타낸다. 이에 대한 수렴식은 다음과 같다.

$$\frac{\left[ \sum_{i=1}^m (x_i^n - x_i^{n-1})^2 + (y_i^n - y_i^{n-1})^2 \right]^{1/2}}{\left[ \sum_{i=1}^m (x_i^{n-1})^2 + (y_i^{n-1})^2 \right]^{1/2}} < \delta \quad (13)$$

여기서,  $n$ 은 반복횟수이고  $m$ 은 전체 질점의 수이며  $\delta$ 는 작은 값(0.001)을 갖는다[14]. 따라서, Fig. 11과 같이 질점의 유연화 과정을 거침으로써 이미 생성된 요소의 형질을 더욱 향상시키게 된다.

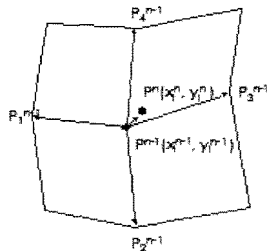


Fig. 11. Iterative Laplacian smoothing.

## 5. 예 제

### 5.1 Annulus 기어 가공 해석에서 요소망 재생성

첫 번째 예제로서 annulus gear의 다단계 폐쇄형 단조 가공 과정(Multi-stage closed-die-forging processes)을 선택하였다. 이 예제는 축대칭 문제이므로 Y축을 중심으로 한 기하학적 단면의 한쪽면만을 해석영역으로 하였다. 여기서 요소망 재생성 대상 과정은 공정 1(step1)과 공정 2(step2)이므로 공정 3(step3)은 다루지 않았다. 공정 해석을 위한 재료의 물성치는 Table 1과 같다.

Table 1. Material property

|                         |                        |
|-------------------------|------------------------|
| Young's modulus (E)     | 200 GPa                |
| Initial yielding stress | 360 MPa                |
| Const. hardening slope  | 30 MPa                 |
| Poisson ratio           | 0.3                    |
| Friction coefficient    | 0.3                    |
| Density                 | 7340 kg/m <sup>3</sup> |

### 5.1.1 공정1

공정1은 소재를 34%압축시켜 완성된다. 상형의 속도는 Y방향으로 0.013 m/s이고 하형은 고정된다. Fig. 12는 초기 요소망을 나타내며 Fig. 13은 공정 과정 중의 요소망 변화를 압축률에 따라 나타내었다.

#### 1) 요소망 재생성 시기의 결정

본 예제의 공정1에서 요소망 재생성은 2회에 걸쳐 이루어지게 된다.

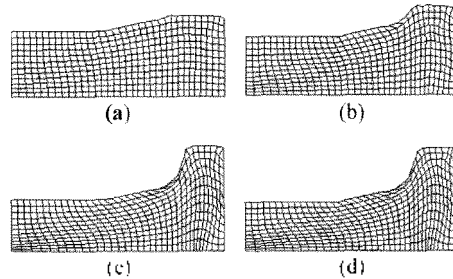
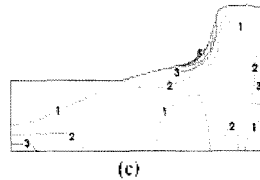
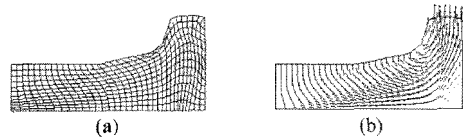


Fig. 12. Flow patterns expressed by distorted meshes at step1. (a) 12.7%, (b) 21.3%, (c) 32.5%, (d) 34% (compression rate).



| Line no. | Strain    |
|----------|-----------|
| 1        | 3.109E-01 |
| 2        | 6.167E-01 |
| 3        | 9.225E-01 |
| 4        | 1.228E00  |
| 5        | 1.534E00  |

Fig. 13. Before 2nd remeshing at step1. (a) distorted mesh, (b) velocity field, (c) strain distribution.

#### 2) 요소망 재생성

각 재생성 과정마다 요소망 재생성 판단 기준인  $D$  값과 요소의 형질은 Table 2와 같다(Fig. 14).

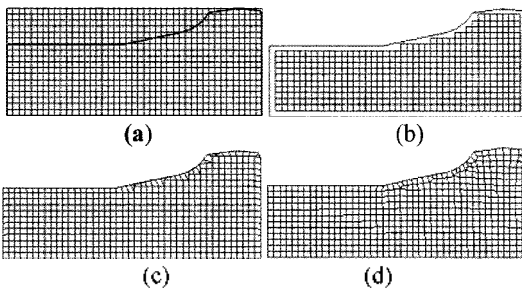
#### 3) 국부적 요소 세분화

첫 번째 요소망 재생성 시 상가 소성 변형율을 기준으로 밀도 조절을 시행하였다(Fig. 15).

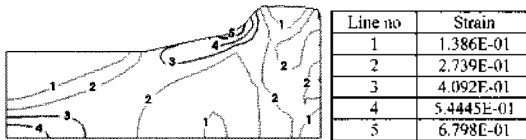
Fig. 16에서 보는 바와 같이  $\beta_0$ 를 초과하는  $\beta$ 가 존재하며 해당 요소의 개수는 4개이다. 이 경우 다이의 곡률에 비해 요소의 크기가 비교적 작으므로 (DR-7SL) 밀도 조절 대상에서 제외된다. Fig. 17에서는 요소 세분화 차수(refinement order)를 각각 1과 2로 조절하여 생성하였다.

**Table 2.** Remeshing data during compression at step1

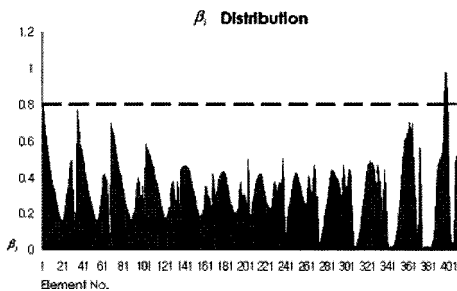
|                      |                           |        |        |
|----------------------|---------------------------|--------|--------|
|                      | 0 <sup>th</sup> remeshing | 1st    | 2nd    |
| No. nodes            | 455                       | 658    | 625    |
| No. elements         | 408                       | 597    | 562    |
| $\bar{a}$            | .                         | 1.221  | 1.335  |
| $\bar{d}$            | .                         | 1.115  | 1.202  |
| $a_{max}$            | .                         | 3.147  | 3.532  |
| $d_{max}$            | .                         | 3.205  | 3.318  |
| $D$                  | .                         | 0.569  | 0.7    |
| Height Reduction (%) | < 21.31%                  | 21.31% | 32.45% |



**Fig. 14.** Automatic mesh generation process at first remeshing. (a) input of a geometric data and generation of a grid, (b) internal mesh generation, (c) generated mesh before smoothing, (d) final mesh after iterative smoothing.



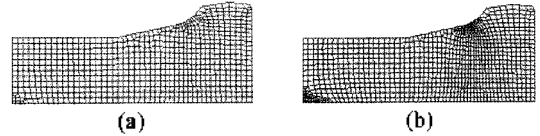
**Fig. 15.** Equivalent plastic strain at first remeshing period of step1 (Maximum strain=8.151E-01, 21.31% compression).



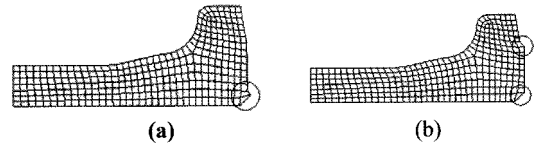
**Fig. 16.** distribution at first remeshing period (=0.8) of step1.

5.1.2 공정2

공정2는 소재를 16%압축시켜 완성되며 요소망 재



**Fig. 17.** Density control (a) 1st order refinement, (b) 2nd order refinement.



**Fig. 18.** Overlapping between element side and die surface at step2 (a) 10.65% compression, (b) the final mesh (15.2%).

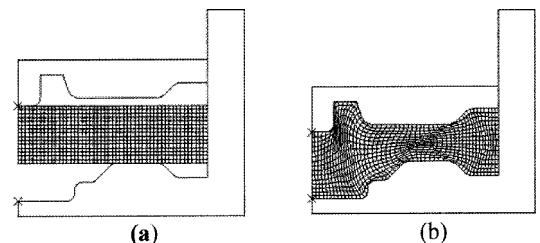


**Fig. 19.** Local mesh refinement at step2.

생성은 1회에 걸쳐 이루어진다. 상형의 속도는 -0.012 m/s이다. 공정2에서는 요소와 다이 곡면의 겹침으로 인해 극부적 요소 세분화를 시행하게 된다(Fig. 19). Fig. 18은 공정 해석과정 중 겹침 발생을 보여준다.

5.2 임의의 형상에서 요소망 재생성

본 예제는 임의의 형상에서 요소망 재생성을 나타내며 총 네 번의 요소망 재생성을 거친다. Fig. 20(a)는 초기 형상을 나타내며 Fig. 20(b)는 가공 완료 후의 변형된 요소망을 나타낸다.



**Fig. 20.** (a) Initial mesh of example 2, (b) Final mesh at the end of forming of example 2.

Table 3은 각 재생성 과정마다 요소망 재생성 판단 기준인 D값과 요소의 형질을 나타낸다.

Fig. 21은 각각의 재생성 과정에서 변형된 요소망을



Table 3. Remeshing data of example 2

|              | 1 <sup>st</sup> remeshing | 2 <sup>nd</sup> | 3 <sup>rd</sup> |
|--------------|---------------------------|-----------------|-----------------|
| No. nodes    | 1133                      | 1406            | 1700            |
| No. elements | 1045                      | 1304            | 1588            |
| $\bar{a}$    |                           | 1.297           | 1.361           |
| $\bar{d}$    |                           | 1.206           | 1.223           |
| $a_{max}$    |                           | 2.982           | 3.014           |
| $d_{max}$    |                           | 3.087           | 3.125           |
| $D$          |                           | 0.608           | 0.646           |
| Process (%)  | 55.8%                     | 89.3%           | 94.9%           |

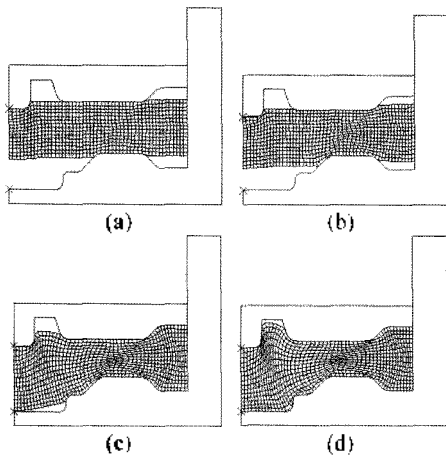


Fig. 21. The distorted meshes of example 2. (a) 39.1%, (b) 55.8%, (c) 89.3%, (d) 94.9% (process time rate).

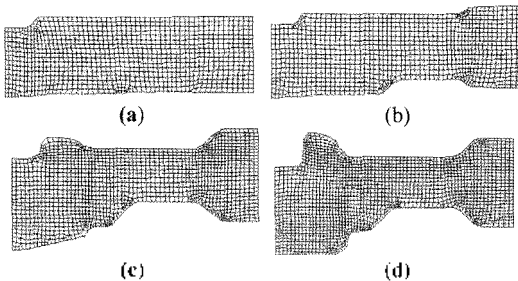


Fig. 22. The regeneration meshes of example 2. (a) 39.1%, (b) 55.8%, (c) 89.3%, (d) 94.9% (process time rate).

나타내며, Fig. 22는 각 단계에서 새롭게 생성된 요소망을 나타낸다.

### 6. 결 론

본 연구에서는 기존의 격자 기반 생성법을 향상시

켜 전체적으로 정형화된 요소 및 요소량을 효율적으로 생성할 수 있었다. 또한, 오목형상의 코너부에서 좋은 형질의 요소를 얻기 위해 경계 요소를 미리 생성하여 격자 기반 생성법의 단점을 보완하였으며 균일 격자 생성을 위한 격자 크기를 결정함으로써 내부 격자의 연속성을 보장하여 경계 요소 생성 알고리즘을 간략화 할 수 있었다.

따라서 요소망 재생성 과정 중 요소망 생성 시 균일하고 정형화된 요소를 신속하게 생성시킬 수 있었으며 국부적 요소 세분화에서도 변형을 및 변형 집중부와 다이 간섭 부분에 대하여 요소 분해 알고리즘을 이용하여 세분화시킬 수 있었다.

향후에 초기 요소망 생성 시 격자 크기를 부분적으로 다양화시키고 입력된 해석 영역의 기하정보를 간략화하는 알고리즘에 대한 연구가 이루어진다면 다양한 형상의 소성 가공 공정 해석에 많은 도움이 될 수 있을 것으로 사료된다.

### 참고문헌

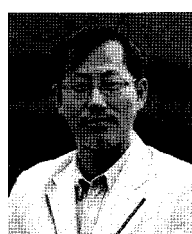
1. Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., "A Simple Error Estimate for Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engr.*, Vol. 24, pp. 337-357, 1987.
2. Hageman, L. J., "Automatic Adaptive Remeshing in EALPID, an Advanced Forging Simulation Program", *Proc. Comp. Engr.*, ASME, New York, pp. 93-97, 1987.
3. Wilkinson, J. H., "The Algebraic Eigenvalue Problem", Clarendon Press, Oxford, 1965.
4. Lo, S. H., "Generating Quadrilateral Elements on Plane and Over Curved Surfaces", *Comp. Str.*, Vol. 31, pp. 421-426, 1989.
5. Johnston, B. P., Sullivan Jr. J. M. and Kwansnik, A., "Automatic Conversion of Triangular Finite Element Meshes to Quadrilateral Elements", *Int. J. Num. Meth. Engr.*, Vol. 31, pp. 67-84, 1991.
6. Lee, C. K. and Lo, S. H., "A New Scheme for the Generation of a Graded Quadrilateral Mesh", *Comp. Str.*, Vol. 52, pp. 847-857, 1994.
7. Zhu, J. Z., Zienkiewicz, O. C., Hinton, E. and Wu, J., "A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation", *Int. J. Meth. Engr.*, Vol. 32, pp. 849-866, 1991.
8. Lo, S. H., "A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains", *Int. J. Num. Meth. Engr.*, Vol. 21, pp. 1403-1426, 1985.
9. Blacker, T. D. and Stephenson, M. B., "Paving : A New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation", *Int. J. Num. Meth. Engr.*, Vol. 32, pp. 811-847, 1991.

10. Ho-Le, K., "Finite Elements Mesh Generation Methods : A Review and Classification", *CAD*, Vol. 20, pp. 27-38, 1988.
11. Zhu, J. and Gotoh, M., "Automatic Remeshing of 2D Quadrilateral Elements and Its Application to Continuous Deformation Simulation : Part 1. Remeshing Algorithm", *J. Mat. Proc. Tech.*, Vol. 87, pp. 165-178, 1999.
12. Gotoh, M. and Zhu, J., "Automatic Remeshing of 2D Quadrilateral Elements and Its Application to Continuous Deformation Simulation : Part 2. Applications", *J. Mat. Proc. Tech.*, Vol. 87, pp.179-191, 1999.
13. Gautham, B. P., Goyal Sharad and Gandhe, Ajay, "Boundary Controlled Automatic Remeshing for 2D Simulation of Metal Forming", *J. Mat. Proc. Tech.*, Vol. 134, pp. 108-114, 2003.
14. Petersen, S. B. and Martins, P. A. F., "Finite Element Remeshing : A Metal Forming Approach for Quadrilateral Mesh Generation and Refinement", *Int. J. Num. Meth. Engr.*, Vol. 40, pp. 1449-1464, 1997.
15. Petersen, S. B., Rodrigues, J. M. C. and Martins, P. A. F., "Automatic Generation of Quadrilateral Meshes for the Finite Element Analysis of Metal Forming Processes", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 35, pp. 157-168, 2000.
16. 김병욱, 양현익, "수정된 Lo의 요소망 생성 알고리즘을 이용한 자동 삼각 요소망 생성 소프트웨어의 개발", 한국 CAD/CAM 학회 논문집, 제5권, 제1호, pp. 95-101, 2000.
17. 김도현, 양현익, "다양한 2차원 형상에서의 외부 경계 절점 오프셋 방법을 이용한 자동 사각 요소 및 요소망 생성", 한국 CAD/CAM 학회 논문집, 제8권, 제4호, pp. 270-277, 2003.



### 김 상 은

2002년 홍익대학교 기계설계학과 학사  
 2004년 한양대학교 대학원 기계설계학과 석사  
 2009년 현재 삼성테크윈 IMS사업부  
 관심분야: Mesh generation



### 양 현 익

1984년 한양대학교 기계공학과 학사  
 1986년 미국 컬럼비아대 기계과 석사  
 1991년 미국 컬럼비아대 기계과 박사  
 1991년 -1994년 현대전자산업 책임연구원  
 1995년 -현재 한양대학교 공학대학 기계정보경영공학부 교수  
 관심분야: CAD/CAM, Kinematics, 기계설계, 수소에너지 공학