

영상흐림보정에서 EM 알고리즘의 일반해: 반복과정을 사용하지 않는 영상복원

김승구^{1,a}

^a상지대학교 컴퓨터데이터정보학과

요약

본 연구에서는 영상흐림보정을 위한 EM 알고리즘의 일반형 해를 제공한다. 주어진 관측영상의 크기가 크거나 많은 반복을 필요로 할 때, EM 알고리즘의 반복은 매우 오랜시간이 걸리며 비실용적이다. 본 연구에서는 복원 영상의 유효영역 밖에서 약간의 근사로부터 해를 일반형으로 나타내고, 이것을 이산형 유한 푸리에 변환을 이용하여 EM 알고리즘의 반복과정을 사용하지 않으면서 매우 유효한 복원영상을 즉시 계산하는 방법을 제공한다.

주요용어: EM 알고리즘, 일반해, 유한 푸리에 변환, 영상흐림보정.

1. 서론

영상흐림보정(image deblurring)이란 영상관측기기의 구조적 원인으로 해상도가 저하된 영상(예, 초점이 맞지 않아 선명하지 않은 사진 등)을 선명하게 만드는 작업이라 할 수 있다. 영상 흐림보정은 통계학자들에게도 흥미로운 연구 주제로서, 최근에는 좀 덜하지만 한때 Molina 등 (2001)에 의해 심도 있게 연구되었고, 보다 최근에는 Qui (2008), Hall과 Qui (2007a, 2007b)에 의해 활발히 연구되고 있는 분야이다. 영상 흐림보정은 영상복원(image restoration) 혹은 영상재구성(image reconstruction) 영역에 포함된다. 그래서 본 연구에서는 영상 흐림보정을 간단히 영상복원이라 부르도록 하겠다.

저자는 학부에서 통계적 영상처리를 강의하는데, 강의 내용 중에는 흐림보정이 포함된다. 이를 위한 여러 기법 중에 EM 알고리즘에 의한 복원도 소개하게 되지만, 영상의 크기가 크고 많은 반복 횟수를 요할 때는 시간이 오래 걸리고 학생들이 지루해 하여 과제로 제출하도록 하게 하곤 하였다. 그래서 저자는 줄곧 다른 영상복원 기법들 처럼 EM 알고리즘의 복원영상도 즉시 계산되는 방법이 없을까 고심하였다. 문제는 EM 알고리즘의 반복해를 초기 복원영상과 반복횟수 만의 함수인 일반형(explicit form)으로 표현하는 것인데, 선형 영상관측모형의 경우 약간의 근사를 고려한다면 이것이 가능하다는 것을 알았다. 이를 본 연구에서 소개하고자 한다.

이를 위해 먼저 다음 절에서 영상 복원의 기본 개념을 정리하고, 3절에서는 EM 알고리즘의 일반해를 유도하고 그 성질을 정리한다. 4절에서는 간단한 영상실험을 통해 일반해의 유효성을 보일 것이며, 마지막으로 5절에서는 결론과 몇 가지 사안에 대해 토론한다.

2. 기본 개념

$n_u \times n_v$ 크기의 지지역(support)을 가지는 명암영상(gray-leveled intensity image)을

$$Y = \{Y(u, v); u = 0, \dots, n_u - 1, v = 0, \dots, n_v - 1\} \quad (2.1)$$

본 논문은 2008년도 상지대학교 교내 연구비 지원에 의한 것임.

¹(220-702) 강원도 원주시 우산동 660 상지대학교 컴퓨터데이터정보학과, 교수. E-mail: sgukim@sangji.ac.kr

과 같이 나타낼 수도 있고, 배열로서 $Y = \{y_{ij}; i = 1, \dots, n_u, j = 1, \dots, n_v\}$ 로서 표현 할 수도 있다. 또한 배열 Y 의 열들을 아래로 쌓는 방식으로

$$\mathbf{y} = [y_{11}, \dots, y_{n_u,1}, \dots, y_{1,n_v}, \dots, y_{n_u,n_v}]^T = [y_1, \dots, y_n]^T \quad (2.2)$$

과 같이 벡터로 나타낼 수도 있다. 단, $n = n_u \times n_v$ 으로서 관측영상 Y 의 화소의 개수를 나타낸다. $g_u \times g_v$ 크기의 지지역을 가지는 유한 임펄스 반응 $H(u, v)$ 에 대해, 우리는 다음과 같은 선형 관측모형

$$\begin{aligned} Y(u, v) &= H(u, v) \circledast X(u, v) + e(u, v) \\ &= \sum_{u' \in \mathcal{S}_u} \sum_{v' \in \mathcal{S}_v} H(u - u', v - v') X(u', v') + e(u, v) \end{aligned} \quad (2.3)$$

을 고려하기로 한다. 여기서, \mathcal{S}_u 와 \mathcal{S}_v 는 각각 u 와 v 의 범위를 나타내는데, Y 의 지지역 \mathcal{S} 는 \mathcal{S}_u 와 \mathcal{S}_v 의 교적으로 구성된다. 이때, $n_u = m_u + g_u - 1$, $n_v = m_v + g_v - 1$ 의 관계를 가진다. 그리고 \circledast 는 두 영상(배열)의 합성곱(convolution)을 나타내며, $X(u, v)$ 는 $m_v \times m_u = (n_u - g_u + 1) \times (n_v - g_v + 1)$ 크기의 지지역 \mathcal{O} 를 가지는 원영상 배열 그리고 $e(u, v)$ 는 관측영상 $Y(u, v)$ 와 같은 지지역에서 평균 0, 분산 σ^2 인 정규 분포를 독립적으로 따르는 잡음이라 하자.

식 (2.3)은

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad \text{혹은} \quad y_i = \sum_{j=1}^m h_{ij}x_j + e_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

와 같은 선형회귀모형으로 표현된다. 단, \mathbf{x} 와 \mathbf{e} 는 각각 $m \times 1$ 및 $n \times 1$ 크기의 벡터로서 두 배열 $X = \{X(u, v)\}$ 와 $\mathbf{e} = \{e(u, v)\}$ 를 열 쌓기 방식으로 벡터화한 것이다. 단, $m = m_u \times m_v$ 으로서 원영상 \mathbf{x} 의 화소의 개수를 나타낸다. 그리고 $\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ 을 가정한다. 그리고 \mathbf{H} 는 $n \times m$ 크기의 행렬로서 흔히 블록 토플리츠 행렬(block toeplitz matrix)이라 부르는데, 유한 임펄스 반응 배열 $H = \{H(u, v)\}$ 를 선형 모형 (2.4)에 일치하도록 변형된 행렬로서 (열에 대한) 완전 위수 행렬(full-ranked matrix)이다. 또한 이 행렬의 원소는 거의 대부분 0으로 이루어져 있는데, 각 행 \mathbf{h}_i 에는 배열 H 의 원소들이 모두 포함되어 있을 수 있으며 일부만 포함되어 있을 수도 있다. 그래서 앞으로 집합 $\mathcal{V} = \{i : \text{all elements of } H \in \mathbf{h}_i\}$ 를 관측영상 Y 의 '유효영역'이라 부르도록 하겠다. 유효영역 \mathcal{V} 는 $(n_u - 2g_u + 2) \times (n_v - 2g_v + 2)$ 크기의 지지역을 가진다. 따라서 유효영역은 관측영상과 원영상의 지지역 사이에는 $\mathcal{V} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{S}$ 의 관계가 있다(그림 1 참조).

커널 밀도 추정(kernel density estimation)과 상당히 유사하게 (Lee, 2008), 영상 역-합성곱(image deconvolution)의 목적은 유한 임펄스 반응 \mathbf{H} 가 주어졌을 때 관측영상 \mathbf{y} 로부터 원영상 \mathbf{x} 에 가깝게 복원하는 것 즉 원영상 추정량을 얻는 것이라 할 수 있다. 통계학적으로 $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$ 는 선형모형 식 (2.3) 하에서 원영상 \mathbf{x} 의 최적선형불편추정량(best linear unbiased estimator: BLUE)임은 잘 알려져 있다 (McElroy, 1967). 여기서, 위첨자 'T'는 행렬의 전치를 나타낸다. 만약 관측영상 \mathbf{y} 가 절단 등의 훼손이 거의 없고 \mathbf{H} 가 정확히 주어지기만 한다면 $\hat{\mathbf{x}}$ 는 선형 추정량들 중에서 편의가 없고 분산이 최소인 꽤 만족스러운 복원영상을 제공하게 된다. 그러나 현실에서 정확한 \mathbf{H} 는 거의 알려지지 않으며, 사전 분석이나 경험적 훈련을 통해 근사적으로 $\mathbf{H}_0 \approx \mathbf{H}$ 가 주어지게 된다. 근사에 의한 약간의 차이는 역행렬 $(\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1}$ 을 통해 복원영상의 큰 차이를 나타내게 하여,

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{blue}} = (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1} \mathbf{H}_0^T \mathbf{y} \quad (2.5)$$

는 매우 큰 변이를 가지는 왜곡된 복원영상을 제공하게 한다. 이것은 $\text{var}(\hat{\mathbf{x}}_{\text{blue}}) = (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1} \sigma^2$ 으로부터 짐작할 수 있다.

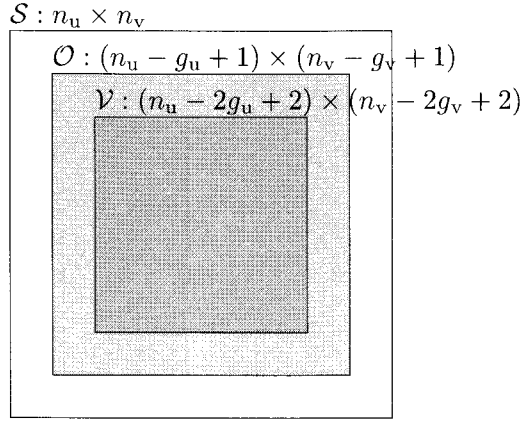


그림 1: 유효영역 및 원영상과 관측영상의 지지역(\mathcal{V} : 짙은 회색 영역, \mathcal{O} : 중간 회색 영역까지 포함, \mathcal{S} : 밝은 영역까지 포함)

보통 복원영상은 관측영상이 아주 작지 않는 한 식 (2.5)로부터 직접 계산하기는 어렵고, 이산형 FFT(discrete finite Fourier transformation) \mathcal{F} 를 활용하여 아래와 같이 계산한다 (Jain, 1989, Chapter 2 참조).

$$\hat{x}_{\text{bluc}} \equiv \mathcal{F}^{-1} \left(\left(\frac{1}{\tilde{H}_0} \right) \cdot \tilde{Y} \right), \tag{2.6}$$

여기서 $\tilde{Y} = \mathcal{F}(Y)$, $\tilde{H}_0 = \mathcal{F}(H_0)$ 을 나타내며, ‘ \cdot ’와 ‘ $/$ ’는 배열의 원소별 곱하기와 나누기를 나타낸다. 그런데, 식 (2.6)의 $1/\tilde{H}_0$ 와 같이 (스칼라/배열)의 연산인 경우는 스칼라를 배열의 원소별로 나누는 연산을 의미할 것이다. 식 (3.15)–(3.17)에 이와 비슷한 형태가 나타나는데, 그 경우 이러한 정의는 모든 사칙연산에 적용되는 것으로 가정한다. 그리고 \mathcal{F}^{-1} 는 역-FFT(inverse FFT)를 나타내며, ‘ \equiv ’는 오른쪽 변의 영상을 열췌기 식으로 배치하면 왼쪽 변의 영상과 같음을 나타내기로 하자.

이와 같은 방법으로 비교적 큰 관측영상이라도 일반적인 상용 PC에서 복원영상 \hat{x}_{bluc} 을 즉시 얻을 수 있다. EM 알고리즘의 해도 표현 가능한 일반형으로 나타낼 수 있어야 이와 같이 이산형 FFT를 활용할 수 있기 때문에 다음 절에서 이를 유도할 것이다.

3. EM 알고리즘에 의한 복원영상의 일반형

행렬 H 의 i 번째 행 h_i 내에 0이 아닌 원소의 개수를 m_i 라 한다면, 화소값 y_i 의 기대값과 분산은 $E(y_i) = \sum_{j=1}^m h_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}x_j$ 및 $\text{var}(y_i) = \sigma^2$ 이다. 이 절에서의 목적은 로그-우도

$$\log L(x, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \log \phi \left(y_i; \sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}x_j, \sigma^2 \right) \tag{3.1}$$

을 (x, σ^2) 에 관하여 최대화 하는 것인데 해가 직접 유도되기 어렵다. 따라서 EM 알고리즘을 경유하여 목적을 달성한다. 단, $\phi(\cdot)$ 는 정규분포의 밀도함수를 나타낸다.

이제 y_i 는 독립적으로 $N(\sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}x_j, \sigma^2)$ 를 따르는 불완비자료라 하고, 완비자료 z_{ij} 는 독립적으로 $N(h_{ij}x_j, \sigma^2/m_i)$ 를 따르며, 불완비자료와

$$y_i = \sum_{j=1}^{m_i} z_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

의 관계를 가진다고 하자. 이와 비슷한 자료구조의 정의는 Mona와 Kay (1990) 및 McLachlan과 Krishnan (2008) 등에서 볼 수 있는데, 모수 공간을 최대한으로 확장한 정의라 할 수 있다. 이러한 경우 EM 알고리즘의 수렴속도는 매우 느려진다 (Meng과 Rubin, 1994; Meng과 van Dyk, 1997).

아무튼 우리는 알고리즘의 (t) 번째 반복단계에서 완비자료의 로그-우도

$$\log L_c(\mathbf{x}, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \log \phi\left(z_{ij}; h_{ij}x_j, \frac{\sigma^2}{m_i}\right) \quad (3.3)$$

의 조건부 기대값

$$Q(\mathbf{x}, \sigma^2 | \mathbf{x}^{(t)}, \sigma^{2^{(t)}}) = E[\log L_c(\mathbf{x}, \sigma^2) | \mathbf{x}^{(t)}, \sigma^{2^{(t)}}, \mathbf{y}]$$

를 최대화 해야한다. 그런데 이것은 식 (3.3)에서 z_{ij} 대신 조건부 기대값

$$\begin{aligned} \hat{z}_{ij} &= E(z_{ij} | y_i, \mathbf{x}^{(t)}, \sigma^{2^{(t)}}) \\ &= h_{ij}x_j^{(t)} + \frac{1}{m_i} \left(y_i - \sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}x_j^{(t)} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

를 치환하여 최대화 하는 것과 동일하게 된다. 이로부터 EM 알고리즘은 결국

$$x_j^{(t+1)} = x_j^{(t)} + \frac{\sum_{i=1}^n m_i^{-1} (y_i - \sum_{k=1}^{m_i} h_{ik}x_k^{(t)}) h_{ij}}{\sum_{i=1}^n h_{ij}^2}, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.5)$$

와 같은 반복공식으로 얻어지게 된다. 한편, 식 (3.5)는 $\sigma^{2^{(t)}}$ 와 무관하다. 따라서 알고리즘 내에 $\sigma^{2^{(t)}}$ 의 계산과정을 두는 것보다는 EM 알고리즘으로부터 $\hat{\mathbf{x}}$ 만을 얻은 후에

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{j=1}^{m_i} h_{ij}\hat{x}_j)^2}{n-1} \quad (3.6)$$

을 계산하는 것이 총 처리시간을 단축하는 방법일 것이다.

그러나 문제는 관측 영상의 크기 n 이 큰 경우 원영상의 크기는 거의 $m \approx n$ 이기 때문에, 식 (3.5)의 우변의 두번째 항(특히 분자)의 계산에 많은 시간을 요한다. 더구나 우리의 완비자료 정의 상 EM 알고리즘의 수렴속도는 매우 늦어지기 때문에 많은 횟수의 반복을 요구하게 된다. 300×400 정도의 보통 크기의 영상에 대해서도 일반 상용 컴퓨터를 이용하여 충분한 반복 (대략 200-300회) 후의 복원영상을 얻기 위해서는 매우 지루한 시간 (약 5분 이상)을 기다려야만 한다.

그런데 식 (3.5)의 m_i 들은 유효영역 \mathcal{V} 내에서 $m_i = g (= g_u \times g_v)$ 로서 동일하며, \mathcal{V}^c 즉 영상의 테두리 근처 영역에서는 g 보다 작은 서로 다른 값을 가지게 된다. 시각적으로 중요한 영상정보는 대부분의 영역을 차지하는 유효영역 \mathcal{V} 내에 존재한다. 또한, 관측 영상 Y 의 크기 n 이 유한 임펄스 반응 H 의 크기 g 를 무시할 만큼 크다면 관측영상, 원영상의 지지역과 유효영역은 $\mathcal{V} \approx \mathcal{O} \approx \mathcal{S}$ 일 것이다 (그림 1 참조). 따라서

$$m_1 = m_2 = \dots = m_n \stackrel{\text{def}}{=} g \quad (3.7)$$

라 놓자. 이때 식 (3.5)는

$$x_j^{(t+1)} = x_j^{(t)} + \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{k=1}^{m_i} h_{ik} x_k^{(t)}) h_{ij}}{g \sum_{i=1}^n h_{ij}^2}, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

으로 나타낼 수 있을 것이다. 식 (3.8)의 우변의 두번째 항은 역사영(back projection)을 나타내는 분자와 수렴 속도를 결정하는 분모 $g \sum_{i=1}^n h_{ij}^2$ 로 이루어진다. 이것을 행렬로 표기하면

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x}^{(t)}) \quad (3.9)$$

$$= \mathbf{A} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b} \quad (3.10)$$

와 같다. 단, $\mathbf{b}_{(m \times 1)} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$, $\mathbf{A}_{(m \times m)} = \mathbf{I}_m - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{H}$ 며, $\mathbf{D}_{(m \times m)} = g \cdot \text{diag} \{ \sum_i h_{i1}^2, \dots, \sum_i h_{im}^2 \}$ 이다. 그런데 행렬 \mathbf{H} 의 각 열에는 배열 \mathbf{H} 의 모든 원소들이 특정 위치에 놓여져 있고 나머지는 모두 0으로 구성된다. 따라서 $\sum_i h_{i1}^2 = \dots = \sum_i h_{im}^2 \stackrel{\text{def}}{=} s_0$ 으로서 모두 같으므로 $\mathbf{D}_{(m \times m)} = g s_0 \mathbf{I}$ 로 나타낼 수 있다.

이제 $t = 0$ 부터 반복을 시작하면,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b} = \mathbf{A} (\mathbf{A} \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b}) + \mathbf{b} = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}^{(0)} + (\mathbf{A} + \mathbf{I}) \mathbf{b}$$

⋮

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b} = \dots = \mathbf{A}^{t+1} \mathbf{x}^{(0)} + (\mathbf{A}^t + \mathbf{A}^{t-1} + \dots + \mathbf{A} + \mathbf{I}) \mathbf{b} \quad (3.11)$$

가 됨을 알 수 있다. 단, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$. 여기서 주목할 것은 식 (3.11)은 EM 알고리즘의 해가 초기 복원영상 $\mathbf{x}^{(0)}$ 와 반복횟수 t 만의 함수로 표현되고 있다는 것이다.

이제 식 (3.11)에 초기해를 $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ 으로 하기로 하자. 이때,

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \sum_{k=0}^t \mathbf{A}^k \mathbf{b} \quad (3.12)$$

가 될 것이다. 그런데 일반적으로 정방행렬 \mathbf{A} 에 대해 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 의 역행렬이 존재하면, 급수 $\sum_{k=0}^t \mathbf{A}^k = (\mathbf{A}^{t+1} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}$ 이 존재한다 (Searle, 1982). 여기서 우리의 $\mathbf{I} - \mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{H}$ 는 \mathbf{H} 가 완전-위수(full-ranked) 행렬이므로 역행렬이 존재함은 자명하다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(t+1)} &= \sum_{k=0}^t \mathbf{A}^k \mathbf{b} = (\mathbf{A}^{t+1} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{t+1})(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{t+1})(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.13)$$

가 됨을 알 수 있다. 결국 식 (3.13)에 $\mathbf{H}_0 \approx \mathbf{H}$ 를 대입하면 (t) 번째 반복 단계에서 EM 알고리즘의 일반형은

$$\mathbf{x}_{\text{EM}}^{(t)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_0^t) \hat{\mathbf{x}}_{\text{blue}} \quad (3.14)$$

와 같다. 단, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}_m - \mathbf{D}_0^{-1} \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0$ 이며, $\mathbf{D}_0 = g s_0 \mathbf{I}_m$ 을 나타낸다. 그리고 정방행렬 $\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0$ 의 대각원소들은 모두 같은 값을 가지게 되는데 그 값을 s_0 로서 나타내었다.

이제 $\mathbf{x}_{EM}^{(t)}$ 의 이산형 FFT \mathcal{F} 를 활용한 계산 공식은 다음과 같다.

$$\tilde{A}_0 = 1 - \tilde{H}_0^* \cdot \frac{\tilde{H}_0}{v_0} \quad (3.15)$$

$$\tilde{B}_0 = \exp \left[t \cdot \log(\tilde{A}_0) \right] \quad (3.16)$$

$$\mathbf{x}_{EM}^{(t)} \equiv \mathcal{F}^{-1} \left(\left[\frac{1 - \tilde{B}_0}{\tilde{H}_0} \right] \cdot \bar{\mathbf{Y}} \right) \quad (3.17)$$

식 (3.15)에서 $v_0 = g s_0$ 를 나타내며, ‘*’은 복소수의 공액(complex conjugate)을 나타낸다. 그리고 식 (3.16)의 계산과정을 둔 것은 만약 $\tilde{A}_0^t = \{\tilde{a}_{ij}^t\}$ 을 직접 계산하면 컴퓨터 상의 유효숫자를 상실할 우려가 있기 때문에 일단 \tilde{a}_{ij}^t 들에 \log 를 취하여 계산한 후 다시 \exp 를 취하여 되돌린 과정이다. 그러나 유효숫자 상실의 우려가 없다면 식 (3.16)의 과정은 생략하고 직접 $\{\tilde{a}_{ij}^t\}$ 를 계산해도 무방할 것이다. 그리고 나머지 정의들은 식 (2.6)에서 했던 바와 같다.

이로부터 우리는 EM 알고리즘 일반화에 대한 다음과 같은 성질을 알 수 있다.

첫째, $\sum_{k=0}^t \mathbf{A}^k = (\mathbf{A}^{t+1} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}$ 의 관계로부터, $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k = (\mathbf{A}^{\infty} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}$ 이므로, 양변에 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 를 곱하면 $\mathbf{I} \equiv -(\mathbf{A}^{\infty} - \mathbf{I})$ 이다. 따라서 정방행렬 \mathbf{A}^t 가 수렴한다면 $\mathbf{A}^{\infty} \rightarrow \mathbf{0}$ 임을 의미한다. 따라서 식 (3.14)에서 $\mathbf{x}_{EM}^{(\infty)} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\text{blue}}$ 임을 알 수 있다. 정규분포모형 하에서 최우추정치(maximum likelihood estimates: MLE) $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MLE}}$ 은 곧 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{blue}}$ 이고 식 (3.2)의 로그-우도 $\log L(\mathbf{x})$ 는 완전 오목(strictly concave)이므로 $\mathbf{x}_{EM}^{(\infty)} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{MLE}}$ 이기 때문에, 이것은 EM 알고리즘의 해는 최우추정치에 도달한다는 일반적 성질(Dempster 등, 1977)을 확인해 주고 있다. 또한 식 (3.14)에 $t = 0$ 을 대입하면 $\mathbf{x}_{EM}^{(0)} = \mathbf{0}$ 인데, 이는 앞서 초기 복원영상에 대해 정의한 바와 같음을 확인 할 수 있다.

둘째, $\mathbf{x}_{EM}^{(t)}$ 의 편의와 분산은 각각

$$\text{Bias} = E(\mathbf{x}_{EM}^{(t)}) - \mathbf{x} = -\mathbf{A}_0^t \mathbf{x} \quad (3.18)$$

$$\text{var}(\mathbf{x}_{EM}^{(t)}) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_0^t) (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_0^t)^T \sigma^2 \quad (3.19)$$

과 같다. 식 (3.14)는 반복단계 t 에서 복원영상 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{blue}}$ 을 인자 $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_0^t)$ 로서 평활(smoothing)의 기능을 하고 있다. 반복횟수 t 가 작을수록(클수록) 강하게(약하게) 평활하며, 이에 따라 복원영상의 편의는 커지고(작아지고) 분산은 작아진다(커진다).

셋째, 반복과정을 사용하는 EM 알고리즘의 1회 반복당 처리시간을 T_0 라 할 때, t 회 반복의 경우에 대략 tT_0 의 시간이 걸리게 된다. 즉, 반복횟수 t 에 비례한 시간이 걸린다. 그러나 식 (3.16)에서 알 수 있듯이 제안된 방법에서는 반복횟수 t 가 하나의 인수로서 취급되므로, 계산시간은 반복횟수에 무관하게 단 1회의 계산과정으로서 일정하다.

넷째, H 가 점확산함수(point spread function: psf)와 같은 저주파수 대역 통과필터(low-pass filter)인 경우 원소들은 모두 비음이 되며 행렬 \mathbf{A} 역시 비음의 실수를 원소로 가진다. 이때 반복회수는 굳이 양정수일 필요가 없다. 식 (3.16)에서 알 수 있듯이 복원 영상은 t 가 비음의 실수일 때도 허용된다. 예를 들어, $\hat{\mathbf{x}}_{EM}^{(10.5)}$ 는 10회와 11회 반복 사이의 복원영상으로 해석할 수 있을 것이다. 이것은 반복공식을 사용할 때에는 제공되지 않는 부가적인 이점이라 하겠다.

4. 영상실험

이 절에서는 256×321 크기의 관측영상(그림 2(a) 참조)을 7×7 크기의 대략적으로 추정된 psf(그림 2(b) 참조)

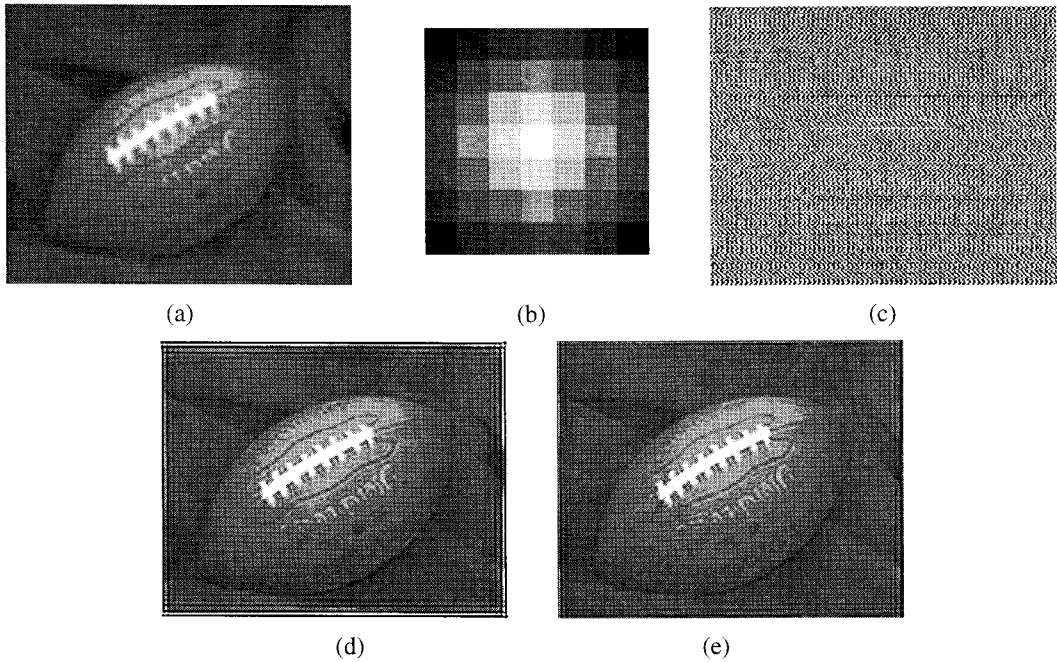


그림 2: 복원 영상들((a) 퍼짐효과를 가진 관측영상, (b) 주어진 psf 추정치, (c) 최소제곱추정에 의한 복원영상 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{blue}}$, (d) 정확한 반복공식에 의한 500회 반복 후의 복원영상 $\mathbf{x}_{\text{iter}}^{(500)}$, (e) 일반해에 의한 500회 복원영상 $\mathbf{x}_{\text{expl}}^{(500)}$)

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} 0.0034 & 0.0073 & 0.0116 & 0.0135 & 0.0116 & 0.0073 & 0.0034 \\ 0.0073 & 0.0158 & 0.0251 & 0.0293 & 0.0251 & 0.0158 & 0.0073 \\ 0.0116 & 0.0251 & 0.0399 & 0.0465 & 0.0399 & 0.0251 & 0.0116 \\ 0.0135 & 0.0293 & 0.0465 & 0.0543 & 0.0465 & 0.0293 & 0.0135 \\ 0.0116 & 0.0251 & 0.0399 & 0.0465 & 0.0399 & 0.0251 & 0.0116 \\ 0.0073 & 0.0158 & 0.0251 & 0.0293 & 0.0251 & 0.0158 & 0.0073 \\ 0.0034 & 0.0073 & 0.0116 & 0.0135 & 0.0116 & 0.0073 & 0.0034 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

을 통해 흐림보정을 하려한다. 그림 2(c)에서 보는 바와 같이 BLUE 추정 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{blue}}$ 은 완전히 시각적으로 알아볼 수 없을 정도의 복원영상을 제공하게 된다.

여기서 먼저 반복횟수 t 까지의 EM 알고리즘에 의한 복원에 대해, 식 (3.5)의 반복에 의한 복원영상을 $\mathbf{x}_{\text{iter}}^{(t)}$ 그리고 식 (3.14)의 (근사적) 일반해에 의한 복원영상을 $\mathbf{x}_{\text{expl}}^{(t)}$ 로서 나타내기로 하자.

먼저 영상의 중심부분에 해당되는 유효영역에서 두 방법의 복원값의 차이가 없음을 확인하기 위해, 각각 반복횟수를 각각 $t = 5, 20, 100$ 및 500 회를 수행하였다. 그림 3의 (a)–(d)는 복원영상의 128 번째 행의 화소값을 나타낸 것으로서, $\mathbf{x}_{\text{iter}}^{(t)}$ 은 (호린) 굵은선으로 그리고 $\mathbf{x}_{\text{expl}}^{(t)}$ 은 (진한) 가는선으로 표현하였다. 그 결과 중심부분에서는 두 방법이 어떠한 차이를 나타내지 않고, 오직 영상 외곽의 테두리 부분에서 차이를 보이고 있다. 테두리 부분에서의 변이의 크기는 반복횟수가 커짐에 따라 점차 더 커지는데, $\mathbf{x}_{\text{iter}}^{(t)}$ 이 큰 변이를 보이는 반면 $\mathbf{x}_{\text{expl}}^{(t)}$ 은 대체적으로 그 변이를 평활하는 경향을 보인다. 그림 2의 (d)–(e)는 각각 복원영상 $\mathbf{x}_{\text{iter}}^{(500)}$ 과 $\mathbf{x}_{\text{expl}}^{(500)}$ 을 나타낸 것으로서 시각적으로 비교적 양호한 복원상태를 보이

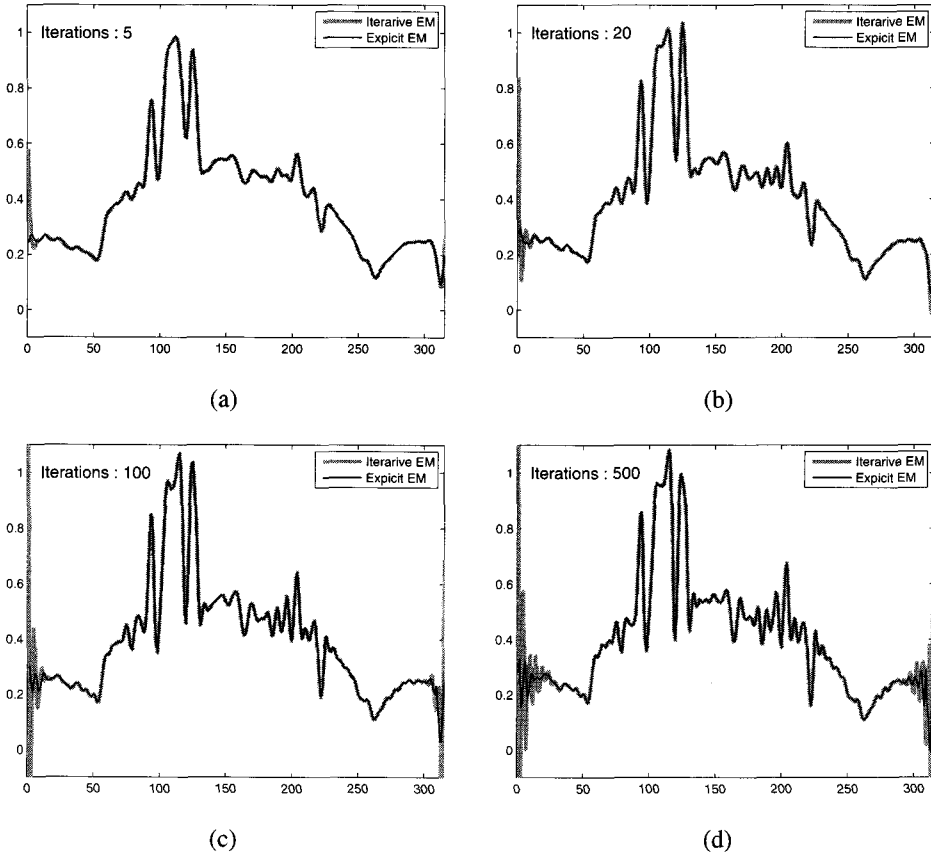


그림 3: 반복횟수에 따른 복원영상의 128번째 행((a) 5회, (b) 20회, (c) 100회, (d) 500회. 굵은선: 반복공식에 의한 복원 $\mathbf{x}_{iter}^{(i)}$, 가는선: 일반해에 의한 복원 $\mathbf{x}_{expl}^{(i)}$. $\mathbf{x}_{iter}^{(i)}$ 와 $\mathbf{x}_{expl}^{(i)}$ 는 영상의 중심부분(유효영역)에서 어떠한 차이를 나타내지 않고, 오직 영상 외곽의 테두리 부분에서 차이를 보이고 있다. 그러나 반복횟수가 커짐에 따라 점차 더 커진다. 테두리 부분에서의 변이의 크기는 $\mathbf{x}_{iter}^{(i)}$ 이 큰 변이를 보이는 반면 $\mathbf{x}_{expl}^{(i)}$ 은 대체적으로 그 변이를 평활하는 경향을 보이고 있다)

고 있다. 이 실험에서 우리의 주된 관심은 \mathcal{V} 영역 내에서 두 방법에 의한 추정치들(즉 복원 화소값들)이 일치하는가를 확인하는 것이지만, 정확한 반복공식을 사용하여 얻은 $\mathbf{x}_{iter}^{(500)}$ 와 비교해 볼 때 테두리 영역 즉 \mathcal{V} 영역 밖에서 근사를 사용한 $\mathbf{x}_{expl}^{(500)}$ 이 영상의 외곽부분에서 직선 형태의 인공구조물을 희석시켜 오히려 안정된 느낌의 영상을 제공하고 있다. 무엇보다도 $\mathbf{x}_{iter}^{(500)}$ 을 얻는데 185초(Intel Pentium(R)4, 2.53GHz 사용)가 걸렸는데 비해 일반해부터 얻은 $\mathbf{x}_{expl}^{(500)}$ 를 계산하는데는 단 0.75초가 걸렸다.

5. 결론 및 토론

본 연구에서는 영상 흐림보정을 위한 EM 알고리즘의 복원영상을 반복횟수의 함수인 일반형(explicit form)으로 표현하고자 하였다. 이것은 유효영역 밖 즉 영상의 테두리 부분의 화소들에 대한 약간의 정보 손실을 감수하면 가능하다는 것을 보였다. 이로부터 본 연구는 이산형 유한 푸리에 변환을 통해 크기가 큰 영상이라도 상용 컴퓨터에서 즉시 복원영상을 얻을 수 있었다. 그리고 제한된 실험이지

만 4절에서 EM 반복 알고리즘으로 제안된 방법으로 얻은 두 복원영상이 유효영역 \mathcal{V} 의 중심부분에서 완벽하게 일치함을 알았다. 또한 EM 반복 공식에 의한 복원 영상을 얻는데 걸리는 시간은 반복횟수에 비례하는 반면, 제안된 방법은 반복 횟수에 관계없이 거의 실시간으로 복원영상을 제공하며, 오히려 유효영역 밖에서 더 안정된 상태를 제공한다.

물론 우리가 식 (4.1)에서 사용한 주어진 $psf \widehat{H}$ 보다 좀 더 개량된 psf 로 사용한다면 더 나은 \hat{x}_{blue} 복원영상을 얻을 수도 있을 것이고, 더 선명한 $x_{expl}^{(t)}$ 를 얻을 수도 있다. 그러나 필터의 설계는 본 연구의 주된 관심사가 아니므로 이에 대해서는 자세히 다루지 않았다.

한편, EM 알고리즘에 의한 복원영상 대신, 수축상수(shrinkage constant) $\lambda (> 0)$ 에 대한 능형회귀추정량(estimator of ridge regression)

$$\begin{aligned} \hat{x}_{ridge}(\lambda) &= (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_0^T \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0) (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1} \mathbf{H}_0^T \mathbf{y} \\ &= \left(\mathbf{I} + \lambda (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1} \right)^{-1} \hat{x}_{blue} \end{aligned} \tag{5.1}$$

를 고려할 수도 있을 것이다. 식 (5.1)을 식 (3.14)와 비교해 봤을 때, EM 알고리즘의 반복횟수와 수축상수 사이에 대략 $t \propto 1/\lambda$ 의 관계가 있을 것으로 판단된다.

본 연구에서 1-변량 명암영상(gray-leveled intensity image)에 대해서만 다루었다. 그러나 RGB (red, green, blue) 성분으로 구성된 3-변량 영상 뿐 아니라 일반적으로 동영상과 같은 p -변량 영상에 대해서도

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{H} \mathbf{x}_j + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, p \tag{5.2}$$

와 같이 퍼짐효과 \mathbf{H} 가 동일한 경우라면, 식 (5.2)에 대해 식 (3.17)을 p 번 계산하는 과정을 뚝뚝으로써 쉽게 확장할 수 있을 것이다.

그리고 본 연구에서는 정규분포모형을 다루었으나 의료영상 재구성 등의 응용문제에 좀 더 활용도가 큰 포아송 회귀모형에 대해서도 일반형의 표현이 가능하지 않을지, 이에 대한 연구도 고려해 볼 만하겠다. 일반적으로 말해서, EM 알고리즘 뿐만 아니라 (일반화 선형) 회귀모형을 적합을 위한 어떠한 종류의 “수렴하는” 알고리즘이라도 재모수화(reparameterization)를 통해 식 (3.10)의

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}$$

와 같은 선형 점화식으로 표현될 수 있다면, 언제든지 일반해로의 표현이 가능할 것으로 예상된다.

참고 문헌

Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B. (1977). Maximum Likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **39**, 1–38.

Hall, P. and Qui, P. (2007a). Blind deconvolution and deblurring in image analysis, *Statistica Sinica*, **17**, 1483–1509.

Hall, P. and Qui, P. (2007b). Nonparametric estimation of a point spread function in multivariate problems, *The Annals of Statistics*, **35**, 1512–1534.

Jain, A. K. (1989). *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice-Hall, New York.

Lee, S. (2008). A note on nonparametric density estimation for the deconvolution problem, *Communications of the Korean Statistical Society*, **15**, 939–946.

- McElroy, F. W. (1967). A necessary and sufficient condition that ordinary least squares estimators be best linear unbiased, *Journal of American Statistical Association*, **62**, 1302–1304.
- McLachlan, G. J. and Krishnan, T. (2008). *The EM Algorithm and Extensions*, John Wiley & Sons, New York.
- Meng, X. -L. and van Dyk, D. A. (1997). The EM algorithm-an old folk-song sung to a fast new tune, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **59**, 511–567.
- Meng, X. -L. and Rubin, D. B. (1994). On the global and componentwise rates of convergence of the EM algorithm, *Linear Algebra and its Applications*, **199**, 413–425.
- Molina, R., Núñez, J., Cortijo, F. and Mateos, J. (2001). Image restoration in astronomy: A Bayesian prospective, In *IEEE Signal Processing Magazine*, **18**, 11–29.
- Mona, A. and Kay, J. (1990). Edge preserving image restoration, *Stochastic Models, Statistical Methods, and Algorithms in Image Analysis*, Eds. Barone, P., Frigessi, A., and Piccioni, M., Springer-Verlag, 1–13.
- Searle, S. R. (1982). *Matrix Algebra Useful for Statistics*, Wiley, New York.
- Qui, P. (2008). A nonparametric procedure for blind image deblurring, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 4828–4841.

2009년 1월 접수; 2009년 3월 채택

An Explicit Solution of EM Algorithm in Image Deblurring: Image Restoration without EM iterations

Seung-Gu Kim^{1,a}

^aDepartment of Data & Information, Sangji University

Abstract

In this article, an explicit solution of the EM algorithm for the image deblurring is presented. To obtain the restore image from the strictly iterative EM algorithm is quite time-consuming and impractical in particular when the underlying observed image is not small and the number of iterations required to converge is large. The explicit solution provides a quite reasonable restore image although it exploits the approximation in the outside of the *valid area* of image, and also allows to obtain the effective EM solutions without iteration process in real-time in practice by using the discrete finite Fourier transformation.

Keywords: EM algorithm, explicit solution, finite Fourier transformation, image deblurring.

This research was supported by Sangji University Research Fund, 2008.

¹ Professor, Department of Data & Information, Sangji University, 660 Woosan-Dong, Wonju, Kangwon 220-702, Korea.
E-mail: sgukim@sangji.ac.kr