韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 2호, 2009. 5. 399-428

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 2, May. 2009. 399-428

초등학교 6학년의 패턴의 일반화를 통한 대수 학습에 관한 연구

김 남 균 (청주교육대학교)
김 은 숙 (청주가경초등학교)

2007년 개정교육과정은 대수의 도입 시기를 초등으로 앞당기고 있다. 최근의 연구결과들로부터 볼 때 초등수학 수준에서 대수를 도입할 때 패턴의 일반화를 이용하는 것은 타당한 과정으로 판단된다. 초등학교 6학년 학생들이 패턴의 일반화과정 학습에서 대수를 도입하는 것이 가능한지 그리고 어떤 효과가 있는지, 초등학교 6학년 학생들의 패턴의 일반화 과정은 어떠한지에 대한 연구가 보완되어야 할 필요가 있다.
본 연구는 초등학교 6학년들에게 패턴을 일반화하여 대수를 도입하고 지도하고 그 과정에서 나타나는 일반화 과정의 특징과 학생들이 겪는 어려움을 분석하였다. 이를 통하여 패턴의 일반화를 지도하거나 패턴에 기초한 대수 교육과정을 개발할 때 시사점을 얻고 교수학습 자료 개발에 대한 정보를 제공하고자 한다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성과 목적

학교수학의 관점에서 대수는 양 사이의 일반적인 관계를 기호 수준에서 다루는 수학 영역이다(Ameron,2002). 전통적으로 학교수학에서 다루는 대수의 주제는 대수 식으로 간단히 하 기, 수체계, 미지수가 한 개인 일차방정식과 이차방정식, 미지수가 2개인 방정식, 기호 표현과 여러 가지 함수(일차, 이차, 지수, 로그, 삼각함수)의 그래프, 수열과 급수이다. 이러한 주제를 학습하면서 학생들은 대수적 사고와 대수적 기호화가 가능하여야 대수를 이해하였다고 할 수 있다(Ameron, 2002). 대수적 기호화는 식의 조작을 말하며, 대수적 사고는 미지수로 추론하기, 양 사이의 관계를 일반화하고 형식화하기, 변수 개념 계발하기를 말한다.

전통적으로 학교수학에서 대수는 실세계와 연결 짓지 않고 추상적인 수학으로 소개되며 대수의 목적이나 용법을 학습하기 전에 기호조작을 학습하는 것 즉, 대수적 기호화에 초점이 맞추어졌으며,

* 접수일(2009년 4월 10일), 심사(수정)일(2009년 4월 21일), 게재확정일자(2009년 4월 30일)
* ZDM분류 : H13
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 패턴의 일반화, 대수 도입, 초기대수, 대수학습의 어려움

대수적 사고를 경험하는 것은 소홀히 다루어져 왔다. 한국교육과정평가원(2004)에 따르면 우리나라 학생들이 계산과 대수적 조작 능력을 기르기 위한 지나친 반복 학습으로 인해 수학에 대한 흥미를 잃고, 어렵고 복잡한 계산과 대수적 조작 능력을 요구하는 학교수학으로 인해 수학 학습의 좌절감을 맛보고 있다. 따라서 중학교 수준에서 '문자와 식'단원을 어려워하고 있을 뿐 아니라 의미 없는 기호 조작에 가려 대수적 사고를 경험하지 못하며 이는 '함수'단원을 어려워하는 현실로 나타나고 있다.

학생들의 대수 이해를 돕는 데 관심을 둔 연구자들 중 많은 이들(Bednarz et al, 1996, 2001, ; Usiskin, 1988; Kieren, 1989, 1992, Ameron, 2002 등)이 대수적 사고의 특성 중 일반화에 주목하고 있으며, 대수를 도입할 때 패턴을 일반화하는 방안을 논의하는 연구가 국내외에서 활발히 이루어졌다(Lannin, 2005, Zazkis & Liljedahl, 2002; 김성준, 2003; 전주희, 2005, 정수영, 2002, 정홍춘, 2008). 미국, 호주, 영국에서는 대수 교육과정에서는 방정식, 변수를 도입하기에 앞서 패턴의 표현과 관계 및 규칙을 강조하고 있다. 이와 같은 경향은 우리나라 7차 교육과정에도 반영되어 '규칙성과 함수' 영역에서 1단계부터 도형 및 수 패턴을 다루고 있으며, '문자와 식' 영역에서 패턴의 관계를 □와 ○를 사용하여 정리하도록 하고 있다. 최근의 연구결과들로부터 볼 때 초등수학 수준에서 대수를 도입할 때 패턴의 일반화를 이용하는 것은 타당한 과정으로 판단된다. 하지만, 대수 학습에서의 패턴의 일반화에 관한 선행연구들은 중학생들을 대상으로 패턴의 일반화과정을 대수 학습에 적용한 것이다. 좀 더 이른 시기인 초등학교 6학년 학생들이 패턴의 일반화과정 학습에서 대수를 도입하는 것이 가능한지 그리고 어떤 효과가 있는지, 초등학교 6학년 학생들의 패턴의 일반화 과정은 어떠한지에 대한 연구가 보완되어야 할 필요가 있다.

본 연구는 초등학교 6학년들에게 패턴을 일반화하여 대수를 도입하고 지도하고 그 과정에서 나타나는 일반화 과정의 특징과 학생들이 겪는 어려움을 분석하였다. 이를 통하여 패턴의 일반화를 지도하거나 패턴에 기초한 대수 교육과정을 개발할 때 시사점을 얻고 교수학습 자료 개발에 대한 정보를 제공하고자 한다.

Ⅱ. 대수 도입과 패턴의 일반화

1. 대수 도입

대수는 대수를 바라보는 시각과 대수를 학습하는 수준에 따라 기호조작과 방정식, 구조, 그리고 관계와 패턴 및 분석에 초점을 두면서 다양하게 정의될 수 있다. 대수 정의에 있어서 나타나는 이러한 다양성의 어려움을 극복하기 위해 Usiskin과 Kieran은 대수에서 어느 한 측면만을 강조하기보다 이러한 다양한 측면을 묶어서 대수를 표현하려는 시도를 하였다. 먼저 Usiskin(1998)에 따르면 대수는 4가지 개념으로 구분되는데, 그 각각은 일반화된 산술로서의 대수, 문제해결 과정을 연구하는 대수, 양들 사이의 관계를 연구하는 대수, 구조를 연구하는 대수로 나누어진다. 이에 비해 Kieran(1989)은

대수의 3가지 주요한 관점을 소개하면서, 대수를 일반화된 산술, 표현 체계, 규칙들의 집합으로 나누어 제시하였다(김성준, 2002).

Usiskin과 Kieran이 제시한 대수에 대한 이러한 종합적인 시각은 학교 대수에서 나타나는 대수의 여러 측면에 대해 생각해보고 학교 대수 도입방법을 논의하는데 도움이 될 것이다.

2. NCTM의 패턴에 기초한 대수 교육과정

NCTM에서 내놓은 'Principles and Standards for School Mathematics' (2000)의 3장 'Standards for School Mathematics : Prekindergarten through Grade 12'에서는 학교 수학에서 요구되는 10가지 규준을 제시하고 있다. 그 중 대수영역의 규준을 살펴보면 다음과 같다.

- 패턴, 관계, 그리고 함수를 이해한다.
- 수학적 상황과 구조를 대수 기호를 이용해서 나타내고 분석한다.
- 양적 관계를 나타내고 이해하기 위해 수학적 모델을 이용한다.
- 다양한 맥락에서 변화를 분석한다.

첫 번째 규준으로 패턴, 관계, 그리고 함수를 언급하고 있다. 두 양(변수)들 사이의 관계를 파악하기 위해 언어적인 측면을 강조하면서 패턴을 바탕으로 한 도입을 강조하는 것이다. 이것은 대수 문자의 사용과 이를 통한 일반성의 획득은 문자 자체에서 시작하는 것이 아니라, 패턴들과 관계들의 설명을 표현하는 가운데 자연스럽게 강조되어야 한다는 주장이다.

그리고 두 번째 규준인 상황과 구조에 맞는 대수 기호 표현은 어떤 의미에서 보면 전통적인 대수 교육과정에서 말하는 문자 기호를 통한 대수를 강조하는 것으로, 패턴, 관계 및 함수에 대한 이해에 이어서 강조되고 있다.

세 번째 규준에서 양적 관계를 표현하기 위한 모델링을 강조하는데, 이것 역시 관계 측면을 부각시킨 것으로 볼 수 있으며, 네 번째 다양한 맥락에서 변화를 분석하는 것 또한 함수와 관련해서 생각해 볼 수 있을 것이다. 이처럼 'Standards 2000'은 패턴에 기초한 대수 도입이 새로운 교육과정의 방향으로 제시되고 있음을 엿볼 수 있는 대목이다.

3. MIC교과서의 패턴에 기초한 대수 도입 방식

MIC교과서의 이론적 근거가 되는 현실주의 수학교육 또한 아동들의 상식적 수준으로 패턴을 대수 교육과정의 출발점으로 강조하고 있다. 현실주의 수학교육을 주창한 Freudenthal은 '자리지기(placeholder)를 통한 형식적인 변수 개념의 획득은 의미가 없으며, 실세계의 변화하는 현상을 정리하

는 수단으로서, 그리고 다양한 현상 가운데에서 관찰되는 패턴을 일반화하는 수단으로서 그 본질이 파악되는 과정을 강조하고 있다. 이는 곧 패턴이 대수의 수학화에 있어서 출발점이 될 수 있음을 의미하는 것이다. 따라서, 현실주의 수학교육에 근거한 MIC교과서는 우리의 직관이 패턴을 자연스럽게 받아들일 수 있다는 것을 가정하여 구성되었으며, 동시에 패턴에서부터 형식적인 대수 개념으로 이어지도록 교육과정을 구성함으로써, 패턴에 기초한 대수 교육과정을 제시하고 있다

4. 패턴의 일반화과정

패턴의 일반화는 패턴을 통해 과정을 표현하는 것이며, 여기서 대상과 구조를 파악하는 것이다. 따라서 산술적, 시각적 및 함수적 패턴을 일반화하고 이렇게 일반화된 패턴을 정당화하는 것은 대수 도입에 있어서 새로운 관점을 제공할 수 있다. 특히 변수와 대수식 개념은 본질적으로 패턴의 일반화에서 시작될 수 있는데, 패턴을 일반화하는 과정은 그 자체가 하나의 대상으로, 이것은 구체적인 수가 아니라 그것을 대상으로 하는 일반적인 수에 관한 것이기 때문이다. 여기서 일반적인 수는 변수 전개념(pre-concept)으로, 그리고 이러한 일반적인 수들이 연산을 통해 표현되는 식은 대수식의 전-개념에 해당하는 것이다. 따라서 패턴의 일반화는 본격적인 대수 학습 이전이라 하더라도, 패턴을 인식할 수 있는 수준에서 다루어질 수 있으며, 이것은 이후 대수 학습에서 대수적 사고를 이끌어내는 출발점이 될 수 있다(김성준, 2003, 전주희, 2005 : 재인용).

다음 <표 1>은 패턴의 일반화 과정을 4단계로 나누어 살펴본 것이다. 1단계는 일반화를 시작하는 단계로 특별한 예가 학생들에게 주어지거나 또는 그들 스스로 이러한 예를 만든다. 즉, 학생들은 제시된 패턴을 보고 어떤 패턴으로 되어있는지 파악하기 시작한다. 2단계는 일반화를 형성하는 단계로 주어진 것 외에 또 다른 예를 생각하고 해결하면서 일반화를 생각하게 된다. 학생들은 제시된 패턴보다 더 많은 경우를 생각하면서 일반화를 찾게 된다. 3단계는 일반화를 명확하게 하는 단계로 관찰된 패턴을 언어 또는 기호로 기술한다. 학생들은 패턴파악에서 머무는 것이 아니라 파악된 패턴을 언어나 기호로 명확히 기술함으로써 일반화를 더욱 명확하게 할 수 있다. 4단계는 일반화를 정당화하는 단계로 일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인한다. 학생들은 자신이 세운 식이 맞는지 확인하고 적용할 수 있어야 한다. 이러한 패턴의 일반화과정을 통해 학생들은 대수를 의식적인 조작이 아닌 사고와 추론 측면으로 학습하게 된다(Friedlander & Tabach,2001, 김성준, 2003에서 재인용)

김성준(2003)은 <표 1>과 같이 패턴을 일반화하는 단계에서는 각 단계에서 또는 단계 사이에서 여러 가지 어려움이 발생할 수 있는데, 그 어려움을 세 가지 수준으로 구분하였다. 그 수준은 인지화 수준, 언어화 수준, 기호화 수준으로 구분된다. 첫째, 인지화 수준에서 경험하는 어려움이란 주어진 패턴에서 그 패턴이 의도하고 있는 내용을 파악하지 못하는 경우로 <표 1>의 1단계에서 그리고 2단계로 넘어가는 과정에서 나타난다. 둘째, 언어화 수준에서 경험하는 어려움이란 패턴을 언어 형태로 명확히 인식하고 표현하지 못하는 경우로 <표 1>의 2단계에서 3단계로 넘어가는 과정에서 그리고 3

단계 전반부에서 나타난다. 셋째, 기호화 수준에서 경험하는 어려움이란 언어화된 패턴을 기호 등을 이용한 대수적 표현으로 패턴을 일반화해서 나타내지 못하는 경우 <표 1>의 3단계 후반부에서 그리고 4단계에서 나타난다.

<표 1> 패턴의 일반화과정 4단계

단계	단계의 의미	내 용	다음 단계로의 어려움
1단계	일반화를 시작하는 단계	특별한 예가 학생들에게 주어지거나 또는 그들 스스로 이러한 예들을 만든다.	인지화 수준에서 일어나는 어려움
2단계	일반화를 형성하는 단계	주어진 것 외에 또 다른 예를 생각하고 해결한다. 그리고 이를 통해 일반화를 생각하게 된다.	
3단계	일반화를 명확하게 하는 단계	관찰된 패턴을 언어 또는 기호로 기술한다.	언어화 수준에서 일어나는 어려움
4단계	일반화를 정당화하는 단계	일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인한다.	기호화 수준에서 일어나는 어려움

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

가. 교수실험 연구대상

본 연구 대상은 충북 청주시에 소재하고 있는 G초등학교 6학년에 재학중인 남학생 17명, 여학생 11명, 총 28명으로 구성되어 있다. 이 연구 대상들은 본 연구자가 개발한 패턴의 일반화과정을 통한 대수도입 교수실험에 참여하였다.

나. 개별면담 지도 대상

패턴의 일반화과정에서 인지화 수준에서 일어나는 어려움, 언어화 수준에서 일어나는 어려움, 기호화 수준에서 일어나는 어려움 등 세 가지 수준으로 구분되는데 교수실험 연구대상 28명 중 언어화 수준에서 어려움을 경험하는 학생 2명(A, B)과 기호화수준에서 어려움을 경험하는 학생 2명(C, D)을 개별면담 지도 대상으로 선정하여 진행하였으며 각 학생의 특징은 <표 2>와 같다.

<표 2> 개별면담 지도 대상의 특징

성별	특징
A (남)	수업집중도가 상당히 떨어지는 편에 수학에 별로 흥미를 느끼지 못하는 편이다. 보통 학교시험에서 시험문항에 집중을 하지 못하여 틀리는 경우가 많다.
B (여)	수학을 열심히 하려고는 하나 수학의 기본 개념이 잘 되어있지 않아 이해도가 떨어진다. 그러나 수학 각 단원에서 기본적으로 알아야하는 내용은 교사가 자세히 설명하면 이해할 수 있는 정도는 된다.
C (여)	수학성적은 중간이나 자신감이 좀 없는 편이고, 수업시간에도 조용한 편이다.
D (남)	수학에 대해 자신감이 있으며, 수학 시간에 매우 성실하게 대답하고 적극적으로 참여하는 학생이다.

3. 패턴의 일반화과정을 통한 대수도입 교수실험

본 연구는 초등학교 6학년 학생들이 패턴의 일반화 과정을 통한 대수도입학습을 할 때 학생들에게 나타나는 패턴의 일반화 특징을 분석하기 위하여 현장에서 수업을 통해 정련하고 검증하는 교수실험을 하였다.

패턴의 일반화과정을 통한 대수도입 교수실험을 총 5차시 동안 실시하였다. 그리고 패턴의 일반화 과정에서 어려움을 경험하는 4명을 선정하여 개별면담 지도를 통해 언어화수준에서 경험하는 어려움과 기호화수준에서 경험하는 어려움에 대해 심층 분석하였다.

가. 학습자료 개발 방향

본 연구에서는 개발한 패턴의 일반화과정을 통한 학습자료는 NCTM의 대수교육과정과 MIC교과서를 바탕으로 초등학교 6학년 수준에 맞게 구성하였다. 학습자료의 개발 방향은 다음과 같다.

1) 패턴과 관계

NCTM(2000)의 대수 규준의 첫 번째 항목은 패턴, 관계, 함수를 이해하는 것이다. 본 연구에서는 이를 반영하여 대수의 문자의 사용과 이를 통한 일반성의 획득을 문자 자체에서 시작하는 것이 아니라, 패턴들과의 관계 설명을 표현하는 가운데 자연스럽게 강조되도록 한다.

2) 점진적인 형식화

MIC교과서에서 대수는 점진적인 형식화 과정을 통해 진행된다. 초등수준의 비형식적인 지식에서 시작한 학생들은 이러한 비형식적인 전략에서부터 전-형식적인(pre-formal)전략으로 나아가기 위해 적절한 문제 상황을 다루게 된다. 그리고 형식적인 수준으로 옮겨가는 것이다. 이러한 비형식적인 것에서부터 전-형식적인 것으로, 그리고 형식적인 수준으로 옮겨가는 것은 어떤 선형성을 띠기보다는 학생들 스스로 이들 사이에서 자신들의 필요에 따라 서로 이동할 수 있도록 하는데 더 큰 의미가 있

다. 따라서 본 연구에서는 학생들이 결코 모든 상황을 형식적인 수준에서 해결하는 것을 요구하는 것이 아니라 학생들의 사고를 다양한 형태로 표현함으로써 대수적 요소를 이끌어내도록 한다.

3) 일상 속의 패턴 탐구

생활 주변에서 흔히 볼 수 있는 패턴을 제시하여 학생들 스스로 탐구하고 패턴을 일반화하는 과정을 통해 대수적 사고를 할 수 있게 한다.

4) 패턴의 일반화과정

패턴의 일반화과정은 패턴 파악을 통해 주어진 패턴에 내재해 있는 관계를 파악하는 것이며, 이를 통해 일반화를 이끌어 내는 것이다. 또한 이렇게 일반화된 패턴을 정당화하는 것이다. 이러한 과정에서 먼저 패턴의 관계를 말로써 표현하고, 패턴 번호와 패턴의 결과의 함수적 관계를 이해하고 설명하는 과정 속에서 관계식과 문자식을 도입한다.

나. 패턴의 일반화 학습자료

본 연구에서는 NCTM(2000)의 대수교육과정과 MIC교과서를 참고로 초등학교 6학년 수준에 맞게 패턴의 일반화과정 학습자료를 개발했다. 이 과정에서 동료교사와 전문가의 조언을 얻어 검토하고 수정・보완하였다. 총 5차시로 구성되어 있으며 <표 3>와 같이 1차시는 '규칙 및 관계'를, 2차시에는 '관계식 도입'을, 3차시에는 '관계식의 일반화'를, 4차시에는 '문자식 도입'을, 5차시에는 '문자식의 일반화'를 다루고 있으며 각 차시마다 두 가지 주제를 선정하였다.

<표 3> 학습자료 주제 및 학습내용

차시	학습 내용	주제
1	규칙 및 관계	종이접기, 성냥개비
2	관계식 도입	벽돌배열, 모양배열
3	관계식의 일반화	타일, 새로운 타일
4	문자식 도입	V자형, 수 나열표
5	문자식의 일반화	성냥개비, 타일

매 차시의 주제마다 Friedlander & Tabach(2001)이 구분한 패턴의 일반화 4단계에 따라 문항을 골고루 구성하였다. 1단계는 일반화를 시작하는 단계, 2단계는 일반화를 형성하는 단계, 3단계는 일반화를 명확하게 하는 단계, 4단계는 일반화를 정당화하는 단계로 매 차시마다 학생들이 패턴의 일반화 4단계에 따라 스스로 문제를 풀 수 있도록 하였다.

다. 교수실험 실행

본 연구자는 참여 관찰자로서의 역할을 충실히 수행하기 위해 학생들의 활동에 방해가 되지 않는 범위 내에서 관련 정보를 제공하며 학생들 스스로 학습지를 해결할 충분한 시간을 주었다. 본 연구자는 각 차시마다 학생들에게 학습 자료를 주고 40분 동안 스스로 해결하도록 했다. 학생들의

사고 과정을 알아보기 위해 학습 자료에는 볼펜을 사용하여 지우지 않도록 했다. 교사의 구체적인 참여와 활동은 다음과 같다.

1) 두 변수사이의 관계 설명

매 차시 마다 40분씩 충분한 시간을 주어 생각하게 하고, 사고를 표현할 수 있도록 격려하였다. 40분후에 학습자료를 걷고 학생들의 반응을 분석했다. 그리고 문항 중 학생들이 현저히 해결하지 못하는 문항에 대해 다음차시에 교사가 설명하도록 했다.

1차시 학습 후 대부분의 학생들이 두 변수 사이의 관계를 이해하지 못했다. 문항 1-4에서 1명 만이 두 변수사이의 관계에서 서술했고 6명은 패턴 결과 앞뒤 수의 관계에만 초점을 맞춰 답하였다. 문항 1-8에서도 3명만이 <모양번호[1]>와 <성냥개비의 개수>사이의 관계에 대해 언급했고 16명은 패턴 결과 앞뒤 수의 관계에 대해 서술하고 있었다. 이에 본 연구자는 2차시 학습자료 투입 전에 패턴의 일반화 3단계에 해당하는 문항 1-8 두 변수사이의 관계에 대해 설명하였다. 다음 발췌문(1)은 본 연구자와 학생들사이에 이루어진 대화이다.

<u>발췌문(1) : 교사의 개입 : 문항 1-8</u>

T : 애들아! 1-4번과 1-8번이 무엇을 의미하는지 잘 모르겠니?
S : 네.
T : 그럼 1-8번을 보자. 대부분이 성냥개비가 2개씩 늘어난다고 표현했지.
S : 네.
T : 그럼 문제를 큰소리로 다시 읽어 보자.
S : 모양번호와 성냥개비사이에는 어떤 관계가 있을까요?
T : 문제에서 성냥개비가 몇 개씩 늘어났는지 묻은 것이 아니라 모양번호와 성냥개비 사이의 관계를 묻고 있네. 그럼 한번 자세히 생각해보자. 모양번호가 1 일 때 성냥개비는 몇 개니?
S : 3개요.
T : 모양번호가 2번일 때 성냥개비는 몇 개니?
S : 5개요.
T : 모양번호가 3번일 때 성냥개비는 몇 개지?

---

1) 본 연구에서는 학생에게 패턴의 일반화 학습 과정에서 패턴번호(혹은 모양번호)와 패턴 결과(모양)이라는 용어를 사용하여 탐구하고 일반화하게 하였다.

<1번 모양> <2번 모양> <3번 모양>

위의 그림을 예로 들면, 패턴 번호는 늘어나는 모양번호 즉, 1번 모양, 2번 모양, 3번 모양, …를 의미하며 패턴 결과는 늘어나는 성냥개비의 수 3개, 5개, 7개, …등을 의미한다.

S : 7개요.

T : 그럼 1번일 때 3개, 2번일 때 5개, 3번일 때 7개 등 계속 늘어난다. 모양번호와 성냥개비의 개수 사이에 어떤 규칙이 있니?

S1 : (정답한 학생) 모양번호에 ×2 한 다음에 더하기 1만하면 성냥개비의 개수가 나와요.

S : 어 진짜네.

T : S1이 잘 말했는데, S1은 어떻게 알았니?

S1 : 모양번호가 늘어나면 2개씩 늘어나잖아요. 그래서 모양번호에 ×2를 하고 따져보니깐 1번일 때 2개, 2번일 때 4개, 3번일 때 6개가 되는 거에요. 그럼 틀리니깐 다시 생각했어요. 다시 생각해보니깐 +1만 하면 되겠더라구요.

T : 애들아! S1이 하는 말이 무슨 말인지 알겠니?

S : 네. (몇몇 아이들만 대답)

T : 이해한 사람이 다시 한번 설명해볼까?

S2 : S1의 말을 들으니깐 알겠는데요. 한 마디로 모양번호×2+1을 하면 성냥개비가 나온다는 거 아니에요. 모양번호 1을 넣으면 3이 나오고 모양번호 2를 하면 5가 나오잖아요.

T : 이해되니?

S : 네.

T : 그럼 다른 것을 생각해보자. 다음 칠판에서 모양번호와 바둑돌의 개수사이는 어떤 관계가 있니?

1번 모양 2번 모양 3번 모양 4번 모양

T : 누가 한 번 말해보자

S3 : 모양번호에 ×2만 하면 바둑돌의 개수가 나와요.

발췌문(1)은 <모양번호>와 <성냥개비의 개수>사이의 관계를 쓰는 문항 1-8에 관한 것이다. 1차시 학습자료 분석 결과 두 변수사이의 관계에 대해 학생들이 이해하지 못했기 때문에 본 연구자의 개입이 필요했다. 그러나 교사의 직접적인 설명보다는 이미 두 변수사이의 관계에 대해 알고 있던 학생 S1의 설명을 이용하여 다른 학생들이 이해할 수 있도록 유도하였다. S1은 처음부터 문제의 답을 잘 풀었던 학생이다. 그러나 S1이 자신의 답이 나오기 전까지의 과정을 설명함으로써 다른 학생들도 그 과정을 같이 경험하는 기회가 되었다. 즉 모양번호가 늘어나면 성냥개비가 2개씩 늘어나기 때문에 모양번호×2 라고 생각해서 각각의 경우를 따져보았다. 그러나 자신이 세운 식 모양번호×2가 틀림을 확인하고 다시 생각하게 된 것이다. 처음 S1의 설명을 듣고 대부분의 학생들이 먼저 이해했으나 몇몇 학생들은 이해하지 못하였다. 따라서 본 연구자는 다른 간단한 예를 칠판에 들어주어 이해하지 못한 학생들도 이해하도록 유도하였다. 그리고 학생들은 40분동안 2차시 학습자료를 스스로 풀었다. 그랬더니 두 변수사의 관계를 묻는 문항 2-3에서 21명이, 문항 2-7에서 23명이 정답하였다. 3차시, 4차시, 5차시에도 문항 1-4, 1-8과 같은 낮은 정답률을 보이지 않았기 때문에 교사의 개입은 전혀 없었다. 이것으로 보아 발췌문(1)에서 교사의 개입에 따른 학생들간의 상호작용이 큰 효과가 있었던 것을 알 수 있다.

2) 참여관찰자로서의 역할

실험 수업에서 연구자는 참여관찰자로서의 역할을 충실히 수행하였다. 연구자는 학생들의 활동에 방해가 되지 않은 범위 내에서 궤간순시하며 다르게 답한 학생들에게 다시 해보라고 권하였다,

3) 학습자료 답의 검토

매 차시 마다 학생들의 학습지를 걷어 확인했다. 그러나 다음 차시에 학생들의 사고가 어떻게 발전해가는지 확인하기 위해 학습자료 검토를 학생들과 따로 하지 않았다.

4. 자료 수집 및 분석

본 연구의 교수실험은 연구대상 28명이 2008년 9월 4일에서 9월 9일 까지 40분씩 5차시 분량으로 실시되었다. 학습자료 투입 전에 학생들에게 각각의 문항에 대해 여백없이 최대한 성실하게 답하도록 주의를 주었다. 그리고 매 차시마다 학생들이 해결한 학습자료를 모두 회수하여 본 연구자가 결과를 분석하였으며 패턴의 일반화과정에서 학생들의 사고과정을 알아보는 것으로 모든 학습자료를 학생들에게 검토시키지는 않았다.

5차시가 모두 끝난 후 패턴의 일반화과정에서 어려움을 겪는 4명을 선정하여 개별면담 지도하면서 녹음을 하였으며, 이러한 자료를 바탕으로 녹취록 자료를 수집하였다.

패턴의 일반화과정을 통한 대수도입 교수실험 동안 학생들이 푼 총 5차시 분량 학습자료를 Friedlander & Tabach(2001)이 구분한 패턴의 일반화 4단계에 따라 학생들이 나타내는 특징을 분석하였다. 패턴의 일반화를 시작하는 단계, 일반화를 형성하는 단계, 일반화를 명확하게 하는 단계, 그리고 일반화를 정당화하는 단계 등 4단계에서 학생들이 주로 나타내는 특징과 학생들이 보이는 오류를 중심으로 분석하였다.

또한 교수실험에서 선정된 후 개별면담 지도 대상 4명이 패턴의 일반화과정에서 어떤 어려움을 경험하는지 알아보기 위해 녹음한 녹취록 자료에서 나타나는 유의미한 반응을 발췌하였다

Ⅳ. 결과 및 논의

1. 패턴의 일반화 단계의 특징

패턴의 일반화과정 학습자료 총 5차시 분량을 Friedlander & Tabach(2001)이 구분한 패턴의 일반화 4단계에서 분석하였다. 1단계는 패턴의 일반화가 시작되는 단계, 2단계는 패턴의 일반화를 형성하는 단계, 3단계는 패턴의 일반화를 명확하게 하는 단계, 4단계는 패턴의 일반화를 정당화하는 단계로 각 단계는 차시마다 다르게 적용하고 발전시켰다. 차시별로 교수실험한 일반화 단계를 정리하면 <표 4>와 같다.

<표 4>차시별 패턴의 일반화 단계 문항 분포

차시	패턴의 일반화 단계			
	1 단계	2 단계	3 단계	4 단계
1차시	1-1, 1-2 1-6	1-3, 1-7	1-4, 1-8	1-5, 1-9
2차시	2-1	2-2, 2-5 2-6	2-3, 2-7	2-4, 2-8 2-9
3차시	3-1	3-2, 3-5 3-6, 3-7	3-3, 3-8 3-10	3-4, 3-9 3-11
4차시		4-1, 4-2 4-3, 4-9 4-10	4-4, 4-7 4-8, 4-11 4-12	4-5, 4-6 4-13, 4-14
5차시		5-1, 5-2 5-6, 5-7	5-3, 5-8 5-11, 5-14	5-4, 5-5 5-9, 5-10 5-12, 5-13 5-17, 5-18 5-19, 5-20

앞 차시에서는 좀 더 학생들의 사고를 언어나 그림 등으로 자유롭게 표현할 기회를 많이 주기 위해서 1단계와 2단계 문항 위주로 구성하였고 마무리차시로 갈수록 좀 더 형식적으로 표현하는 과정에서 어떠한 특징을 보이는지 알아보기 위해서 3단계와 4단계 문항을 더 많이 구성하였다. 따라서 다음에서는 각 일반화단계마다의 특징을 차시별로 발전되어가는 추이를 정리하고 구체적인 특징을 분석하였다.

가. 패턴의 일반화가 시작되는 단계

패턴의 일반화가 시작되는 단계는 패턴의 일반화 1단계로 특별한 예가 학생들에게 주어져 스스로 규칙을 찾기 시작한다. 학생들은 문제에 제시된 모양이나 그림이 어떤 패턴을 이루고 있는지 파악함으로써 높은 정답률을 보였다. 문항 1-1은 96.43%, 문항 1-2은 96.43%, 문항 1-6은 89.29%, 문항 2-11은 100%은 높은 정답률은 보였으나 문항 3-1은 열린 형태의 문제을 사용함으로써 다른 문항에 비해 낮은 정답률 71.43%을 보이고 있다.

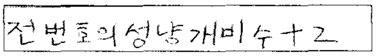
각 차시의 패턴의 일반화가 시작되는 단계에 해당하는 문항에 답한 내용을 분석하여 일반화과 시작되는 단계의 특징을 정리하면 의 특징을 <표 5>와 같다. 패턴의 일반화를 시작하는 단계의 특징은 첫째, 학생들은 패턴을 다양하게 표현한다는 것이다. 패턴의 규칙 및 관계를 표현할 때 자신이 표현하기 편한 방식으로 식이나 그림 및 언어 등을 이용하여 다양하게 서술하고 있다(예, 문항 1-6). 둘째, 한 개의 답이 아닌 여러 개의 답이 나올 수 있는 열린 형태의 문제을 제시하자 3차시에 학생들은 낮은 정답률을 보였지만 다양한 사고를 할 수 있었다(예, 문항 3-1).

<표 5> 차시에 따라 나타나는 일반화가 시작되는 단계의 특징

특징	문항	학생들의 반응
패턴의 다양한 표현	1-6	-식이용 : 2명 -그림과 언어사용 : 20명 -화살표를 이용한 관계표현 : 3명
열린 형태의 문제로 사고의 확장	3-1	-정답 : 가로 칸의 수 : 11명 -정답 : 흰색타일의 수 : 9명 -오답한 8명 중 관계식 표현이 서툴러서 틀린 학생 2명

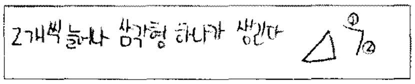
1) 패턴의 다양한 표현

패턴의 일반화가 시작되는 단계에서 학생들은 규칙 및 관계를 표현하는 방식이 다양했다. 문항 1-6은 <모양 번호>가 증가함에 따라 <성냥개비의 개수>가 어떻게 변하는지 서술하는 문제로 학생들은 자신의 표현하기 편한 방식으로 글이나 그림 및 식을 이용하여 서술하고 있다. <그림 1>와같이 식으로 표현하는 학생은 2명, <그림 2>처럼 그림과 언어로 표현하는 학생은 20명, <그림 3>처럼 화살표를 이용해 패턴결과 앞뒤 관계를 강조하는 학생은 3명이 있었다. <그림 1>의 학생은 전 번호의 성냥개비의 개수에 +2를 하면 다음 번호의 성냥개비의 개수가 나온다는 것을 식으로 표현하고 있다.



<그림 1>

<그림 2>의 학생은 처음 삼각형을 그리고 늘어나는 성냥개비 2개를 그리면서 2개씩 늘어나 삼각형 하나가 생긴다고 서술하고 있다.



<그림 2>

<그림 3>의 학생은 성냥개비가 1개 겹쳐져서 2개씩 늘어난다는 표현을 화살표를 이용해서 서술하고 있다. 즉, 화살표를 이용해 패턴결과 앞뒤 관계를 강조하고 있다.

<그림 3>

2) 열린 형태의 문제로 사고의 확장

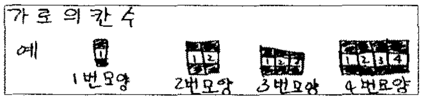
문제를 제시할 때 구체적으로 하지 않고 생각할 수 있게끔 확장된 형태로 제시하자 학생들은 낮은 정답률을 보였지만 다양한 사고를 할 수 있었다. 문항 3-1 은 다른 문항에 비해 낮은 정답률 71.43 %로 20명이 정답하였다. <표 6>에서 보는 것과 같이 다른 문항에 비해 구체적인 질문을 하지 않고 <모양 번호>가 무엇을 기준으로 나타낸 것인지를 묻는 확장된 질문을 이용했기 때문이다. 또한 흰색과 회색이 섞여있는 타일을 이용하여 다양한 답을 할 수 있게끔 함으로써 학생들의 답도 다양하였다.

<표 6>문항 형태

번호	질문 내용
1-1	한 번 접으면 몇 부분으로 나누어지나요?
1-2	두 번 접으면 몇 부분으로 나누어지나요?
1-6	<모양 번호>가 증가함에 따라 성냥개비의 개수는 어떻게 변하나요?
2-1	<모양 번호>가 증가함에 따라 벽돌의 개수는 어떻게 변하나요?
3-1	<모양번호>는 무엇을 기준으로 나타내는 것일까요?

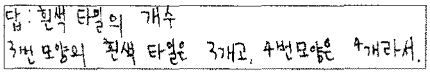
문항 3-1에 정답한 20명 중 <그림 4>처럼 가로의 칸 수로 표현한 학생은 11명, <그림 5>처럼 흰색타일의 개수라고 표현한 학생은 9명으로 학생들은 다양한 반응을 보이며 패턴을 자기나름대로 서술하고 있다.

<그림 4>의 학생은 1번 모양부터 4번 모양까지 그림을 그리면서 가로 칸의 수에 따라 <모양 번호>가 정해진다고 서술하고 있다.



<그림 4>

<그림 5>의 학생은 3번 모양은 흰색타일의 개수가 3개이고, 4번 모양의 흰색 타일의 개수는 4개라고 하면서 흰색타일의 개수에 따라 <모양 번호>가 정해진다고 서술하고 있다.



<그림 5>

그러나 오답한 8명은 <모양번호>가 무엇을 기준으로 나타낸 것인지 묻는 문제가 어떤 의미인지 몰랐다. <그림 6>의 학생처럼 흰색, 회색 타일로 이루어져있다고 쓰거나 <그림 7>의 학생처럼 모양번호는 그 모양의 번호를 알려준다고 쓰거나 그냥 타일을 보고 서술하였다.

흰색, 회색타일으로 이루어져있다

<그림 6>

모양변화는 그모양의 번호를 알려줌

<그림 7>

나) 패턴의 일반화를 형성하는 단계

패턴의 일반화를 형성하는 단계는 패턴의 일반화 2단계로 학생들은 주어진 것 외에 또 다른 예를 생각하고 해결해야 한다. 그리고 이를 통해 일반화를 생각할 수 있어야 한다. 학생들은 어떤 패턴이 주어졌을 때, 주어진 것 외에 다른 예를 해결하는데 전혀 어려움을 느끼지 않았고, 패턴이 의도하고 있는 내용을 제대로 파악하였으며, 관찰된 패턴을 언어로 기술하는데 능숙했다. 3개의 문항 1-7, 4-2, 4-10을 제외하고는 정답률이 80%이상이었다. 문항 1-7은 섣부른 판단으로 인하여 낮은 정답률 71.43%를, 문항 4-2, 4-10은 큰 수를 제시함으로써 낮은 정답률 67.85%, 71.43%를 나타내었다.

차시에 따라서 나타나는 패턴의 일반화를 형성하는 단계의 특징은 첫째, 주어진 예 외에 또 다른 예를 생각하여 공통된 규칙을 찾지 못하는 학생들이 1차시에 섣부른 판단을 하였다(예,문항 1-3). 둘째, 학생들이 패턴을 다양하게 표현한다는 것이다. 즉, 주어진 패턴 외에 더 많은 패턴을 서술할 때도 식이나 그림 및 언어 등 다양한 형태로 표현하였다(예, 문항 1-7). 셋째, 관찰된 패턴의 규칙이 어떻게 나타나는지 논리적 근거를 들어가면서 서술하였다(예, 문항 2-6, 3-2, 3-5, 3-6). 넷째, 4차시 문항에서 큰 수를 제시 하자 학생들은 산술적 계산이 아닌 다른 전략을 사용하거나 관계식을 파악하여 풀었다(예, 문항 4-2, 4-9). 다섯째, 다음 단계의 관계식을 미리 파악하는 학생들이 생겼다. 1차시에는 규칙을 나타내는 것으로 답했지만 점점 학습하면서 5차시에는 일반화를 파악하여 관계식을 미리 표현하는 학생들이 생겼다(예. 5-1, 5-2).

1) 섣부른 판단

문항 1-3은 색종이를 네 번 접을 때 몇 부분으로 나누어지는지 알아보는 문제이다. 정답률 71.43%로 20명이 정답하였다. 오답한 8명 중 5명은 8부분이라고 답하였다. 이 5명은 문항 1-1에서 한 번 접었을 때 2부분으로 나누어지고 문항 1-2에서 두 번 접었을 때 4부분으로 나누어지기 때문에 한 번 접을 때마다 2씩 커진다고 생각하여 세 번 접으면 6부분으로 네 번 접으면 8부분으로 나누어진다고 섣부른 판단을 한 것이다. 이처럼 1차시에서 다른 예를 더 생각해서 공통된 규칙을 찾지 못하는 학생들이 있었다.

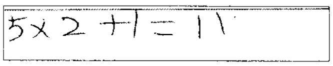
<표 7> 차시에 따라 나타나는 패턴의 일반화를 형성하는 단계의 특징

특징	문항	학생들의 반응
섣부른 판단	1-3	-오답자 8명 중 5명
패턴의 다양한 표현	1-7	-식 세우기 : 1명 -그림+세기 : 3명 -1번 모양부터 차례로 적기 : 17명 -패턴결과 앞뒤 관계 이용 : 2명
논리적 근거	2-6	-배수 개념 이용 : 22명 -더하기 개념 이용 : 4명
	3-2	-그림만 제시 : 10명 -그림+논리적 근거 제시 : 5명 -그림+논리적 근거+반성적 사고 제시 : 1명
	3-5	-그림만 제시 : 19명 -그림+논리적 근거 제시 : 8 명
	3-6	-타일이 4개씩 늘어난 것 : 10명 -관계식 : 3명 -패턴 결과의 앞뒤관계 이용 : 1명 -표이용 : 1명 -그림에 번호 붙이기 : 10명
큰 수를 이용한 사고의 확장	4-2	-관계식 이용 : 10명 -홀수 개념 이용: 10명
	4-10	-관계식 이용 : 20명
다음단계의 관계식 미리 파악	5-1	-정답한 27명 중 2명
	5-2	-정답한 27명 중 1명

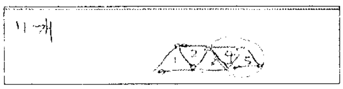
2) 패턴의 다양한 표현

패턴의 일반화를 형성하는 단계에서도 학생들은 주어진 패턴 외에 더 많은 패턴을 서술할 때도 식이나 그림 및 언어 등 다양한 형태로 표현하였다. 2단계 모든 문항에서 학생들은 다양한 표현을 사용하고 있었다.

문항 1-7은 <5번 모양>의 성냥개비는 몇 개인지 알아내는 문제로 23명이 정답하였지만 해결과정은 다양하게 나타났다. <그림 8>의 학생 1명만이 관계식을 이용하여 5×2+1=11개를 쉽게 찾았다. <그림 9>의 학생처럼 직접 <5번 모양>을 그려서 각각의 성냥개비를 하나씩 세는 학생은 3명이 있었다.



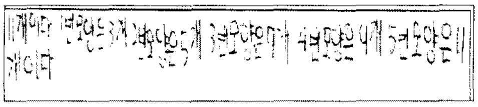
<그림 8>



<그림 9>

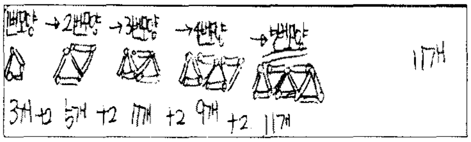
<그림 10>의 학생은 1번 모양은 3개, 2번 모양은 5개 3번 모양은 7개처럼 각각의 경우에 개수를 세어 5번 모양이 11개임을 확인했다. 이처럼 각 번호에 해당되는 성냥개비의 개수를 1번 모양부터

차례로 생각해서 답을 구하는 학생은 17명이 있었다.



<그림 10>

<그림 11>의 학생은 1번 모양부터 5번 모양까지 모양번호, 그림, 성냥개비의 개수, 성냥개비가 늘어나는 개수 등을 자세하게 서술하고 있다. 이처럼 자세하게 서술하는 하는 학생은 2명이 있었다.



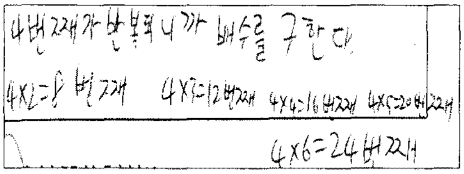
<그림 11>

3) 논리적 근거 제시

패턴의 일반화를 형성하는 단계에서 학생들은 관찰된 패턴의 규칙이 어떻게 나타나는지 논리적 근거를 들어가면서 서술하고 있음을 볼 수 있다. 이는 학생들이 패턴의 규칙성을 찾지 못하기 때문에 문제해결을 어려워하는 것이 아니라는 것을 보여준다. 자신의 사고를 언어로 표현함으로써 일반화를 생각하고 있음을 알 수 있다. 예를 들면 문항 2-6 에서 살펴볼 수 있다.

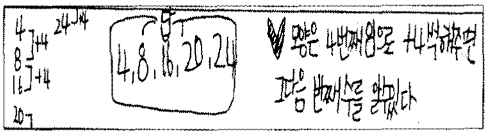
문항 2-6은 ☆ ○ ◇ ♥모양을 순서대로 계속 늘어 놓으려고 할 때 ♥모양이 몇 번째에 놓이는지 답을 5가지 적어보는 문제이다. 28명중 26명이 정답하여 정답률이 92.85% 이다. 26명은 규칙을 스스로 정할 줄 알고 모양에 번호를 직접 붙여가며 문제를 풀고 있다.

<그림 12>의 학생은 배수의 개념을 이용하여 4가 반복되니깐 4의 배수를 4×2=8, 4×3=12, 4×4=16, 4×5=20, 4×6=24라고 답하였다. 배수개념으로 푼 학생은 22명으로 왜 4의 배수를 구해야 하는지 알고 있었다.



<그림 12>

또는 <그림 13>의 학생은 ♥가 4번씩 반복됨을 +4씩 해주는 것으로 생각하여 4, 8, 12, 20, 24 처럼 더하기 개념으로 구했다. 더하기 개념으로 푼 학생은 4명으로 왜 4씩 더하는지 자세히 서술하고 있다.



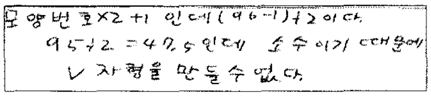
<그림 13>

4) 큰 수를 이용한 사고의 확장

학생들은 1차시에 문제에 제시된 것 외에 다른 예를 생각하고 해결하는 과정에서 산술적 계산에 의존하려는 경향을 보였다. 패턴 번호에 따른 패턴의 결과값을 구할 때 패턴의 일반화를 생각하기 다 1번부터 차례로 세어서 결과값을 구하는 학생들이 많았다. 그러나 5차시로 가면서 그런 경향이 줄어들었다. 특히 문항 4-2 에서 계산이 어려운 큰 수를 제시하여 두 변수의 관계를 생각하게 함으로써 사고의 확장이 가능했다.

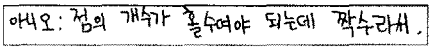
96개의 점으로 V자형을 만들 수 있는지 판단하는 문제에 대하여 19명이 정답을 하였다. 이 중에서 9명은 관계식을 이용하여 풀었고, 10명은 홀수개념을 이용하여 풀었다. 96이라는 큰 수를 제시함으로서 관계식을 미리 생각하는 학생들이 있을 뿐만 아니라 처음부터 세지 않고 다른 공통점을 찾은 학생들이 있다는 것을 알 수 있다.

관계식을 이용한 9명은 <그림 14>처럼 관계식 '모양번호×2+1' 에서 (96−1)÷2=47.5이기 때문에 즉, 47.5가 소수이기 때문에 만들 수 없다고 서술하고 있다.



<그림 14>

홀수개념을 이용한 10명은 <그림 15>처럼 주어진 패턴을 파악하여 점의 개수가 홀수여야 하는데 96개는 짝수라서 만들 수 없다고 서술하고 있다.

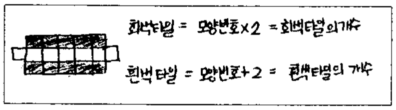


<그림 15>

5) 다음 단계의 관계식 미리 파악

학생들은 패턴의 일반화를 형성하는 단계문항에서 처음에 규칙을 나타내는 것으로 답했지만 점점 학습하면서 미리 일반화를 파악하여 일반화된 식으로 답하였다.

문항 5-6은 <5번 모양>을 그리는 문제로 정답한 27명 중 <그림 16>의 학생은 <5번 모양>을 그리면서 '회색타일의 개수 = 모양번호×2' 와 '흰색타일의 개수 = 모양번호 +2 '라는 관계식을 바로 파악했다. 그 만큼 관계식을 파악하는데 익숙해져 있다고 할 수 있다.



<그림 16>

다) 패턴의 일반화를 명확하게 하는 단계

패턴의 일반화를 명확하게 하는 단계는 패턴의 일반화 3단계로 관찰된 패턴을 언어 또는 기호로 기술하는 것이다. 특히 1차시에는 패턴 번호와 패턴 결과라는 두 변수사이의 관계를 언어로 서술하고, 2차시는 관계식 도입, 3차시에는 관계식의 일반화, 4차시에는 문자식 도입, 5차시에는 문자식의 일반화를 학습하게 된다. 1차시 문항 1-4에서 1명이, 문항 1-8번에서 3명만이 두 변수사이의 관계를 이해했다. 1차시 학습자료 분석 후 학생들이 두 변수사이의 관계를 너무 이해 못한다고 판단하고 2차시 시작 전에 본 연구자는 두 변수사이의 관계에 대해 설명했다. 그러자 2차시 문항 2-3은 21명, 문항 2-7은 23명이 정답했고 3차시, 4차시, 5차시에서도 대부분의 학생들이 두 변수사이의 관계에 대해 명확하게 서술했다.

<표 8> 차시에 따라 나타나는 패턴의 일반화를 명확하게 하는 단계의 특징

특징	문항	학생들의 반응
두 변수 사이의 관계 이해	1-4	-정답 : 1 명 -오답한 27명 중 5 명 : 패턴 결과 앞뒤 관계 서술
	1-8	-정답 : 3명 -오답한 25명 중 16명 : 패턴 결과 앞뒤 관계 서술
	2-3	-정답 : 21 명
	3-3	-정답 : 21 명
관계식의 다양한 표현	2-3	-정답한 19명 중 1명 : 3×모양번호+모양번호+1
	3-3	-정답한 21명 6명 : 모양번호×1 1명 : 모양번호+0 1명 : 모양번호×3÷3
	3-4	-정답한 21명 중 1명 : 모양번호×3-모양번호
관계식 표현의 어려움	2-3	-오답한 7명 중 1명
	3-10	-오답한 11명 중 2명
변수 사이의 혼란	3-3	-오답한 7명 중 1명 : 흰색타일=회색타일÷2
	3-10	-오답한 11명 중 1명 : 회색타일=모양번호+흰색타일-2
논리적 근거 제시	3-8	-정답한 21명 중 17명
	3-10	-정답한 17명 중 12명
	4-4	-정답한 20명 중 12명
관계식에서 문자식으로의 전이	4-7	-정답 : 20명
	5-8	-정답 : 23명
문자사용의 유연성	4-8	-정답 : 20명

차시에 따라서 나타나는 패턴의 일반화를 명확하게 하는 단계의 특징을 <표 8>과 같이 정리하였다. 첫째, 학생들이 두 변수 사이의 관계를 이해하는 과정을 보면 1차시관련 문항에서는 정답한 학생이 소수였으나 2~3차시 관련 문항에서는 많은 학생들이 정답을 하고 있다(예, 문항 1-4, 1-8, 2-3, 3-3). 둘째, 관계식의 다양한 표현을 볼 수 있다. 관계식을 표현할 때 대부분의 학생들이 표현한 형태가 아닌 다른 형태로 표현하는 학생들이 있었다(예, 문항 2-3, 3-3, 3-4). 셋째, 관계를 파악했지만 관계식으로 표현하는 것을 힘들어하는 학생들이 2차시와 3차시에 있었다(예, 문항 2-3, 3-10). 넷째, 변수 사이에 혼란을 느끼는 학생들이 있었다. 3차시에 변수를 다양하게 하자 어떤 변수를 사용해야 할 이지 몰라 오류를 보였다(예, 문항 3-3, 3-10). 다섯째, 학생들은 패턴 번호와 패턴 결과의 관계를 표현할 때도 논리적 근거를 들어가면서 서술하였다(예, 문항 3-8, 3-10, 4-4). 여섯째, 학생들은 4차시 관계식에서 문자식으로 바꾸어 쓰는 것을 어려워하지 않았다(예, 문항 4-7, 5-8). 일곱째, 임의의 대상을 표현하기 위해 자유롭게 교환할 수 있는 많은 종류의 문자가 있다는 문자를 유연하게 이해하고 사용하였다(예, 문항 4-8)

1) 두 변수 사이의 관계에 대한 이해

학생들은 1차시에 패턴 번호와 패턴 결과의 관계를 파악하여 패턴의 일반화된 식을 구하기보다는 패턴 결과 앞뒤 수의 관계를 서술하였다. 문항 1-4, 1-8에서 두 변수사이의 관계를 어려워하였고 2차시부터 관계를 이해하기 시작하여 바르게 표현하는 학생들이 늘어났다.

문항 1-8은 <모양번호>와 <성냥개비의 개수>사이 관계를 알아보는 문제로 3명만이 정답하였다. 2명은 <그림 17>과 같이 <모양번호>와 <성냥개비의 개수>의 관계를 식 '(모양번호×2)+1=성냥개비의 개수' 라고 서술했다. 다른 1명은 1번 모양일 때 성냥개비의 개수가 3개라서 차이가 2나고 2번 모양일 때 5개라서 차이가 3이 나기 때문에 차이는 1씩 늘어난다고 서술하고 하고 있다. 이 학생은 관계를 식으로 표현하지는 못했지만 <모양번호>와 <성냥개비의 개수>사이의 관계에 대해 언급하고 있기 때문에 정답하였다.

(모양번호×2)+1=성냥개비의개수

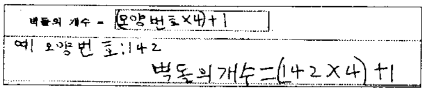
<그림17>

오답한 25명 중 16명은 <그림 18>처럼 모양번호가 늘어남에 따라 성냥개비의 수가 2개씩 늘어나는 것에 더 초점을 맞추어 설명하고 있다. 즉, <앞 번호의 성냥개비의 개수>와 <다음 번호의 성냥개비의 개수>사이의 관계에 대해 서술하고 있다.

1번모양 3개 +2 2번모양 5개 +2 3번모양 7개
이렇게 번호가 늘어날수록 성냥개비의 갯수도
2개씩 늘어난다.

<그림 18>

문항 2-3은 <모양번호>와 <벽돌의 개수>사이의 관계식을 쓰는 문제로 정답한 21명이 <그림 19>의 학생과 같이 '벽돌의 개수 = 모양번호×4+1'을 바르게 서술했다. 학생들은 패턴 결과 앞뒤수의 관계를 서술하지 않고 패턴 번호와 패턴 결과사이의 관계를 서술하기 시작했다.

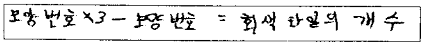


<그림 19>

2) 관계식의 다양한 표현

두 변수사이의 관계를 어떻게 표현하는지 알게 된 학생들의 표현방식 중 다른 학생들과 다르게 표현하는 학생들이 있었다.

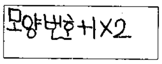
문항 3-4은 <모양번호>와 <회색 타일의 개수>사이의 관계식을 나타내는 문제로 21명이 '회색타일의 개수=모양번호×2'라고 정답하였다. 그런데 <그림 20>의 학생은 '모양번호×3-모양번호=회색타일의 개수'라는 관계식을 썼다. 이 관계식도 <모양번호>와 <회색타일의 개수>사이의 관계를 나타내는 것으로 다르게 표현한 것이기 때문에 정답하였다.



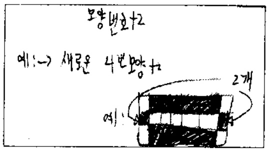
<그림 20>

3) 관계식 표현의 어려움

두 변수사이의 관계를 잘 파악했지만 식으로 표현하지 못하는 학생들이 있었다. 문항 3-1 0의 답은 '(모양번호+1)×2'나 '모양번호×2+2'로 17명이 정답하였다. 그러나 오답한 11명 중 <그림 21>의 학생은 관계를 파악하고 있으나 관계식으로 표현할 때 괄호를 사용하지 않고 '모양번호+1×2'로 표현하여 틀렸고, <그림 22>의 학생은 회색타일의 개수가 양쪽 줄에 2개 더 있다는 것을 파악하고 있으나 식으로 '모양번호 +2'라고 표현하여 틀렸다.



<그림 21>



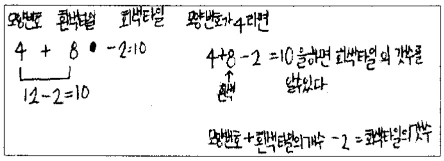
<그림 22>

4) 변수 사이의 혼란

3차시의 타일과 같은 주제는 모양번호, 흰색타일, 회색타일 등과 같이 다양한 변수들이 있다. 변수들이 많기 때문에 문제에서 제시하는 관계식에 어떤 것을 사용해야 할지 모르는 학생들이 있었다.

문항 3-1 0은 <모양번호>와 <회색타일의 개수>사이의 관계식을 알아보는 문제로 17명이 정답하였다. 오답한 11명 중 <그림 23>의 학생은 <회색 타일의 개수>를 <모양 번호>만 연결시키는 것

이 아니라 <흰색타일의 개수>와도 연결시켰다.

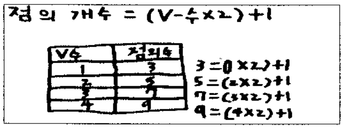


<그림 24>

5) 논리적 근거 제시

패턴의 일반화를 명확하게 하는 단계에서 학생들은 관찰된 패턴을 관계식이나 문자식으로 표현하면서 논리적 근거를 들고 있음을 알 수 있다. 3차시부터는 1차시와 2차시에서 언어로 길게 쓰는 것보다 좀더 간략하고 명료하게 서술하고 있다.

4-4번은 <V-수>와 <점의 개수>사이의 관계식을 구하는 문제로 정답한 20명 중 8명은 식만을 사용하여 쓰고 12명은 <그림 24>의 학생처럼 좀 더 세련되게 관계식의 정당화를 쓰고 있다.

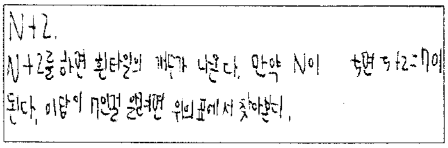


<그림 24>

6) 관계식에서 문자식으로의 전이

학생들은 패턴의 일반화를 통해 언어를 사용한 관계식을 표현한 후, 문자를 사용하는 문자식을 표현하는 과정을 거쳐서 단계적으로 문자를 사용하게 된다.

문항 5-8은 N과 <흰색타일의 개수>사이의 관계를 문자식으로 나타내는 문제로 23명이 <그림 25>의 학생처럼 문자 N을 이용하여 문자식을 좀 더 자연스럽게 표현했다.



<그림 25>

7) 문자 사용의 유연성 이해

학생들은 문자사용의 유연성에 대한 이해가 가능하였다. 즉, 임의의 대상을 표현하기 위해 자유롭게 교환할 수 있는 많은 종류의 문자가 있다는 사실을 쉽게 받아들였다.

문항 4-8은 문항 4-7의 N대신에 S를 사용하여 <점의 개수>에 대한 문자식을 나타내는 문제이다. 문항4-7에 정답한 20명이 문항4-8에서도 정답한 것으로 보아 학생들은 <그림 26>처럼 V-수를 대신

해서 사용할 수 있는 문자가 N뿐만 아니라 S로 쓸 수 있다는 것에 대해 어려워하지 않았다. 문자의 변화가 반드시 그것이 나타내는 대상의 변화를 수반하는 것이 아님을 이해한 것으로 보인다.

$$\text{감의개수} = \underbrace{S}_{V-\text{수}} \times 2 + 1 = \text{점의개수}$$

<그림 26>

라) 패턴의 일반화를 정당화하는 단계

패턴의 일반화를 정당화하는 단계는 패턴의 일반화 4단계로 일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인하는 것이다. 문항 1-5은 1명이 정답하고 문항 1-9은 3명이 정답하여 낮은 정답률을 나타내고 있다. 오답한 대부분의 학생들이 두 변수 사이의 관계를 이해하지 못해 산술 계산에 의존하였다.

차시에 따라서 나타나는 패턴의 일반화를 정당화 하는 단계의 특징은 <표 9>와 같다. 첫째, 1차시에는 산술 계산에 의존하려는 경향을 보이는 학생들이 있었다. 패턴 번호와 패턴 결과의 관계를 생각하지 않고 처음부터 개수를 세어 구한 것이다(예, 문항 1-5, 1-9). 둘째, 2차시에 문항에 큰 수가 제시되자 산술적 계산에 의존하지 않고 패턴 사이의 일반성을 파악하여 관계식으로 문제를 풀려는 학생들이 늘어났다(예, 문항 2-9, 3-11, 4-6). 셋째, 변수의 의미파악이 잘 되지 않아 힘들어하는 학생들이 있었다. 즉 문제에 제시된 수를 어떻게 대입해서 풀어야 할지 몰라 어려워하였다(예, 문항 2-4, 4-13).

<표 9> 차시에 따라 나타나는 일반화를 정당화 하는 단계의 특징

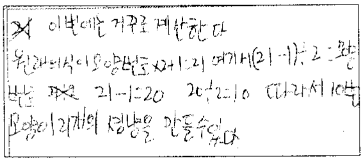
특징	문항	학생들의 반응
산술 계산에 의존하려는 경향	1-5	오답한 27명 중 5명
	1-9	오답한 25명 중 10명
큰 수를 이용한 패턴 사이의 일반성 파악	2-9	정답 : 14명
	3-11	정답 : 20명
	4-6	정답 : 22명
변수의 의미 잘못 파악	2-4	오답한 9명 중 1명
	4-13	정답한 18명 중 1명

1) 산술 계산에 의존하려는 경향

1차시 패턴의 일반화를 정당화하는 문항에서 학생들은 산술적 계산에 의존하려는 경향을 보이고 있다. 패턴 번호와 패턴 결과의 관계를 생각하지 않고 처음부터 개수를 세어 구한 것이다. 그러나 다음 차시에서 큰 수를 제시함으로써 관계를 이용하는 학생이 더 많아졌다.

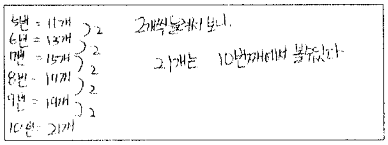
문항 1-9은 21개의 성냥개비로 <_번 모양>을 만들 수 있는지 묻는 문제로 <모양번호>와 <성냥개비의 개수>사이의 관계를 이용하여 푼 학생은 3명이 있었다. <그림 27>의 학생은 <모양번호>와

<성냥개비의 개수>사이의 관계를 파악하고 '모양번호×2+1'를 이용하여 거꾸로 계산하여 10번 모양이 나왔다.

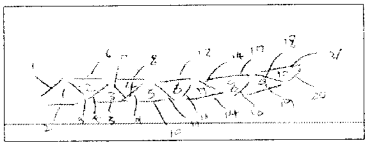


<그림 27>

오답한 25명 중 10명의 학생들은 1번 모양부터 10번 모양까지의 성냥개비의 개수를 세어서 풀었다. 10명 중에 <그림 28>의 학생은 직접 순서대로 각각의 <모양 번호>에 따른 성냥개비의 개수를 적으면서 21개의 성냥개비로 만들 수 있는 것은 10번 모양이라고 하였고 <그림 29>의 학생은 10번 모양을 직접 그려서 성냥개비의 개수를 세고 있다.



<그림 28>

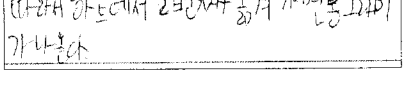


<그림 29>

2) 큰 수를 이용한 패턴 사이의 일반성 파악

학생들은 패턴을 일반화하는 과정에서 산술계산에 의존하는 경향이 있었으나, 계산이 어려운 큰 수를 제시하여 산술계산에 의존하지 않도록 유도하였다. 학생들은 5차시로 갈수록 두 변수의 관계를 이해해서 관계식이나 문자식을 세우고 패턴사이의 일반성을 파악하였다.

문항 2-9은 ☆○◇♥를 순서대로 계속해서 늘어놓으려고 할 때 402번째에는 어떤 모양이 오는지 알아보는 문제로 정답한 14명은 <그림 30>처럼 자신이 무엇을 해야 할지 알고 있다. 4번째의 모양이 ♥임을 알고 4배수는 모두 ♥임을 파악하여 400번이 ♥임을 확인했다. 그리고 402번째가 400번에서 2번 더 옮겨 가야함을 인식하고 ○라는 답을 내렸다. 402번까지 일일이 세지 않고 4의 배수번째 오는 모양이 ♥라는 일반화를 이끌어내고 문제를 해결한 것이다.

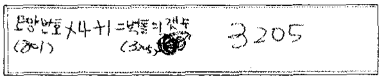


<그림 30>

3) 변수의 의미 잘못 파악

변수의 의미를 잘못파악해서 어느 부분에 어떤 숫자를 대입해서 풀어야할지 몰라 힘들어하는 학

생들이 있었다. 이 학생들은 문제에 제시된 숫자가 무엇을 의미하는지 생각하지 않고 풀고 있었다. 문항 2-4은 801개 벽돌로 <_번 모양>을 만들 수 있는지 알아보는 문제로 오답한 9명 중 <그림 31>의 학생은 801개가 <벽돌의 개수>인지 <모양번호>인지를 잘 인지하지 못하고 <모양번호>에 801을 대입하여 푸는 오류를 보였다.



<그림 31>

2. 패턴의 일반화 과정의 특징과 학생의 어려움

가. 패턴의 일반화 과정의 특징 요약

초등학교 6학년들이 패턴의 일반화를 통해 대수를 접하였을 때 나타내는 특징을 요약하면 일반화 과정인 패턴의 일반화를 시작하는 단계, 패턴의 일반화를 형성하는 단계, 패턴의 일반화를 명확하게 하는 단계, 패턴의 일반화를 정당화하는 단계 등 4단계를 거치며 잘 이해하였다고 할 수 있다. 패턴의 일반화가 시작되는 단계의 특징은 처음에 패턴을 일반화하도록 요구받았을 때, 즉 패턴의 규칙 및 관계를 표현해야 했을 때 학생들은 자신이 표현하기 편한 방식으로 식이나 그림 및 언어 등을 이용하여 다양하게 서술하였다. 나중에 한 개의 답이 아닌 여러 개의 답이 나올 수 있는 열린 형태의 문제를 제시하자 처음보다 낮은 해결률을 보이기는 했지만, 처음 일반화를 시도했을 때 보다 다양한 사고를 나타내었다.

패턴의 일반화를 형성하는 단계에서 처음에는 주어진 예 이외의 다른 예를 생각하여 공통된 규칙을 찾지 못하는 학생들이 1차시에 섣부른 판단을 하였다. 학생들은 점차로 학생들은 주어진 패턴 외에 더 많은 패턴을 서술할 때도 식이나 그림 및 언어 등 다양한 형태로 표현하였다. 그 다음에는 관찰된 패턴의 규칙이 어떻게 나타나는지 논리적 근거를 들어가면서 서술하였다. 4차시에 제시된 큰 수가 포함된 문항에서도 산술적 계산이 아니라 계산이나 관계식을 파악하여 푸는 등 일반화 형성이 활발하였다. 실험의 마지막에서는 다음 단계의 관계식을 미리 파악하는 학생들이 생겼다. 1차시에는 규칙을 나타내는 것으로 답했지만 점점 학습하면서 5차시에는 일반화를 파악하여 미리 관계식를 표현하는 학생들이 나타나게 된 것이다.

교수실험이 진행되는 과정에서 발달한 패턴의 일반화를 명확하게 하는 단계의 특징을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 학생들이 두 변수 사이의 관계를 이해하는 과정을 보면 1차시관련 문항에서는 정답한 학생이 소수였으나 2~3차시 관련 문항에서는 많은 학생들이 정답하였다. 둘째, 관계식의 다양한 표현을 볼 수 있다. 관계식을 표현할 때 대부분의 학생들이 표현한 형태가 아닌 다른 형태로 표현하는 학생들이 있었다. 셋째, 관계를 파악했지만 식으로 연결시키지 못한 경우는 2~3차시에 엿볼 수 있었다. 넷째, 변수 사이에 혼란을 느끼는 학생들이 있었다. 3차시에 변수를 다양하게 하자 어떤

변수를 사용해야 할이지 몰라 오류를 보였다. 다섯째, 패턴 번호와 패턴 결과의 관계를 표현할 때도 논리적 근거를 들어가면서 서술하였다. 여섯째, 학생들은 4차시 관계식에서 문자식으로 바꾸어 쓰는 것을 어려워하지 않았다. 일곱째, 임의의 대상을 표현하기 위해 자유롭게 교환할 수 있는 많은 종류의 문자가 있다는 문자 사용의 유연성에 대해 쉽게 받아들였다.

교수실험이 진행되는 과정에서 발달한 패턴의 일반화를 정당화 하는 단계의 특징을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 1차시에는 산술 계산에 의존하려는 경향을 보이는 학생들이 있었다. 패턴번호와 패턴 결과의 관계를 생각하지 않고 처음부터 개수를 세어 구한 것이다. 둘째, 2차시에 문항에 큰 수가 제시되자 산술적 계산에 의존하지 않고 패턴 사이의 일반성을 파악하여 관계식으로 문항을 풀려는 학생들이 늘어났다. 셋째, 변수의 의미파악이 잘 되지 않아 힘들어하는 학생들이 있었다. 즉 문제에 제시된 수를 어떻게 대입해서 풀어야 할지 몰라 어려워하였다.

나. 패턴의 일반화 과정에서의 어려움

Friedlander & Tabach(2001)은 패턴의 일반화단계에서 각 단계에서 또는 단계 사이에 여러 가지 어려움이 발생할 수 있는데, 그 어려움을 세 가지 수준으로 구분하였다. 그 수준은 인지 수준, 언어화 수준, 기호화 수준으로 구분된다. 패턴의 일반화과정 학습자료 분석 결과 연구 대상 28명중 대부분의 학생이 패턴의 일반화과정을 잘 해결하였으나 6명이 패턴의 일반화 4단계까지 도달하지 못하였다. 2명은 수학학습부진아로 패턴의 일반화 1단계 문제는 잘 해결하였으나 2단계 문항에서부터 산술적인 부분을 해결하지 못하여 풀지 못하였다. 2명은 언어화수준에서 어려움을 겪고, 2명은 기호화 수준에서 어려움을 겪고 있었다.

첫째, 언어화수준에서 어려움을 겪는 2명은 패턴의 일반화를 언어형태로 명확히 인식하고 표현하지 못하였다. 특히 두 변수사이의 관계를 이해하지 못해 많이 어려워했다. 패턴 결과의 앞뒤 관계에만 집중하고 패턴 번호와 패턴 결과사이의 관계를 이해하는데 많은 시간이 걸렸으나 여러 예시자료를 풀어보면서 관계를 조금씩 이해했다. 그리고 관계를 이해시키는데도 어려웠지만 관계식으로 표현하도록 하는데도 많은 시간이 걸렸다.

둘째, 기호화 수준에서 어려움을 겪은 학생 2명은 두 변수사이의 관계를 파악하고 있으나 두 변수사이의 관계를 언어로 표현하거나 관계식, 문자식으로 표현하는 데 어려움을 겪었다. 면담을 통해 둘 다 주어진 패턴 번호와 패턴 결과 어떻게 변하는지는 파악하고 있었다. 그러나 막상 관계를 표현하라고 하면 틀리게 쓰거나 모르겠다고 하였다. 학습자료의 예를 통해 표현하는 연습을 하게 하자 이 학생들은 언어화수준에서 어려움을 겪은 두 학생보다 훨씬 빨리 패턴의 일반화 4단계까지 도달할 수 있었다.

V. 결 론

연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 첫째, 패턴의 일반화가 시작되는 단계에서 학생들은 문제에 제시된 모양이나 그림이 어떤 패턴을 이루고 있는지 쉽게 파악했으며 패턴을 언어로 기술하는데 능숙했다. 패턴의 일반화가 형성되는 단계에서 학생들은 주어진 패턴 외에 더 많은 패턴을 서술할 때도 식이나 그림 및 언어 등 다양한 형태로 표현하였으며 논리적인 근거를 제시하며 서술했다. 그리고 패턴의 일반화를 명확하게 하는 단계에서 학생들은 처음에는 패턴 결과 앞뒤의 관계에 집중하였지만 학습하면서 패턴 번호와 패턴 결과의 함수적 관계를 파악하여 패턴의 일반화된 식을 이해하고 서술할 수 있었다. 마지막으로 패턴의 일반화를 정당화하는 단계에서 학생들은 처음에 산술적 계산에 의존하였으나 관계식이나 문자식을 이해하자 문제에 적용할 수 있었다. 패턴의 일반화 과정을 잘 해결하는 것으로 보아 초등학교 6학년 학생들에게 패턴의 일반화를 통한 대수 도입이 가능하다고 본다.

둘째, 패턴의 일반화과정에 어려움을 경험하는 학생들은 두 변수의 관계를 이해하고 두 변수의 관계식을 표현하는데 많은 어려움을 겪었다. 언어화수준에 어려움을 겪는 학생들은 두 변수사이의 관계를 이해하는 것을 어려워했기 때문에 관계식 표현도 어려워하였다. 기호화수준에서 어려움을 겪는 학생들은 두 변수사이의 관계를 이해했으나 관계식을 표현하는데 어려움을 느꼈다.

셋째, 패턴의 일반화과정을 어려워하는 학생들은 두 변수사이의 관계가 간단한 것부터 사용하여 관계를 이해시켰다. 또한 패턴 모양도 간단한 것에서 점진적으로 더 복잡한 것을 제시할 뿐 아니라, 갑작스럽게 큰 수를 제시하면 적용하는 것이 힘들어 함으로 점진적으로 큰 수를 제시하여 이해를 확장시켜 나아가는 것이 효과적이었다.

패턴의 일반화를 통한 대수도입 교수실험 결과 연구대상 28명 중 22명이 총 5차시분량의 학습자료를 잘 해결하였다. 또한, 패턴의 일반화를 교사가 직접 설명하지 않고 대부분을 학생이 스스로 해결하였으며 교사의 개입은 2차시 학습 자료 투입 시의 1회 뿐이었다. 2차시 학습자료 투입 전 문제에 제시된 두 변수사이의 관계는 패턴 결과의 앞뒤 관계를 말하는 것이 아니라 패턴 번호와 패턴 결과사이의 관계를 나타내는 것이라는 설명과 함께 예를 들어 문항 1-8을 설명해준 것이 전부이다. 따라서 학생들은 두 변수사이의 관계를 이해하자 두 변수를 관계식과 문자식으로 표현하는데 어려워하지 않은 것으로 보인다. 6학년생들에게 패턴의 일반화를 통한 대수도입이 가능 한 것으로 실제로 현장에 적용할 때 한 단원으로 구성하여 우리나라의 대수도입과정의 한 부분으로 적용가능한지 알아볼 필요가 있겠다.

2007년 수정된 제7차 교육과정에서는 문자가 초등학교 6학년에 방정식형태로 도입되고 있다. 그러나 초등학교 6학년 학생들에게 변수의 다양한 의미를 알 수 있도록 패턴의 일반화를 통한 대수도입도 같이 병행한다면, 학생들이 문자이면의 대수적 사고에 대한 학습에 도움이 될 뿐만 아니라 이후 대수 학습에도 많은 도움 될 것이라 판단된다. 따라서 방정식으로 대수를 도입할 때에는 어떤 효과

가 있는지, 패턴에 기초한 대수 도입을 할 때 어떤 효과가 있는지에 대한 후속 연구가 필요하겠다.

본 연구의 패턴의 일반화를 통한 대수도입 교수실험에서 교사는 두 변수의 관계에 대한 설명만 하고 따로 학생들의 학습에 관여하지 않았다. 따라서 교사의 안내에 따라 수업을 할 때 전개 양상을 살펴보고 학생이해에 대한 연구 보안이 필요하다.

참 고 문 헌

강소희 (2008). 초등학교 6학년 학생들의 문자 이해에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

강현영 (2007). 패턴탐구를 통한 일반화와 기호표현 -시각적 패턴을 중심으로-. 학교수학 **9(2)**, pp.313-326.

고재필 (2004). Freudenthal의 수학화 활동을 위한 중학교 대수영역의 학습자료개발. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

김남희 (1997). 변수개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교대학원 박사학위 논문.

김성준 (2002). 학교 대수 도입과 관련된 논의. 학교수학 **4(1)**, pp.29-47.

김성준 (2002). 대수적 사고와 대수 기호에 관한 고찰. 수학교육학연구 **12(2)**, pp.229-245.

김성준 (2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. 학교수학 **5(3)**, pp.343-360.

김택현 (1999). 패턴 활동으로 구성된 함수 단원 개발과 적용-중학교 1학년 함수단원을 중심으로-. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

전주희 (2005). 패턴의 일반화 과정을 통한 대수도입 학습자료 개발 및 적용. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

송욱빈 (2003). 중학교 3학년 학생들의 변수개념 이해 및 인지적 장애에 대한연구. 한국교육대학교 대학원 석사학위논문.

정수영 (2002). 고등학교 학생의 대수적 사고 중 일반화의 사고에 대한 연구. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

정홍춘 (2008). 패턴에 기초한 대수 문제 해 결에서 나타나는 중학생들의 일반화 전략 및 수학적 표현. 한국교원대학교 교육대학원석사학위논문.

한국교육과정평가원 (2004). 학업성취도 국제 비교 연구의 성과와 과제. -2003년 TIMS와 ECD/PISA결과를 중심으로-. 세미나 자료. 연구자료 ORM 2004-26.

Ameron, B. A. van (2002). Reinvention of early algebra. Utecht: CD-β Press, Center of Science and Mathematics Education.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N, Bednarz, C. kieran & L. Lee(Eds.), *Approaches to algebra, Perspectives for research and teaching*(pp. 115-136). Dordrecht / Boston / London : Kluwer.

Britannica (1998). *Patterns and symbols*. Encyclopedia Britannica Education Corporation.

Britannica (1998). *Expression and formulas.* Encyclopedia BritannicaEducation Corporation.

Britannica (1998). *Building formulas. Encyclopedia* Britannica Education Corporation.

Britannica (1998). *Patterns and figures.Encyclopedia* Britannica Education Corporation.

Kieran, C. (1989) A perspective on algebraic thinking. In G. Vernad,, J. Rogalski, & M. Artigue(Eds.) Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol.2 (pp.163-171). Paris.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In G. A. Douglas(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 390-419). New York : MacMilan P. C.

Küchemann (1981). Algebra. In K. Hart, et al. (Eds.), *Children's Understanding of Mathematics:* pp.11-16, The CSMS Mathematics Team.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *MATHEMATICAL THINKING AND LEARNING,* **7(3)**, pp.231-258.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 류희찬 외 공역(2007). <u>학교수학을 위한 원리와 규준</u>. 서울: 경문사

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte(Eds.). *The Ideas of Algebra, K-12*(pp.8-19). NCTM.

Zazkis, B., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics,* **49**, pp.379-402.

A study on the 6th graders' learning algebra through generalization of mathematical patterns

NamGyun Kim
Dept. of Math. Ed., Cheongju National University of Education, Sugok-dong, Heungduk-gu, Cheongju, Chungbuk, Korea, 361-712
E-mail : ngkim@cje.ac.kr

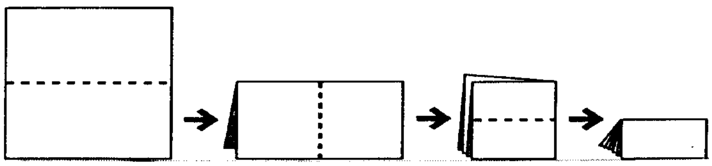
Eun Suk Lee
Gakyeong Elementary School, Bokdae-dong, Heungduk-gu, Cheongju, Chungbuk, Korea, 361-271
E-mail : atleastek@korea.com

2007 Renewed Korea Elementary Mathematics Curriculum introduce algebra 6th grade. According to many studies about introducing algebra, it is desirable to teach 6th graders algebra through generalization of patterns. In this study, 6th graders' understanding processes and difficulties in pattern generalization were analyzed and possiblities of introducing algebra to 6th graders through pattern generalization were examined.

* ZDM classification : H13
* 2000 Mathematics Subjects Classification : 97C90
* Key Words : Generalization Of patterns, early algebra, introduction of algebra, difficulties in algebra learning

부록 : 활동지 예시(1차시분)

※ 아래 그림과 같이 종이를 반으로 접어 보세요. 그리고 종이를 펼쳤을 때, 모두 몇 부분으로 나누어졌는지 세어 보세요.



<한 번 접기> <두 번 접기> <세 번 접기> <네 번 접기>

1-1. 한 번 접으면 몇 부분으로 나누어지나요?

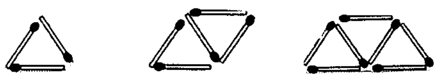
1-2. 두 번 접으면 몇 부분으로 나누어지나요?

1-3. 그러면, 네 번 접으면 몇 부분으로 나누어지나요?

1-4. <접는 횟수>와 <접힌 부분>사이에는 어떤 관계가 있을까요?

1-5. 접힌 부분이 256개라면 몇 번 접은 것인가요?

※ 성냥개비를 이용하여 아래와 같은 규칙으로 모양을 만들어 봅시다. 그리고 각 모양에 <모양 번호>를 붙여봅시다.



<1번 모양> <2번 모양> <3번 모양>

1-6. <모양 번호>가 증가함에 따라 성냥개비의 개수는 어떻게 변하나요?

1-7. <5번 모양>의 성냥개비는 몇 개인가요?

1-8. <모양 번호>와 성냥개비의 개수사이에는 어떤 관계가 있을까요?

1-9. 21개의 성냥개비로 <__번 모양>을 만들 수 있나요?