韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 2호, 2009. 5. 175-196

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 2, May. 2009. 175-196

# 수학 문제의 내적구조를 활용한 기하 영역의 수준별 교수-학습 자료의 분석 연구

한 인 기 (경상대학교)

본 연구는 수학교과의 수준별 교수-학습 자료의 이론적 뒷받침에 관련된 문헌연구로, Ziv의 교수학적 자료에 제시된 하수준과 중수준에 해당하는 교수-학습 자료들을 수학문제의 내적구조라는 관점에서 분석하여, 하수준 문제들의 특징들, 중수준 문제들의 특징들을 조사하였다.

## 1. 서 론

교육과학기술부(2008, p.35)는 수학과 교육과정 개정의 첫 번째 중점으로 수준별 수업 운영의 권장을 들면서, '각 학교에서는 학생의 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 학교 상황에 맞는 수준별 집단을 편성·운영할 수 있도록 하였다'고 하였다. 즉 2006년 개정된 교육과정에서 효과적인 수준별 수업의 구현이 중요한 목표들 중의 하나라는 것을 알 수 있다. 특히 개정된 교육과정에 의한 교과용 도서의 개발에서는 수준별 수업의 정착을 위해 수학교과서와 함께 수학익힘책을 개발하였으며, 올해부터 중등학교에서 활용되고 있다. 예를 들어, 황선욱·강병개·김수영(2009)의 수학익힘책에서는 수준별 익힘문제로 기본문제, 표준문제, 발전문제를 제시하여 학생들이 수준별 학습을 할 수 있도록 배려하였다.

수준별 교육은 모든 학생들에게 같은 수준과 같은 양의 학습과제를 부과했던 종래의 교육을 벗어나, 학생 개개인의 차이를 인정하며 학생의 흥미, 재능, 진로에 적합한 교육 기회를 제공하는 학습자 중심의 교육을 지향한다는 점에서 학교 수학교육의 개선 및 수학교육학 연구의 발전을 위한 중요하고 새로운 방향이 될 수 있을 것으로 기대된다.

현재까지 진행된 수학교육과 관련된 수준별 교육의 연구로는, 첫째 학술적인 측면의 연구로 한국교육과정평가원에서 수준별 교육 중심의 교육과정 개정 및 정착을 위한 몇몇 보고서들(나귀수·최승현, 2002; 박경미 외, 1999; 최승현, 2001; 최승현, 2004a, 20004b)이 출판되었고, 외국의 수학과 수준별 교육의 동향 및 실제에 관련된 연구들(한인기, 2008; 2004), 국내의 수준별 교육에 관련된 연구들(최현근·황우형, 1997; 이의원·김진상·이명희, 2001)이 있다. 둘째, 실제적인 측면에서는 각 시도 교육

---

* 접수일(2009년 3월 30일), 심사(수정)일(2009년 4월 15일), 게재확정일자(2009년 4월 22일)
* ZDM분류 : U20
* MSC2000분류 : 97U23
* 주제어 : 수학문제의 내적구조, 하수준 문제, 중수준 문제, 수준별 자료

청을 중심으로 수학 교사들이 다양한 수준별 교수-학습 자료들을 개발하여, 중등학교의 수학교실에 적용하고 있는 것을 들 수 있다. 이러한 학술적인 측면, 실제적인 측면의 연구들이 병행되고 있는 것은 수학교과의 수준별 교육의 정체성 확립, 발전방향 모색, 수준별 수업의 정착 및 발전이라는 측면에서 나름대로의 의미를 가진다고 할 수 있다.

수학교과의 수준별 교육에 대한 연구 방향과 관련하여 한 가지 지적할 것은, 학술적인 측면의 연구와 실제적인 측면의 교수-학습 자료 개발 연구를 결합시키려는 시도가 미흡했다는 점이다. 구체적인 수준의 수준별 교수-학습 자료의 개발에 대한 학술적인 수준의 체계적인 연구가 수반되어, 수준별 자료 개발 연구의 타당성에 대한 이론적인 뒷받침을 제공할 수 있다면, 수학교과의 수준별 교육에 대한 이론과 실제는 한 단계 높은 수준으로 도약할 수 있을 것이다.

본 연구는 수학교과의 수준별 교수-학습 자료의 이론적 뒷받침에 관련된 문헌연구로, 러시아에서 오랫동안 폭넓게 활용되고 있는 Ziv(1995)의 교수학적 자료에 제시된 수준별 교수-학습 자료들을 수학문제의 내적구조라는 관점에서 분석할 것이다. Ziv의 교수학적 자료에는 4개의 수준으로 교수-학습자료들이 분류되어 있는데, 본 연구에서는 하수준과 중수준에 해당하는 교수-학습 자료들을 분석하여, 하수준 문제들의 특징, 중수준 문제들의 특징, 하수준과 중수준 문제들의 차이점을 조사할 것이다. 이를 통해, 직관적인 수준에서 개발된 수준별 교수-학습 자료들에 대해 객관적이고 학술적인 수준에서 그 타당성을 논의할 수 있을 것이며, 수학 교수-학습 자료의 분석에 관련된 다양한 관점을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

## 2. 수학 문제의 내적구조 분석

수학교육학 영역에서 수학문제의 내적구조에 대한 연구는 초창기의 발전 단계에 있으며, 내적구조에 대한 직관적인 인식을 바탕으로 내적구조 개념의 본질, 내적구조의 추출 및 표현 방법, 그 활용 가능성에 대한 다각적인 연구가 진행되고 있다.

한인기(2001, p.285)는 '주어진 것, 구하는 것, 해결 과정에서 얻어진 성질들 각각을 문제해결 과정의 요소로 규정을 하고, 이 요소들 사이의 관계가... 수학문제의 내적 구조에 해당한다'는 일차적인 수준의 개념 정립을 시도하였다.

한편 Krupich(1995, p.59)는 '학교 수학문제는 다른 문제들과 마찬가지로, 주관적인 정보와 객관적인 정보를 운반한다. ...문제에 포함된 객관적인 정보는 문제의 내적구조에 의해 결정된다'고 주장하면서, 수학문제의 내적구조를 문제에 포함된 객관적인 정보와 관련지었다. 그리고 Krupich(1995, pp.59-60)는 '실제 주체가 문제에 대한 주관적인 정보를 추출한다면, 추상적인 주체는 객관적인 정보를 추출할 수 있다. ...추상적인 주체는 객관적인 정보의 장(場)에 있으면서, 풀이의 논리적인 구조의 탐색을 수행한다'고 하였다. 결국 한인기와 Krupich의 연구로부터, 수학문제의 내적구조는 문제에서 주어진 요소들, 문제해결의 논리적 유도관계를 통해 얻어진 요소들을 기본 원소들로 하며, 이들 요소

들의 논리적 관련성, 논리적 구조에 분석의 초점이 맞추어진다는 것을 알 수 있다.

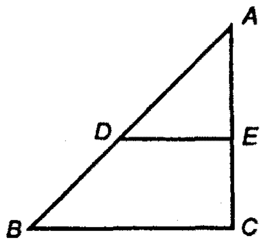
한인기(2001)는 수학문제의 내적구조를 문제요소들의 논리적 연결성에 중심을 두어 수형도로 표현하였으며, Krupich(1995)는 분석-종합적인 탐색수행을 중심으로 글-그림의 형태로 표현하였다. Krupich(1995, pp.115-116)가 내적구조와 관련하여 제시한 예를 하나 살펴보자.

**문제 1**. 삼각형 ABC의 변 AB, AC에 점 D, E를 잡아, 선분 DE가 변 BC와 평행하며, DE=5㎝, BD:DA=2:3이 되도록 하였다(<그림 1>). 선분 BC를 구하여라.

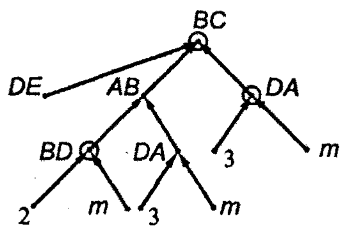
주어진 문제의 해결에 대한 논리적 구조의 분석-종합적인 탐색을 수행하자

1. $BC = \dfrac{DE \cdot AB}{DA}$. 여기서 DE는 알려졌으며, AB와 DA는 알려지지 않음.
2. AB=BD+DA. 여기서 BD와 DA는 알려지지 않음.
3. BD=2m. 여기서 m은 측정의 단위로 잡은 선분임.
4. DA=3m. 여기서 m은 측정의 단위로 잡은 선분임.

구하는 값 BC가 얻어질 수 있으므로, 문제해결의 논리적 구조에 대한 탐색은 종결된다. 문제의 내적구조 규명을 위해 문제해결의 논리적 구조 탐색에 대한 유향그래프를 작도하자. 앞에서의 분석을 이용하여, 다음과 같은 글-그림을 얻을 수 있다(<그림 2>).




<그림 1>




<그림 2>

문제의 내적구조를 나타낸 Krupich의 글-그림에는 간략한 분석-종합적 탐색의 방향만 제시되어 있을 뿐, 문제해결을 위한 논리적인 유도관계들, 사용된 정리들 및 성질들 등에 관해서는 정보가 포함되어 있지 않다.

본 연구에서 분석하는 하수준과 중수준의 수준별 교수-학습 자료들은 문제해결 과정의 길고 짧음이 수준 결정의 중요한 변인이 될 수 있으므로, Krupich와 같은 방식의 문제의 내적구조 분석으로는 충분히 의미로운 결과를 얻지 못할 수도 있다. 그러므로 본 연구에서는 한인기(2001)에 제시된 문제의 내적구조 표현 방법을 보완하여 사용할 것이다.

문제 1의 해결과정에 포함된 논리적 유도관계를 중심으로 내적구조를 분석해 보자. 이를 위해, 우선 문제해결 과정을 체계적으로 기술하자.

① 삼각형 ABC
② D∈AB, E∈AC
③ DE//BC
④ DE=5㎝, BD:DA=2:3
(주어진 것, <그림 1>)

⑤ ∠ADE=∠AED, ∠ABC=∠ACB (①, ③, 평행한 직선에서 동위각의 성질)

⑥ △ADE∽△ABC (⑤, 세 각이 같은 삼각형의 닮음)

⑦ AB:BC=AD:DE (⑥)

⑧ BC=$\frac{5AB}{AD}$ (④, ⑦)

⑨ AB=AD+DB (②)

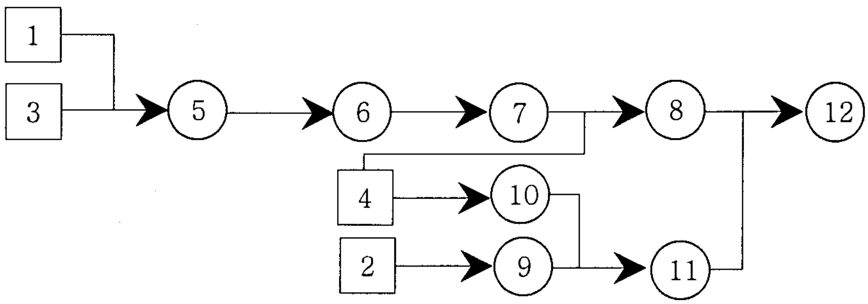
⑩ DB=$\frac{2}{3}$AD (④)

⑪ AB=$\frac{5}{3}$AD (⑨, ⑩)

⑫ BC=$\frac{25}{3}$㎝ (⑧, ⑪)

이제 얻어진 풀이의 요소들을 수형도로 나타내자. 이때 문제해결의 중심 생각인 '선분 BC를 구하기 위해, 닮음인 삼각형들을 생각하여, 이들 삼각형의 변들의 비를 이용한다'는 것을 중심으로 수형도를 만들자(<그림 3>).

문제에서 주어진 것들과 해결과정에서 유도된 것을 구분하기 위해, 주어진 것들은 정사각형 안에 해당하는 번호를 넣으며, 해결과정에서 유도된 것들은 원 안에 번호를 넣는다. 그리고 화살표는 논리적인 유도관계를 나타낸다.




<그림 3>

기술한 것과 같이 문제의 내적구조를 표현하는 방법은 첫째, 문제해결의 주된 틀을 분명하게 표현할 수 있으며(이 문제에서는 ⑤→⑥→⑦→⑧→⑫의 고리가 주된 틀임), 둘째 문제해결을 위해 보조적으로 필요한 정보들(여기서는 ⑨, ⑩, ⑪임)을 분석할 수 있으며, 셋째 문제해결 과정에서 사용된 유도관계의 횟수를 다른 문제들과 쉽게 비교할 수 있다.

## 3. Ziv의 수준별 교수-학습 자료의 내적 구조

지금까지 수학교육에 관련된 다양한 종류의 수준별 교수-학습 자료들이 개발되어 왔다. 일부 자료들은 상수준, 중수준, 하수준의 세 수준으로 나누어져 있으며, 일부 자료들은 네 수준 혹은 그 이상의 수준으로 나누어 다양한 문제들을 제시하고 있다. 학생들의 개인차를 고려한다는 수준별 교육의 취지를 생각하면, 다양한 수준의 교수-학습 자료를 개발, 적용하는 것은 교수학적으로 가치로운 시도가 될 것이다.

이러한 시도와 더불어 고려해야 할 것은 하수준과 중수준, 중수준과 상수준의 문제들이 어떤 차이가 있는가, 어떤 문제들이 하수준 또는 중수준의 문제에 해당하는가에 대한 객관적인 기준이나 관점을 가지고 있어야 한다는 것이다.

Ziv(1995, p.3)는 수준별 교수-학습 자료를 개발하면서, '1유형과 2유형에 속하는 문제들은 가장 약한 학생들을 대상으로 하며, 이것은 최소한의 수준으로 이들 문제의 해결에 대해 3점[1]을 줄 수 있다. 3유형과 4유형은 기본 수준으로, 4점에 해당하는 문제들이다. 5유형과 6유형은 충분히 어려운 문제들로, 가장 재능있는 학생들을 위한 것이다. 7유형과 8유형은 수학동아리를 위한 것으로, 여러분이 이 문제를 시도하여 성공적으로 푼다면 수학의 아름다움에 대해 경험할 수 있을 것'이라고 각 수준별 문제들의 특징을 기술하였다. Ziv는 문제를 4가지 수준으로 나누어 체계적으로 개발된 교수-학습을 제시하였지만, 이들 수준 문제들에 대한 객관적인 기준은 제시하지 않았다.

Gusev & Medyanik(1992, p.4)도 교수학적 자료에 수준별 교수-학습 자료를 제시하면서, '첫 번째 유형의 문제들은 가장 평이하며, 네 번째 유형은 가장 어렵다. 두 번째와 세 번째 유형은 중간 정도의 어려움을 가지며, 이들 두 유형은 거의 동등하며 동시에 다룰 수 있다'고 기술하였지만, Gusev & Medyanik도 Ziv와 마찬가지로, 첫 번째 유형의 문제들이 얼마나, 왜 평이하며, 두 번째 문제가 얼마나, 왜 복잡하고 어려운지에 대해서는 기술하지 않았다.

본 연구에서는 Ziv[2]의 수준별 교수-학습 자료에 제시된 하수준(1유형과 2유형)과 중수준(3유형과 4유형)에 해당하는 도형영역 문제들의 내적구조를 분석하여, 같은 수준 문제들의 공통점, 다른 수준 문제들의 차이점을 논의할 것이다.

---

1) 러시아에서는 시험 결과에 대해, 5점, 4점, 3점, 2점, 1점을 부여하는데, 2점과 1점은 낙제 점수로, 재시험이 부과된다. 시험에서 3점을 받는 것은 해당 과정의 이수를 위한 최소의 성취를 거두었음을 의미한다.

2) Ziv는 레닌그라드국립대학교를 졸업하고, 1950년대부터 계속 중등학교에서 수학을 지도하였으며, Ziv가 저술한 수준별 교수-학습 자료들은 현재 러시아에서 광범위하게 사용되고 있다.

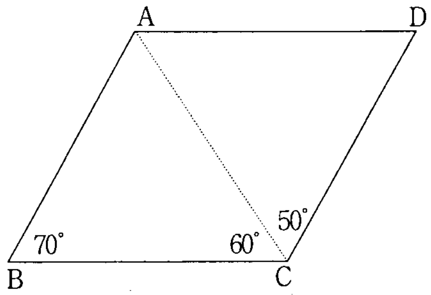
(1) 하수준 문제들의 분석

Ziv(1995, p.131)는 '평행사변형의 조건들'에 관련된 수준별 교수-학습 자료의 1유형에 다음과 같은 증명문제를 제시하였다.

**문제 2.** 볼록사각형 ABCD에서 AB=CD이고, $\angle B=70^\circ$, $\angle BCA=60^\circ$, $\angle ACD=50^\circ$이다. BC=AD를 증명하여라.

문제 2의 내적구조를 분석하기 위해, 풀이과정을 논리적으로 기술하자.

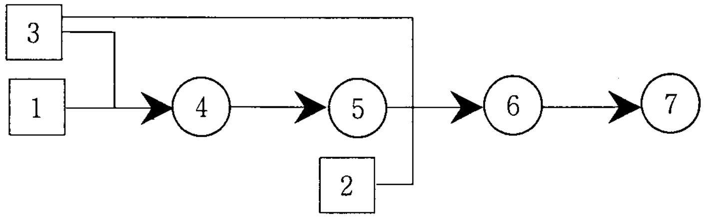
① 볼록사각형 ABCD
② AB=CD
③ $\angle B=70^\circ$, $\angle BCA=60^\circ$, $\angle ACD=50^\circ$
(주어진 것, <그림 4>)




<그림 4>

④ $70^\circ+60^\circ+\angle BAC=180^\circ$ (①, ③, 삼각형의 내각들의 합)
⑤ $\angle BAC=50^\circ$ (④)
⑥ $\triangle ABC\equiv\triangle CDA$ (②, ③, ⑤, SAS 합동조건)
⑦ BC=AD (⑥)

기술한 풀이를 살펴보면, 문제해결의 주된 틀은 BC, AD를 요소로 포함하는 삼각형 ABC, CDA를 생각하여 이들의 합동을 보이는 것임을 알 수 있다. 즉 ④→⑤→⑥→⑦이 문제해결의 주된 틀이 되며, 이로부터 <그림 5>와 같은 문제해결의 내적구조를 얻을 수 있다.




<그림 5>

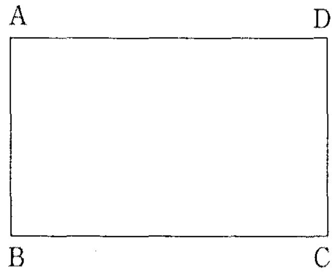
<그림 5>를 살펴보면, 문제해결이 4번의 유도관계를 포함하며, 단선형 구조를 이룬다. 즉 문제에서 주어진 ①, ③으로부터 일차적인 유도관계를 통해 구하는 등식 BC=AD에 이르며, 증명과정에서 추가적인 보조적 요소가 필요하지 않다.

문제 2와 같이 4번의 유도관계로 문제해결이 구성되지만, 해결과정에서 보조요소들이 필요한 문제를 Gusev & Medyanik의 수준별 교수-학습 자료의 하수준 문제에서 찾아볼 수 있다.

**문제 3**. 직사각형의 둘레가 48㎝이다. 변들 사이의 비가 1:2일 때, 직사각형의 변들을 구하여라 (Gusev & Medyanik, 1992, p.9).

문제 3의 내적구조를 분석하기 위해, 풀이과정을 논리적으로 기술하자.

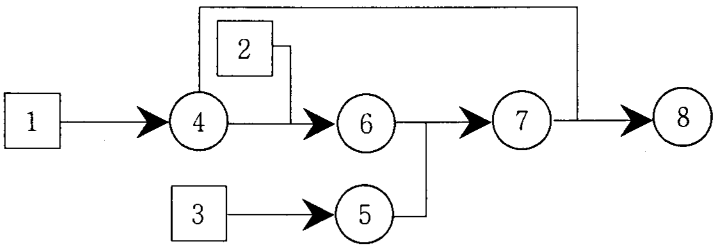
① 직사각형 ABCD
② 둘레 AB+BC+CD+AD=48㎝
③ AB:BC=1:2
(주어진 것, <그림 6>)




<그림 6>

④ AB=CD, BC=AD (①, 직사각형의 대변의 성질)
⑤ BC=2AB (③)
⑥ 2AB+2BC=48㎝ (②, ④)
⑦ AB=8㎝, BC=16㎝ (⑤, ⑥)
⑧ CD=8㎝, AD=16㎝ (⑦, ④)

문제 3에서 문제해결의 주된 틀은 직사각형의 변들이 같다는 성질로부터 등식을 유도하여, 이를 둘레의 식에 연립하여 변들의 길이를 구하는 것이다. 즉 ④→⑥→⑦→⑧이 문제해결의 주된 틀이 되며, 이로부터 <그림 7>과 같은 문제해결의 내적구조를 얻을 수 있다.



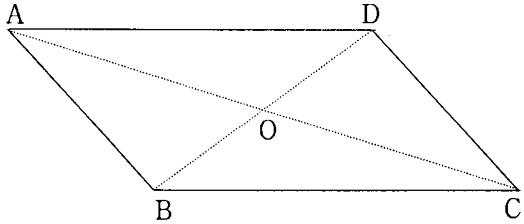

<그림 7>

<그림 7>을 <그림 5>와 비교해 보면, 문제 3의 내적구조는 복선형 구조를 가진다는 것을 알 수 있다. 즉 ⑦을 유도하기 위해, 보조요소 ⑤를 ③으로부터 얻어야 한다. <그림 7>에서 ④는 ⑥을 유도하기 위해서도 쓰이지만, ⑧을 유도하기 위해서도 중복적으로 사용되고 있다. 4개의 유도관계를 가지면서 복선형 구조를 가진 다른 하수준 문제를 살펴보자.

**문제 4**. 사각형 ABCD에서 AB//CD, BC//AD, AC=20cm, BD=10cm, AB=13cm이다. 사각형의 대각선들이 점 O에서 교차한다. 삼각형 COD의 둘레를 구하여라(Ziv, 1995, p.129).

① 사각형 ABCD
② AB//CD, BC//AD
③ AC=20cm, BD=10cm, AB=13cm
④ O: 사각형 ABCD의 대각선 AC, BD의 교점

(주어진 것, <그림 8>)

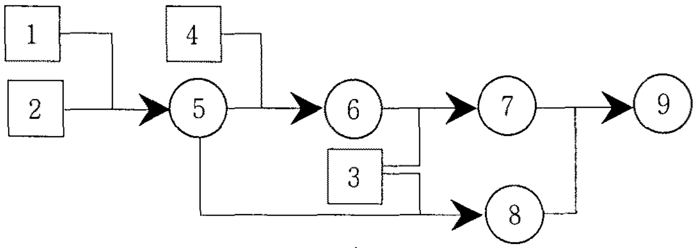



<그림 8>

⑤ 사각형 ABCD: 평행사변형 (①, ②, 평행사변형의 정의)
⑥ CO=½AC, OD=½BD (④, ⑤, 평행사변형의 대각선의 성질)
⑦ CO=10cm, OD=5cm (③, ⑥)
⑧ CD=AB=13cm (③, ⑤, 평행사변형의 대변의 성질)
⑨ 삼각형 COD의 둘레 CO+OD+CD=28cm (⑦, ⑧)

문제 4에서 문제해결의 주된 틀은 주어진 사각형이 평행사변형임을 보인 다음, 평행사변형의 대각

선의 성질을 이용하여 삼각형의 변들의 길이를 구해 둘레를 구하는 것이다. 즉 ⑤→⑥→⑦→⑨가 문제해결의 주된 틀이 되며, 이로부터 <그림 9>와 같은 문제해결의 내적구조를 얻을 수 있다.



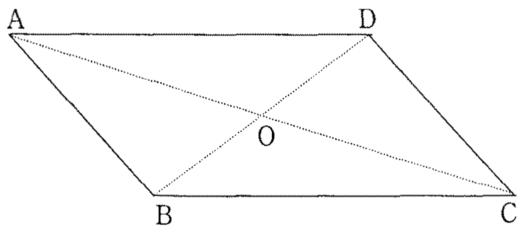

<그림 9>

<그림 9>의 내적 구조를 분석해 보면, 복선형 구조이며, 특히 ⑤는 ①과 ②로부터 유도되지만, 다시 ⑥과 ⑧의 유도를 위해 사용된다. 이제 5개의 유도관계를 가지는 하수준 문제를 살펴보자.

**문제 5.** 사각형 ABCD에서 AB//CD, BC//AD이고, 대각선들의 교점을 O라 하자. 삼각형 AOD의 둘레는 25㎝, AC=16㎝, BD=14㎝이다. BC를 구하여라(Ziv, 1995, p.129).

① 사각형 ABCD
② AB//CD, BC//AD
③ O: 사각형 ABCD의 대각선 AC, BD의 교점
④ 삼각형 AOD의 둘레 AO+OD+AD=25㎝
⑤ AC=16㎝, BD=14㎝

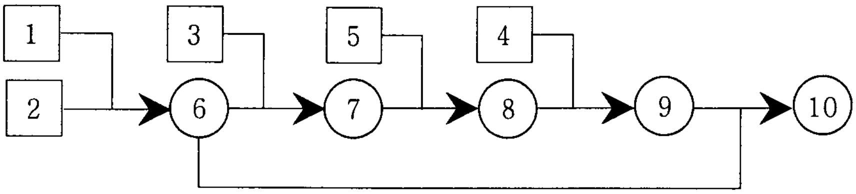
(주어진 것, <그림 10>)




<그림 10>

⑥ 사각형 ABCD: 평행사변형 (①, ②, 평행사변형의 정의)
⑦ AO=$\frac{1}{2}$AC, OD=$\frac{1}{2}$BD (③, ⑥, 평행사변형의 대각선의 성질)
⑧ AO=8㎝, OD=7㎝ (⑤, ⑦)
⑨ AD=10㎝ (④, ⑧)
⑩ BC=10㎝ (⑥, ⑨, 평행사변형의 대변의 성질)

문제 5에서 문제해결의 주된 틀은 주어진 사각형이 평행사변형임을 보인 다음, 평행사변형의 대각선의 성질을 이용하여 삼각형의 변들의 길이, 둘레를 이용해 평행사변형의 변의 길이를 구하는 것이다. 즉 ⑥→⑦→⑧→⑨→⑩이 문제해결의 주된 틀이 되며, 이로부터 <그림 11>과 같은 문제해결의 내적구조를 얻을 수 있다.



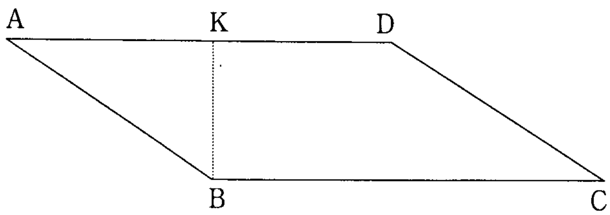

<그림 11>

문제 4와 문제 5를 비교하였을 때에 한 가지 흥미로운 사실은 문제 5가 문제 4의 역으로 간주될 수 있지만, 이들 문제의 해결을 분석해 보면 사용된 유도관계의 횟수, 보조요소의 유무에서 차이가 나며, 문제의 내적 구조도 일치하지 않는다는 점이다. 이제 5개의 유도관계를 가지며 복선형 구조를 가지는 문제를 살펴보자.

**문제 6**. 각 A가 예각인 평행사변형 ABCD의 꼭짓점 B로부터 직선 AD에 수선 BK를 그었고, $BK=\frac{1}{2}AB$이다. $\angle C$와 $\angle D$를 구하여라(Ziv, 1995, p.129).

① 평행사변형 ABCD
② 각 A: 예각
③ BK: 꼭짓점 B로부터 직선 AD에 그은 수선
④ $BK=\frac{1}{2}AB$

(주어진 것, <그림 12>)



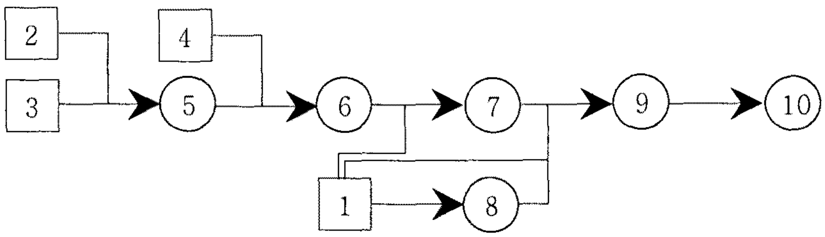

<그림 12>

⑤ 삼각형 ABK: 직각삼각형 (②, ③)
⑥ $\angle A=30^\circ$ (④, ⑤, 한 각이 $30^\circ$인 직각삼각형[3])
⑦ $\angle A=\angle C=30^\circ$ (①, ⑥, 평행사변형의 대각의 성질)

3) 이 성질은 이전 학년에서 정리로 다루었음.

⑧ ∠B=∠D (①, 평행사변형의 대각의 성질)
⑨ 2∠C+2∠D=360° (①, ⑦, ⑧, 사각형의 내각들의 합)
⑩ ∠D=150° (⑨)

문제 6에서 문제해결의 주된 틀은 직각삼각형의 성질을 이용하여 각을 구한 다음, 평행사변형의 대각의 성질, 사각형의 내각의 합을 이용하여 평행사변형의 각의 크기를 구하는 것이다. 즉 ⑤→⑥→⑦→⑨→⑩이 문제해결의 주된 틀이 되며, 이로부터 그림 13과 같은 문제해결의 내적구조를 얻을 수 있다.



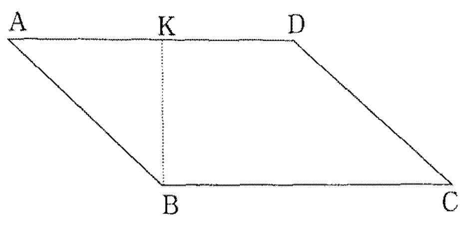

<그림 13>

문제 6은 5개의 유도관계를 가지며 복선형 구조를 가진다. 즉 보조요소 ⑧은 ①로부터 유도되며, ⑨를 유도하기 위해 보조요소로 사용된다. 같은 개수의 유도관계를 가지지만 단선형 구조를 가지는 문제 5와 복선형 구조를 가지는 문제 6에 대한 학생들의 문제해결 결과에 대해서는 실제적인 방법으로 추가적인 연구가 필요할 것이다. 이제 더 많은 유도관계를 포함하는 하수준 문제를 살펴보자.

**문제 7.** 각 A가 예각인 평행사변형 ABCD가 주어졌다. 꼭짓점 B로부터 직선 AD에 수선 BK를 그었고, AK=BK이다. ∠C와 ∠D를 구하여라(Ziv, 1995, p.129).

① 평행사변형 ABCD
② 각 A: 예각
③ BK: 꼭짓점 B로부터 직선 AD에 그은 수선
④ AK=BK

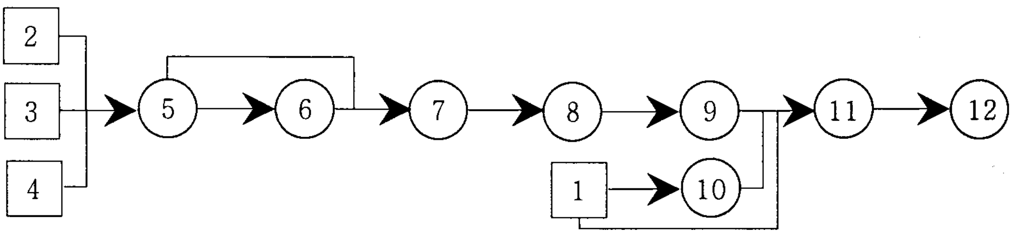
(주어진 것, <그림 14>)




<그림 14>

⑤ 삼각형 ABK: 직각이등변삼각형 (②, ③, ④)
⑥ $\angle ABK=\angle A$ (⑤)
⑦ $90^\circ+2\angle A=180^\circ$ (⑤, ⑥, 삼각형의 내각들의 합)
⑧ $\angle A=45^\circ$ (⑦)
⑨ $\angle A=\angle C=45^\circ$ (⑧, 평행사변형의 대각의 성질)
⑩ $\angle B=\angle D$ (①, 평행사변형의 대각의 성질)
⑪ $2\angle C+2\angle D=360^\circ$ (①, ⑨, ⑩, 사각형의 내각들의 합)
⑫ $\angle D=135^\circ$ (⑪)

문제 7의 해결과정에서는 직각삼각형의 내각의 크기의 합, 평행사변형의 대각의 성질, 사각형의 내각들의 합에 관한 성질이 이용되었다. 문제해결 과정을 수형도를 이용하여 나타내면, <그림 15>와 같이 7개의 유도관계를 가지며 보조요소를 가지는 복잡한 내적구조를 얻게 된다.




<그림 15>

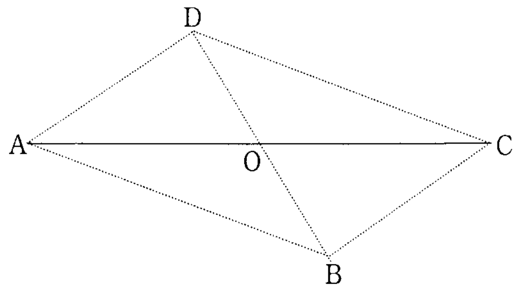
문제 2-7은 하수준에 속하는 계산 또는 증명문제들로, 문제해결의 주된 틀에 4-7개의 유도관계를 포함하는 내적구조를 가진다. 내적구조의 분석과 관련하여 한 가지 언급할 것은, 내적구조는 문제해결의 주된 틀, 유도관계들, 보조요소들을 중심으로 분석하며, 사용된 유도관계의 비정형성 수준, 문제해결을 위한 주된 틀의 비정형성 수준의 분석은 포함되지 않는다는 점이다. 그러므로 내적구조의 분석을 통한 수준별 문제들의 특성파악은 정형적인 문제들을 주로 관련되는 하수준 문제들과 중수준 문제들에서 의미로운 결과를 얻을 수 있을 것으로 생각된다.

한편 문제 1은 문제해결의 주된 틀이 5개의 유도관계를 가지며, 복선형 구조를 가지는 계산문제이다. 그리고 문제해결이 원천적인 수학적 발명을 포함하지 않는 정형적인 수준에서 이루어지므로, 하수준의 문제로 분류될 수 있다. 이제 하수준에 속하는 증명문제를 하나 살펴보자.

**문제 8.** 지름이 AC인 원의 중심이 선분 BD의 중점과 일치한다. 점 A, B, C, D가 한 직선에 속하지 않을 때, $\angle ABC=\angle ADC$임을 증명하여라(Ziv, 1995, p.131).

① 지름이 AC인 원
② O: 원의 중심
③ O: 선분 BD의 중점
④ 점 A, B, C, D는 한 직선에 속하지 않음

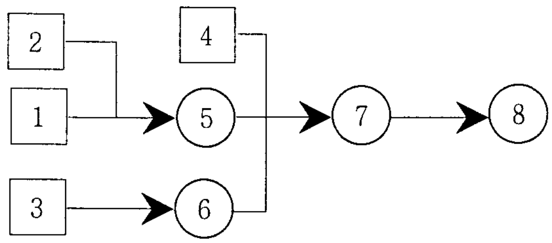
(주어진 것, <그림 16>)



<그림 16>

⑤ AO=OB (①, ②)
⑥ OD=OB (③)
⑦ 사각형 ABCD: 평행사변형 (④, ⑤, ⑥)
⑧ ∠ABC=∠ADC (⑦, 평행사변형의 대각의 성질)

수준별 교수-학습 자료에서 증명문제는 중수준으로 분류되는 경우가 많다. 문제 8의 증명과정을 분석하면, 문제의 주어진 것들로부터 주어진 도형이 평행사변형이 된다는 것을 보인 다음, 평행사변형의 대각의 성질을 이용하여 구하는 등식을 증명하였다. 문제해결의 주된 틀은 ⑤→⑦→⑧과 같이 3개의 유도관계로 이루어졌으며, ⑥이 보조요소로 사용되었다.



<그림 17>

살펴본 바와 같이, 하수준의 문제들은 문제해결의 주된 틀에서 4-7개 정도의 유도관계를 가지는 계산문제나 간단한(유도관계의 개수가 작은) 증명문제로 특징지울 수 있다. 이들 유도관계의 개수는 문제해결에 사용된 정리들의 개수와 밀접하게 관련되므로, 유도관계의 개수의 증가는 문제해결에 다

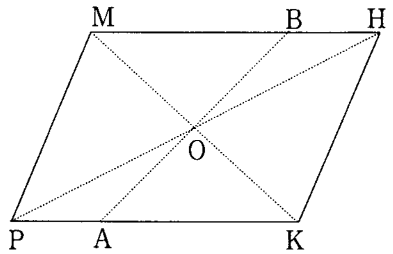
양한 정리들이 사용되어 문제해결이 더 복잡해진다는 것을 의미할 수 있다. 즉 정형적인 수준의 문제에서 유도관계 개수의 증가는 하수준의 문제에서 중수준의 문제로의 옮김으로 이어질 수 있다.

(2) 중수준 문제들의 분석

**문제 9**. 사각형 MPKH에서 ∠PMK=∠HKM, PK//MH이다. 대각선들의 교점을 지나 변 PK, MH와 점 A, B에서 교차하는 직선을 그었다. AP=HB를 증명하여라(Ziv, 1995, p.129).

① 사각형 MPKH
② ∠PMK=∠HKM
③ PK//MH
④ A∈PK, B∈MH
⑤ O: 대각선 MK, PH의 교점
⑥ 직선 AOB

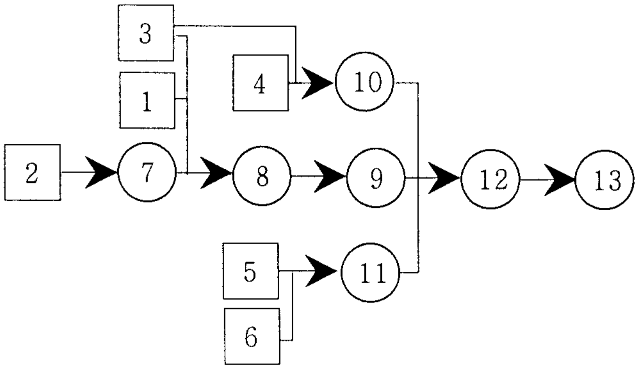
(주어진 것, <그림 18>)




<그림 18>

⑦ MP//HK (②, 엇각에 의한 두 직선의 평행)
⑧ 사각형 MPKH: 평행사변형 (①, ③, ⑦, 평행사변형의 정의)
⑨ PO=HO (⑧, 평행사변형의 대각선의 성질)
⑩ ∠APO=∠BHO (③, 평행한 직선에서 엇각의 성질)
⑪ ∠AOP=∠BOH (⑤, ⑥, 맞꼭지각의 성질)
⑫ △AOP≡△BOH (⑨, ⑩, ⑪, ASA 합동조건)
⑬ AP=HB (⑫)

문제 9의 해결과정에서는 주어진 도형이 평행사변형임을 보인 다음, 평행사변형의 성질을 이용하여 삼각형의 합동을 보여 AP=HB임을 증명하였다. 즉 문제해결의 주된 틀은 ⑦→⑧→⑨→⑫→⑬이며, 문제해결의 내적구조는 <그림 19>와 같다.



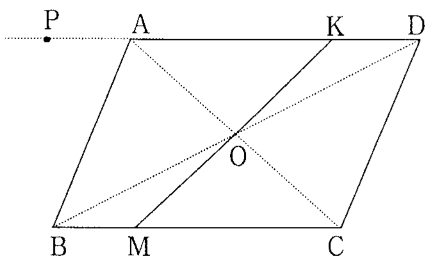

<그림 19>

문제 9는 중수준의 문제에 포함되는 전형적인 증명문제로, 문제해결의 주된 틀에 5개의 유도관계를 포함하며, 복선형 구조를 가진다. 즉 ⑩, ⑪이 문제의 주어진 것들로부터 보조요소로 유도되며, 이를 바탕으로 ⑫가 유도된다. 문제 9와 유사한 도형을 다루지만, 다른 내적구조를 가지는 문제 10을 살펴보자.

**문제 10**. 사각형 ABCD에서 ∠A+∠B=180°, AB//CD이다. 변 BC, AD에 BM=KD가 되도록 점 M, K를 잡았다. 점 M, K는 사각형의 대각선의 교점으로부터 같은 거리만큼 떨어져있다는 것을 증명하여라(Ziv, 1995, p.129).

① 사각형 ABCD
② ∠A+∠B=180°
③ AB//CD
④ M∈BC, K∈AD
⑤ BM=KD
⑥ O: 대각선 AC, BD의 교점

(주어진 것, <그림 20>)

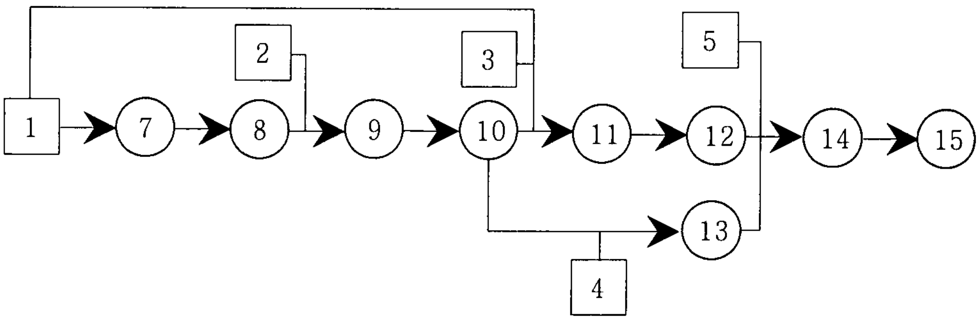



<그림 20>

⑦ 변 DA의 연장선에 점 P를 잡는다. (①)

⑧ $\angle A+\angle PAB=180^\circ$ (⑦)
⑨ $\angle PAB=\angle B$ (②, ⑧)
⑩ AD//BC (⑨, 엇각이 같은 직선들의 평행성)
⑪ 사각형 ABCD: 평행사변형 (①, ③, ⑩)
⑫ BO=OD (⑪, 평행사변형의 대각선의 성질)
⑬ $\angle ODK=\angle OBM$ (④, ⑩, 평행한 직선에서 엇각의 성질)
⑭ $\triangle OBM\equiv\triangle ODK$ (⑤, ⑫, ⑬, SAS 합동조건)
⑮ OM=OK (⑭)

문제 10에서는 선분 OM, OK가 같다는 것을 증명하기 위해, 삼각형의 합동, 평행사변형의 대각선의 성질, 엇각의 성질 등을 이용하였다. 문제해결의 주된 틀은 ⑦→⑧→⑨→⑩→⑪→⑫→⑭→⑮이며, 8개의 유도관계로 구성된 증명문제이다. 문제 10의 내적구조를 자세히 기술하면, <그림 21>과 같다.

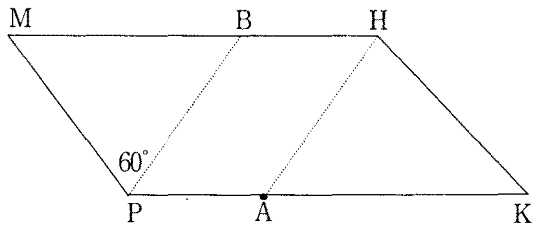



<그림 21>

문제 9와 10에서 보는 바와 같이, 중수준의 문제에는 문제해결의 주된 틀에 5개 이상의 유도관계를 포함하는 증명문제가 속한다. 하수준의 증명문제와 문제의 내적구조를 비교했을 때, 중수준의 문제들은 문제해결의 주된 틀에 사용된 유도관계의 개수에서 차이가 난다는 것을 알 수 있다. 중수준에 속하는 계산문제를 살펴보자.

**문제 11.** 평행사변형 MPKH의 변 PK, MH에 MP=PB=AK, $\angle MPB=60^\circ$가 되도록 점 A, B를 잡았다. 평행사변형의 각들을 구하고, 선분 BM과 AH를 비교하여라(Ziv, 1995, p.129).

| | |
|---|---|
| ① 평행사변형 MPKH<br>② $A\in PK$, $B\in MH$<br>③ MP=PB=AK<br>④ $\angle MPB=60^\circ$ | (주어진 것, <그림 22>) |




<그림 22>

우선 평행사변형의 각들을 구하자.

⑤ 점 P, B를 연결하면, 삼각형 PMB는 PM=PB인 이등변삼각형 (②, ③)

⑥ ∠MPB+∠M+∠PBM=180° (⑤, 삼각형의 내각들의 합)

⑦ ∠M=∠PBM (⑤)

⑧ ∠M=∠PBM=60° (④, ⑥, ⑦)

⑨ ∠K=60° (①, ⑧, 평행사변형의 대각의 성질)

⑩ ∠P+∠H+∠M+∠K=360° (①, 평행사변형의 내각들의 합)

⑪ ∠P=∠H (①, 평행사변형의 대각의 성질)

⑫ ∠P=∠H=120° (⑧, ⑨, ⑩, ⑪)

이제 선분 BM과 AH를 비교하자.

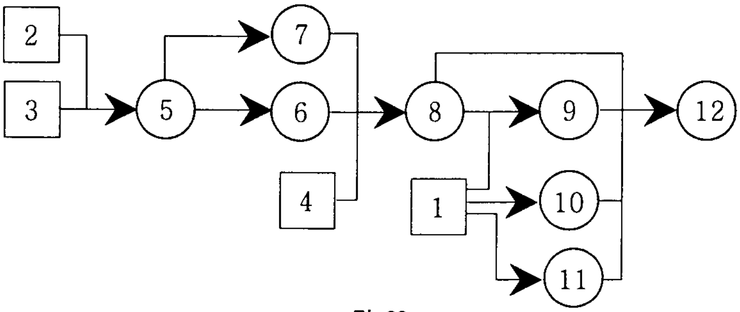
⑬ 점 A, H를 연결하여 삼각형 KAH를 생각하자. (②)

⑭ KH=PM (①, 평행사변형의 대변의 성질)

⑮ △PMB≡△KHA (③, ④, ⑨, ⑬, ⑭, SAS 합동조건)

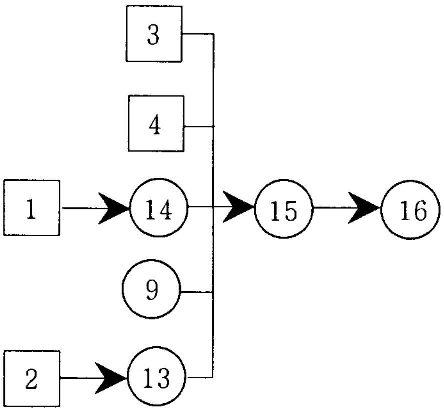
⑯ BM=AH (⑮)

문제 11은 평행사변형의 각들을 구하는 문제와 선분 BM과 AH를 비교하는 문제로 구성되어 있다. 이들 각각의 문제는 하수준에 포함될 수 있지만, 이들을 결합하여 중수준에 제시하였다. 우선 평행사변형의 각들을 구하는 문제는 문제해결의 주된 틀에 5개의 유도관계를 포함하며, 이 문제의 내적구조는 <그림 23>과 같다.




<그림 23>

한편 선분 BM과 AH를 비교하는 문제는 평행사변형의 각들을 구하는 문제에서 얻어진 요소 ⑨를 보조요소로 포함하며, <그림 24>와 같은 내적구조를 가진다.

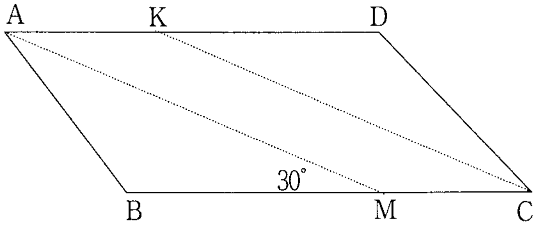



<그림 24>

이제 문제 11과 유사한 내적구조를 가지는 다음 문제를 살펴보자.

**문제** 12. 평행사변형 ABCD의 변 BC, AD에 AB=BM=KD, $\angle AMB=30^\circ$가 되도록 점 M, K를 잡았다. 평행사변형의 각들을 구하고, 선분 AM과 CK를 비교하여라(Ziv, 1995, p.129).

| | |
|---|---|
| ① 평행사변형 ABCD<br>② $M \in BC$, $K \in AD$<br>③ AB=BM=KD<br>④ $\angle AMB=30^\circ$ | (주어진 것, <그림 25>) |




<그림 25>

우선 평행사변형의 각들을 구하자.

⑤ 삼각형 BAM은 BA=BM인 이등변삼각형 (②, ③)

⑥ $\angle BAM + \angle B + \angle AMB = 180^\circ$ (⑤, 삼각형의 내각들의 합)

⑦ $\angle BAM = \angle ABM$ (⑤)

⑧ $\angle B = 120^\circ$ (④, ⑥, ⑦)

⑨ $\angle D = 120^\circ$ (①, ⑧, 평행사변형의 대각의 성질)

⑩ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ (①, 평행사변형의 내각들의 합)

⑪ $\angle A = \angle C$ (①, 평행사변형의 대각의 성질)

⑫ $\angle A = \angle C = 60^\circ$ (⑧, ⑨, ⑩, ⑪)

이제 선분 BM과 AH를 비교하자.

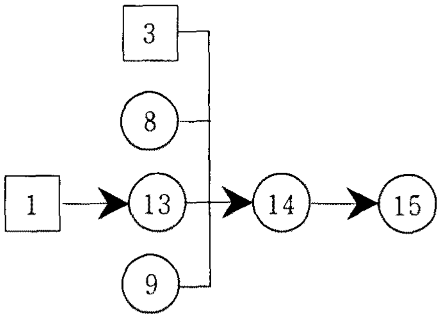
⑬ AB=DC (①, 평행사변형의 대변의 성질)

⑭ $\triangle BAM \equiv \triangle DCK$ (③, ⑧, ⑨, ⑬, SAS 합동조건)

⑮ AM=CK (⑭)

문제 12는 평행사변형의 각들을 구하는 문제와 선분 BM과 AH를 비교하는 문제로 구성된다. 문제 12에서 각을 구하는 문제를 문제 11과 비교했을 때 흥미로운 점은 문제해결 과정이 일치하지는 않지만, 내적구조가 일치한다는 것이다. 이러한 문제들은 유사한 난이도 또는 유사한 유형의 문제들로 분류될 수 있으며, 학생들에게 숙제를 부과하거나 평가문항 등으로 교수학적 활용가능성이 많다.

한편 문제 12에서 선분 AM, CK를 비교하는 문제는 문제 11에서 선분 BM, AH를 비교하는 문제와 유사하지만 다른 내적구조를 가진다. 즉 문제 11의 증명에서는 성질 ③, ④, ⑨, ⑬, ⑭로부터 삼각형의 합동이 유도되었지만, 문제 12에서는 성질 ③, ⑧, ⑨, ⑬으로부터 삼각형의 합동이 유도되며, <그림 26>과 같은 내적구조를 가진다.




<그림 26>

살펴본 바와 같이, 중수준의 문제에는 유도관계의 개수가 더 많은 증명문제 또는 계산문제가 속하거나, 하수준의 문제를 하위문제로 가지는 복잡한 문제들이 속하게 된다.

## 4. 결 론

본 연구는 수학교과의 수준별 교수-학습 자료의 이론적 뒷받침에 관련된 문헌연구로, 러시아에서 폭넓게 활용되고 있는 Ziv의 교수학적 자료에 제시된 하수준과 중수준의 수준별 교수-학습 자료들을 수학문제의 내적구조라는 관점에서 분석하였다.

수학문제의 내적구조는 문제에서 주어진 요소들, 문제해결의 논리적 유도관계를 통해 얻어진 요소들을 기본 원소들로 하며, 이들 요소들의 논리적 관련성, 논리적 구조가 표현된다. 그러나 내적구조의 분석에서는 사용된 유도관계의 비정형성 수준, 문제해결을 위한 주된 틀의 비정형성 수준의 분석은 포함되지 않는다. 본 연구에서는 연구의 목적을 달성하기 위해, 문제해결 과정에 대한 상세한 분석, 문제해결의 주된 틀 분석, 문제해결의 보조요소들의 분석을 바탕으로 문제의 내적구조를 수형도를 이용하여 나타냈다.

본 연구에서는 Ziv의 수준별 교수-학습 자료에 제시된 하수준과 중수준에 해당하는 문제들의 내적구조를 분석하였다. 하수준의 문제들은 계산문제와 증명문제로 구성된다. 하수준에 속하는 계산문제들은 문제해결의 주된 틀이 4-7개의 유도관계로 구성되며, 보조요소들을 포함하는 내적구조를 가진다. 그리고 하수준에 속하는 증명문제에서 문제해결의 주된 틀은 계산문제보다는 적은 개수의 유도관계로 구성된다.

한편 중수준의 문제에는 문제해결의 주된 틀에 5개 이상의 유도관계를 포함하는 증명문제가 속하며, 하수준의 증명문제와는 문제해결의 주된 틀에 사용된 유도관계의 개수에서 차이가 났다. 그리고 하수준의 계산문제 또는 수식의 비교문제들을 결합한 복합적인 문제가 중수준의 문제로 사용되기도 하였다.

문제의 내적구조 분석과 관련하여 한 가지 주목할 것은, 풀이과정이 일치하지 않는 두 문제 '평행

사변형 ABCD의 변 BC, AD에 AB=BM=KD, ∠AMB=30°가 되도록 점 M, K를 잡았다. 평행사변형의 각들을 구하여라'와 '평행사변형 MPKH의 변 PK, MH에 MP=PB=AK, ∠MPB=60°가 되도록 점 A, B를 잡았다. 평행사변형의 각들을 구하여라'가 동일한 내적구조를 가진다는 것이다. 유사한 것처럼 보이는 많은 문제들이 동일한 내적구조를 가지지 않았다는 것을 감안하면, 이들 두 문제의 동질성에 대해서는 후속적인 연구가 필요하다. 그리고 다른 수학적 개념에 관련되는 문제들 중에서 동일한 내적구조를 가지는 문제들을 찾고, 이들의 교수학적 공통점을 연구하는 것도 가치로울 것이다.

본 연구의 결과를 바탕으로, 직관적인 수준에서 개발된 수준별 교수-학습 자료들에 대해 객관적이고 학술적인 수준에서 타당성, 동질성을 논의할 수 있을 것으로 기대되며, 수학 교수-학습 자료의 분석에 관련된 새로운 관점을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

## 참 고 문 헌


교육과학기술부 (2008). 중학교 교육과정 해설(III), 서울: 교육과학기술부.

나귀수 · 최승현 (2002). 제7차 교육과정에 따른 수학과 교수학습 방법 및 개발 연구, 서울: 한국교육과정평가원.

박경미 외 (1999). 제7차 교육과정 개정에 따른 수학과 수준별 교육과정 적용 방안과 교수-학습 자료 개발 연구, 서울: 한국교육과정평가원.

이의원 · 김진상 · 이명희 (2001). 단계형 수준별 교육과정과 교재의 재구성 방안, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **12**, pp.125-139.

최승현 (2001). 제7차 교육과정에 따른 수학과 성취기준, 평가기준, 예시도구 개발연구, 서울: 한국교육과정평가원.

최승현 (2004a). 제7차 교육과정의 현장 운영 실태 분석(II), 서울: 한국교육과정평가원.

최승현 (2004b). 수학과 교육과정 실태 분석 및 개선 방향 연구, 서울: 한국교육과정평가원.

최현근 · 황우형 (1997). 수학 수업에서 능력별 반편성의 효율성에 관한 연구, 대한수학교육학회논문집 **7(2)**, pp.303-314.

한인기 (2001). 수학 문제의 구조 규명에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **11**, pp.279-290.

한인기 (2004). 학습자의 개인차를 고려한 수학교과서에 관한 연구 -구세프의 실험 교과서를 중심으로-, 한국학교수학회논문집 **7(1)**, pp.37-48.

한인기 (2008). 수학교육의 차등화에 관련된 러시아의 초창기 연구들의 분석, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **22(2)**, pp.187-209.

황선욱 · 강병개 · 김수영 (2009). 고등학교 수학익힘책, 서울: 좋은책 신사고.

Gusev V. A. & Medyanik A. I. (1992). *Didakticheskie Materialy po Geometrii*, Moskva:

Prosvechenie.

Krupich V. I. (1995). *Teoreticheskie Osnovy Obucheniya Recheniyu Skolnyh Matematicheskih Zadach*, Moskva: Prometei.

Ziv B. G. (1995). *Zadachi k Urokam Geometrii. 7-11 klass*, S.-Peterburg: Mir i semya-95.

# An Analysis of Geometrical Differentiated Teaching and Learning Materials Using Inner Structure of Mathematics Problems

**Han, Inki**

Dept. of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea

E-mail : inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we analyze Ziv's geometrical differentiated teaching and learning materials using inner structure of mathematics problems. In order to analyze inner structure of mathematics problems we in detail describe problem solving process, and extract main frame from problem solving process. We represent inner structure of mathematics problems as tree including induced relations. As a result, we characterize low-level problems and middle-level problems, and find some differences between low-level problems and middle-level problems.

* ZDM Classification : U20

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U23

* Key Words : inner structure of mathematics problem, low-level problem, middle-level problem.