DFT를 사용한 고속 constant modulus algorithm 의 성능분석

Yoon Gi Yang*★, Chang Su Lee**, Soo Mi Yang***
양 윤 기*★, 이 창 수**, 양 수 미***

Abstract

Recently, some frequency domain CMA (Constant Modulus Algorithm) have been introduced in an effort to reduce computational complexities [1,2]. In [1], a fast algorithm that minimizing cost function designed for block input signal is employed, while in [2], a novel cost function that minimizing sample by sample input is used. Although, the two fast algorithm save computational complexities as compared to CMA, the convergence behaviors of the two fast algorithm show different results with repsect to CMA. Thus, in this paper, some analytical results on the error surface of the fast frequency domain CMA are introduced. From the analytical results, we show that the more recent algorithm [2] outperforms the previous algorithm [1]. Simulation results reveals that the recent algorithm [2] shows 50% enhanced convergence with respect to the old fast algorithm [1]. Also, we show that the recent fast algorithm [2] has comparable convergence performance with respect to conventional CMA algorithm.

요 약

최근 블라인드 적응등화기의 주요 알고리듬 중에 하나인 CMA (Constant Modulus Algorithm) 의 주파수 영역의 고속 알고리듬들이 소개되고 있다 [1,2]. 이중에서 [1] 에서는 입력신호를 블록 단위로 처리하는 비용함수를 사용하고, 보다 최근에 제시된 [2] 에서는 매 입력신호마다 목적함수를 최소한 하는 새로운 알고리듬이 소개 되고 있다. 모두다 기존의 알고리듬의 계산량을 줄일 수 있으나, 수렴성에서는 기존의 CMA와 차이가 보여질 것으로 판단된다. 따라서, 본 논문 에서는 이러한 주파수 영역 CMA 의 오차평면과 목적함수에 대한 해석적 분석을 통하여, 최근에 제안된 블라인드 등화 알고리듬 [2] 가 [1] 보다 국소 최소 값에 빠질 확률이 적어서 수렴성이 개선됨을 보인다. 모의실험결과 이전의 고속 알고리듬 보다 50% 이상의 수렴성 개선결과를 보인다. 또한, 동일조건하에 최신 고속 알고리듬이 기존의 CMA 와 동일한 수렴특성을 나타내는 것을 보인다.

Key words : Adaptive signal processing, adaptive equalizer, fast algorithm, performance analysis

I. 연구 배경

CMA 는 통신채널에 훈련신호를 사용하지 않아도 동작할 수 있는 적응 등화기중에 가장 성공한 알고리듬으로 알려져 있다. CMA 는 수신단에서 신호의 크기에 대한 사전정보를 사용한 목적함수를 최소화 하는 것이 곧 채널의 왜곡을 보정할 수 있다는 이론에서 근거한 알고리듬이다. 이는 실제적으로 유선통신 시스템에서 사용될 정도로 그 효용성이 입증 되어 있으며 [3], 블라인드 등화알고리듬으로 가장 많은 연구와 관심을 가져온 알고리듬이기도 하다. 그런데, 몇몇 연구자에 의해서 CMA 의 계산량을 줄일 수 있는 주파수 영역 CMA 알고리듬이 제안되어 왔다 [1,2]. 이 방식은 시간 영역에서의 필터링에 사용되는 계산량을 주파수 영역에서 곱을 사용하여 고속 콘볼류션을 사용함으로써 계산량을 줄인다는 적응필터의 응용을 CMA 알고리듬으로 확장한 것이라고 요약될 수 있다. 그런데, 이러한 알고리듬이 최종적으로 수렴한다는 것을 실험적으로 확인할 수는 있었으나, 실제적으로 수렴속도나 기존의 CMA 가 지니고 있는 근본적인 수렴성 문제 등을 깊게 고찰하지 못한 점이 있다.

* : 수원대학교 정보통신공학과 (Dept. Information and telecommunications, The University of Suwon)
** : 수원대학교 전자공학과 (Dept. Electronics, The University of Suwon)
***: 수원대학교 인터넷정보공학과 (Dept. Internet information engineering, The University of Suwon)
★ 교신저자 (Corresponding author)
接受日:2009年 2月 22日, 修正完了日: 2009年 3月 7日

특히 [1] 에서는 DFT 영역의 Parseval 의 정리를 이용하기 위하여 기존의 CMA 의 목적함수를 변형하여 전개 하였는데, 이러한 방식이 약간의 수렴성에 문제를 발생 시킬 수 있다는 지적이 있어왔다 [1,2]. 따라서, 본 논문에서는 이를 보다 해석적으로 분석하여 이 두 알고리듬의 차이를 해석하는 것이 의미가 있을 것이다. 이러한 접근은 잘 알려진 선형 적응 필터의 주파수 영역 알고리듬 FBLMS (frequency domain block least mean squares) 의 성능을 분석한 [4] 의 접근법과 유사하다고 할 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 최근에 제시된 두가지의 주파수 영역 CMA 알고리듬의 수렴성을 분석하는 것을 주요 목표로 한다. 또한 본 논문에서는 최근에 제안된 [2] 에서 제시된 알고리듬이 [1] 에서 제시된 알고리듬에 비해서 국소 최소값에 빠질 확률이 적어서 등화기의 수렴성이 우수해 진다는 것을 보인다. 또한, 컴퓨터 모의실험결과 [2] 는 기존의 CMA 알고리듬과 동일한 채널에 대해서 동일한 수렴특성을 보임을 증명하였다.

II. CMA 및 주파수 영역 고속 알고리듬들

현재까지 가장 광범위하게 사용되고 있는 블라인드 적응 알고리듬은 Godard 가 제안한 CMA 이다 [3]. CMA 는 비선형 오차함수를 사용한 알고리듬으로서, 그림 1 에 CMA 의 개요도가 제시되어 있다. CMA 에서 등화기의 계수는 등화기의 출력신호를 y[n] 라고 할 때 비용함수

$$J_{CM} = E\{(|y[n]|^2 - R_2)^2\} \tag{1}$$

를 최소화 하는데, 전형적인 CMA 등화기의 계수적응은 시간 k 에서 매 입력신호 마다

$$y[k] = \sum_{m=0}^{M-1} c_k[m]x[k-m] \tag{2}$$
$$c_{k+1}[n] = c_k[n] + \mu y^*[k]x[k-n](R_2 - |y[k]|^2)$$

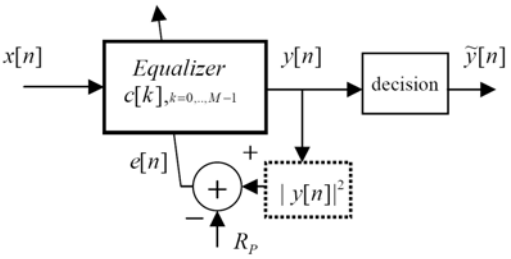


Fig. 1. Schematic diagram of CMA
그림 1. CMA 의 개요도

와 같이 이루어진다. 그런데, 최근의 고속 대용량의 전송 시스템의 경우 심볼 전송율이 상당히 높으므로, 실시간 구현을 위한 고속 알고리듬이 요구되고 있다. 예를들어 [5] 에서는 256 차의 적응등화기를 6 MHz 의 심볼율로 동작시키는 블라인드 등화기를 제시하였는데, 이를 실시간으로 구현하려면 초고속의 하드웨어가 필요하다.

이러한 CMA 를 DSP 의 이론 중에 하나인 주파수 영역에서 고속 컨볼류션을 사용한 적응 알고리듬이 제안되었다. [1] 에서는 CMA 의 비용함수인 식 (1) 을 시간영역에서 블록으로 처리하고 이를 Fourier 변환의 Parseval 정리를 이용한 적응 알고리듬을 제시하였다. 이를 통하여 상당부분의 계산량 절감 효과를 얻을 수 있었다.

그 이후 [2] 에서는 [1] 에서 제시한 방식이 시간영역에서 신호의 통계적인 정보를 충분히 사용하지 못한 점에 착안하여 시간영역에서 각각의 입력 신호에 대한 비용함수를 최소화하는 적응 알고리듬을 주파수 영역의 계수에 대한 적응식을 유도하였다. 이러한 방식은 [1] 의 방식에 비해서 정성적으로 우수한 수렴성이 있을 것이라고 판단되는데, 본 논문에서는 이를 좀 더 분석적으로 다루려고 한다.

먼저 [1] 에서 제시된 알고리듬에 대해서 간단히 설명하자. 그림 2 에는 이러한 BMCA (block CMA) 의 블록선도가 제시되어 있고, 이를 사용한 알고리듬을 간단히 BCMA based FBCMA (old-FBCMA) 라고 하자.

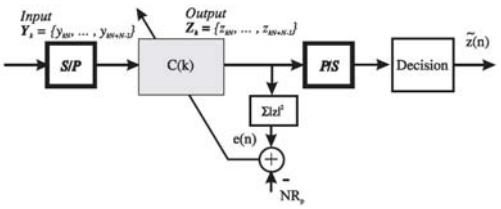


Fig. 2. Schematic diagram of BCMA
그림 2. Block CMA 의 블록선도

블록 CMA 는 입력신호를 L 개의 블록 신호로 만들고 이에 대한 비용함수를 정의 하여 이를 통한 블라인드 등화를 이루는 알고리듬이다. 그림 2 에 블록 CMA 가 제시되어 있다. 먼저 시간영역에서 이러한 블록 CMA 가 어느 정도 동작한다고 보이고 이를 Parseval 의 정리를 사용한 주파수 영역에서의 비용함수를 정의하여 고속알고리듬을 유도한 것이다. 그림에서 수신신호 $\{x_k\}$ 는 L 개씩 블록으로 모아져서 입력블록 $X=(x_0,x_1,\cdots,x_{L-1})^t$ 를 구성한다. 또한 k 번째의 출력 블록은 $Y=(y_0,y_1,\cdots,y_{L-1})^t$ 이고, k 번째 블록 update 에서 등화기의 계수는 $\boldsymbol{C(k)}=(c_0(k),c_1(k),\cdots,c_{M-1}(k))^t$ 이다. 등화기의 계수는 각각의 블록 입력에 대해서 BCMA 의 비용함수 J_{CM}^L 를 최소화 하는데 이는

$$J_{CM}^L=E\left\{(\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}|y_i|^2-R_2)^2\right\} \tag{3}$$

과 같이 정의 된다. 이러한 비용함수를 최소화 하는 적응알고리듬은 비용함수의 계수에 대한 경사도(gradient)를 계산하여 얻어지는데, 이를 다시 간단하게 정리하기 위하여

$$\frac{\partial E\left\{\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}|y_i|^2-R_2\right\}}{\partial c_m(k)}=\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}x_{i-m}^*y_i, \tag{4}$$

임을 이용하면, $\frac{\partial J_{CM}^L}{\partial c_m(k)}$ 을 적용한 계수 적응식은

$$c_m(k+1)=c_m(k)+2\mu(R_2-\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}|y_i|^2)(\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}x_{i-m}^*y_i) \tag{5}$$

과 같다.

한편, [2] 에서는 위 방식에서 사용된 알고리듬이 각 심볼 주기로 입력되는 신호에 대한 적응을 하지 않음으로써 발생될 수 있는 성능의 저하를 개선하기 위하여 새로운 적응 알고리듬을 주파수 영역의 계수에 대해서 확장한 식을 유도 하였다. 이 알고리듬은 [1] 에서 Parseval 정리를 사용하기 위하여 새로운 목적함수를 정의하여 사용한 것과는 다르게, 기존의 CMA 의 목적함수를 그대로 사용하여 수렴을 보장하자는 기본적인 아이디어에서 출발한 것이다.

그림 3 에는 이러한 새로운 FBCMA (frequency domain block constant modulus algorithm, new-FBCMA) 의 블록선도가 제시되어 있다. 이러한 방식에서는 주파수 영역에서 선형필터링을 구현할 수 있는 알고리듬 중에 하나인 overlap save 방식을 사용하였다.

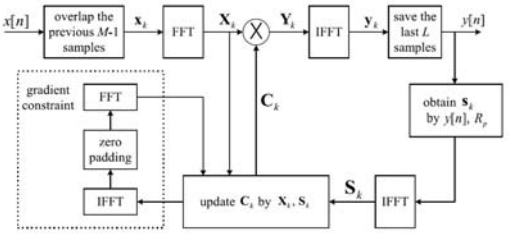


Fig. 3. Block diagram of the new FBCMA
그림 3. 새로운 FBCMA 의 블록선도

Overlap save 방식에서 시간영역에서의 필터의 길이를 M 이라하고, 시간 영역에서의 적응필터의 계수는 M 차의 FIR 필터라 할때, 이를 후반에 0 을 채워 놓은 벡터를 $\boldsymbol{c_k}=(c_k[0],\cdots,c_k[M-1],0,\cdots,0)$ 이라고 하자.

이제 입력의 길이 N 인 블록 데이타를 처리한다고 하자. 그러면, 수신신호 x[n]은 $\boldsymbol{x_k}=(x[kL-(M-1)],\cdots,x[kL-1],x[kL],\cdots,x[kL+L-1])^t$ 과 같이 이전 블록의 후단의 (M-1) 심볼을 중복하고, 새로운 L 개의 심볼을 첨가하여 전체적으로 길이가 N 인 블록을 만든다. 이를 N-point FFT 를 수행한 주파수 영역 수신신호

$\boldsymbol{X_k}=(X[kN], X[kN+1], \cdots, X[kN+N-1])^t$ 는 $\boldsymbol{X_k}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x_k}$ 가 되는데, $\boldsymbol{F}$ 는 N-point DFT 를 표현하는 $N\times N$ 크기의 행렬이다.

DFT 영역에서의 길이 N 의 출력신호 벡터 $\boldsymbol{Y_k}=(Y[kN], Y[kN+1], \cdots, Y[kN+N-1])^t$ 는 $\boldsymbol{X_k}$ 와 DFT 영역의 N-point 계수 벡터 $\boldsymbol{C_k}$, $\boldsymbol{C_k}=(C_k[0], C_k[1], \cdots, C_k[N-1])^t$ 의 곱으로부터 얻어지는데, $\boldsymbol{C_k}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{c_k}$ 이다. DFT 영역의 출력 $Y[kN+m]$ 은 $Y[kN+m]=C_k[m]X[kN+m]$ 과 같이 주어진다. 시간영역에서의 출력결과를 얻기 위해서는 다음과 같이 $\boldsymbol{Y_k}$ 의 N-point IDFT 를 취한다. 즉 $\boldsymbol{y_k}=\boldsymbol{F^{-1}}\boldsymbol{Y_k}$ 인데, 여기서 $\boldsymbol{y_k}$ 는 시간 영역상의 출력 벡터로 $\boldsymbol{y_k}=(y[kN], y[kN+1], \cdots, y[kN+N-1])^t$ 와 같이 주어진다.

그런데, 시간 영역상의 선형필터의 결과를 얻기 위해서는 circular convolution 의 영향을 제거하기 위하여 시간영역의 출력 $\boldsymbol{y_k}$ 의 후반 L=N-M-1 개의 신호 $(y[kN+M], \cdots, y[kN+N-1])$ 의 신호만 사용되고 앞의 M 개의 신호는 버려지게 된다.

이제 DFT 영역에서의 CMA 의 목적함수를 최소화 시키는 적응방정식을 유도하여 보자. 식을 간단히 하기 위하여 k 번째의 입력신호, 출력신호의 첨자 k 를 제거한 식으로 간단히 하도록 하자. 시간 영역의 CMA 의 목적함수를 출력 $(y[M], \cdots, y[N-1])$ 에 대한 제한조전으로 다시 쓰면

$$\begin{aligned} J_M &= E\{(R_p-|y[M]|^2)^2\} \\ J_{M+1} &= E\{(R_p-|y[M+1]|^2)^2\} \\ &\vdots \\ J_{N-1} &= E\{(R_p-|y[N-1]|^2)^2\} \end{aligned} \quad (6)$$

과 같다. DFT 영역에서의 제한조건으로 고쳐 쓰게 위해 DFT 관계식을 사용하면 DFT 영역의 계수 $\boldsymbol{C_k}$ 의 적응이 위와 같은 목적함수를 최소화 시키는 방향으로 이루어지면 된다. 따라서, J_M 과 $\boldsymbol{C_k}$ 과의 함수관계를 밝혀 이 함수의 gradient 를 구하면 되는데, 이는

$$\frac{\partial J_M}{\partial C_k[n]}=-2E\{(R_p-|y[M]|^2)\}\frac{\partial |y[M]|^2}{\partial C_k[n]}, \quad n=0,\cdots,N-1 \quad (7)$$

과 같다. 이제 $\frac{df(x)g(x)}{dx}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 임을 이용하면

$$\begin{aligned} y[M] &= \sum_{n=0}^{N-1} C_k[n]X[n]W_N^{Mn} \\ |y[M]|^2 &= (\sum_{n=0}^{N-1} C_k[n]X[n]W_N^{Mn})(\sum_{n=0}^{N-1} C_k[n]X[n]W_N^{Mn})^* \end{aligned} \quad (8)$$

과 같다. 이제 J_M 에 대한 gradient 는

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_M}{\partial C_k[n]} &= -2E\{(R_p-|y[M]|^2)\} \\ &\cdot \{X[n]W_N^{nM}y^*[M]+X^*[n]W_N^{-nM}y[M]\} \end{aligned} \quad (9)$$

과 같다. CMA의 성질상 최소화 하고자하는 목적함수를 J_{total} 이라고 하면 $J_{total}=J_M+J_{M+1}+\cdots+J_{N-1}$ 과 같이 L 개의 출력신호의 크기가 통계적으로 일정 하다는 제한조건으로 다시 쓸 수가 있고, DFT 영역의 적응필터의 계수 $\boldsymbol{C_k}$ 는 gradient

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{total}}{\partial C_k[n]} &= -2E\{(R_p-|y[M]|^2)\} \\ &\cdot \{X[n]W_N^{n(M+1)}y^*[M]+X^*[n]W_N^{-n(M+1)}y[M]\} \\ &\vdots \\ &+ -2E\{(R_p-|y[N-1]|^2)\} \\ &\cdot \{X[n]W_N^{n(N-1)}y^*[N-1]+X^*[n]W_N^{-n(N-1)}y[N-1]\} \end{aligned} \quad (10)$$

을 최소화 하는 방법으로

$$C_{k+1}[n]=C_k[n]-\mu\frac{\partial J_{total}}{\partial C_k[n]}, \quad n=0,1,\cdots,N-1 \quad (11)$$

과 같은 적응 식으로 된다.

III. Block CMA 의 error surface

본 장에서는 앞서 제시한 block CMA 의 비용함수를 해석하여 본다. 그림 4 에 성능 분석에 사용된 모델이 제시되어 있다.

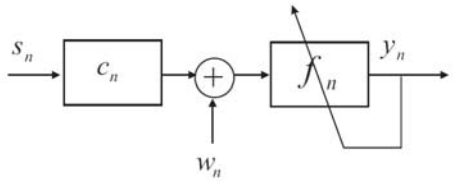


Fig. 4. Channel and equalizer model for analysis
그림 4. 해석을 위한 채널과 등화기의 모델

이 모델에서 s_n 은 소스 심볼 로서 특정한 통계적인 특성을 갖는다는 가정이 이루어지는데 신호의 dispersion 상수 $\gamma = \frac{E\{|s_n|^4\}}{E\{|s_n|^2\}}$ 와 분산 $\sigma_s = E\{|s_n|^2\}$ 및 normalized kurtosis $\kappa_s = \frac{E\{|s_n|^4\}}{E\{|s_n|^2\}^2}$ 는 알려져 있다고 가정하고, 채널은 정규화 되어 $\|h\|^2 = \sum_n |h|^2 = 1$ 이라고 가정한다. 채널의 임펄스 응답은 길이가 M 으로서, 이를 벡터로 표시하면 $\boldsymbol{c}=(c_0, c_1, \cdots, c_{M-1})^t$ 이라고 하자. 또한, 등화기의 계수는 N 개의 필터를 가지고 있다고 가정하면. $\boldsymbol{f}=(f_0, f_1, \cdots, c_{N-1})^t$ 으로 주어진다. 본 논문에서는 symbol-spaced-equalizer 만 고려한다. 채널의 임펄스 응답으로부터 얻어지는 행렬 $\boldsymbol{C}$ 는

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ \vdots & c_1 & \ddots & c_0 \\ c_{M-1} & \vdots & \ddots & c_1 \\ 0 & c_{M-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_{M-1} \end{pmatrix} \tag{12}$$

과 같이 정의 되는데 이는 P=M+N-1 라고 할때 PxN 행렬이다. [6] 과 같이 채널 $\{c_n\}$ 과 등화기 $\{f_n\}$ 의 컨볼루션의 결과를 $\boldsymbol{h}=(h_0, h_1, \cdots, h_{P-1})^t$ 이라고 하면, 이를 행렬로 표시하면

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{f} \tag{13}$$

가 되는데, 여기서 · 는 행렬의 곱을 의미한다. 이를 이용하면, 그림 4 에서 등화기의 출력은 잡음을 w_k 이라 할때

$$y_k = \sum_{i=0}^{P} h_i s_{k-i} + \sum_{i=0}^{N} f_i w_{k-i} \tag{14}$$

와 같이 이루어진다. 본 논문 에서는 [6] 에서 제시한 방식과 유사한 방식으로 block CMA 의 오차표면 (error surface)을 유도하려고 한다. 기존의 CMA 의 오차표면은 [6] 에 제시되어 있다. 2 절에 제시한 BCMA 의 길이 L 크기의 블록에 대한 목적함수 (3) 을 다시 쓰면

$$J_{CM}^{L} = E\left\{ \left(\sum_{n=1}^{L} |y_n|^2 - \gamma \right)^2 \right\} \tag{15}$$

와 같이 되는데, 이를 전개하면

$$J_{CM}^{L} = \sum_{n=1}^{L} E\{|y_n|^4\} + \gamma^2 - 2L\gamma \sum_{n=1}^{L} E\{|y_n|^2\} + \sum_{n}^{L} \sum_{k,k\neq n}^{L} E\{|y_n|^2 |y_k|^2\} \tag{16}$$

과 같이 된다. 이를 이용하여 식 (16) 을 전개하면 [6] 에서와 같이 식 (16) 의 앞의 두개의 항은 소스 s_n 의 2 차 및 4차의 통계적 특성인 σ_s, κ_s 와 채널의 임펄스응답 c_n, 등화가의 계수 f_n 으로 부터 유도될 수 있다. 식 (16) 에서 전개된 FSE (fractional spaced equalizer) 를 본 논문에서 고찰하는 symbol rate equalizer 로 변형하여 식 normalized kurtosis $\kappa_s = \frac{E\{|s_n|^4\}}{E\{|s_n|^2\}^2}$ 를 사용하여 전개하면

$$E\{|y_n|^2\} = \sigma_s^2 \|h\|^2 + \sigma_w^2 \|f\|^2 \tag{17}$$

인데, 여기서 σ_w 는 잡음의 분산을 의미한다. $|y|^4$ 의 기댓값은 [6] 에서 풀이된 식을 변형하여

$$E\{|y|^4\}=\kappa_s\sigma_s\sum_{i=0}^{P-1}|h_i|^4+2\sigma_s^4\sum_{i=0}^{P-1}\sum_{m=0,m\neq i}^{P-1}|h_i|^2\cdot|h_m|^2$$
$$+|E\{s^2\}|^2\sum_{i=0}^{P-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{P-1}h_i^2(h_j^*)^2+\kappa_w\sigma_w^4\sum_{i=0}^{N-1}|f_i|^4$$
$$+2\sigma_w^4\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{m=0,m\neq i}^{N-1}|f_i|^2|f_m|^2+|E\{w^2\}|^2\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{N-1}f_i^2(f_j^*)^2$$
$$+(E\{s^2\}\sum_{i=0}^{P-1}h_i^2)(E\{w^2\}\sum_{i=0}^{N-1}f_i^2)^*+4\sigma_s^2\sigma_w^2\|h\|^2\|f\|^2$$
$$+(E\{s^2\}\sum_{i=0}^{P-1}h_i^2)^*(E\{w^2\}\sum_{i=0}^{N-1}f_i^2) \quad (18)$$

와 같이 symbol rate equalizer 에 적용된다. 이제 식 (16)의 네번째 항인 $\sum_n^L\sum_{k,k\neq n}^L E\{|y_n|^2|y_k|^2\}$ 에 대해서 고찰하여 보자. 이제 식의 단순함을 위하여 매우 높은 SNR 의 경우만 고려하자. 이는 CMA 가 비교적 높은 SNR 에서만 동작한다는 일반론에 근접한 것이다. 잡음 w 을 무시한 경우의 source symbol 벡터를 $s_n=(s_n,s_{n-1},\cdots,s_{n-P+1})^t$ 라고 하면 $y_n=h^ts_n$ 이라고 단순화 된다. 따라서 BCMA 의 목적함수의 $\sum_n^L\sum_{k,k\neq n}^L E\{|y_n|^2|y_k|^2\}$ 항은

$$\sum_n^L\sum_{k,k\neq n}^L E\{|y_n|^2|y_k|^2\}=E\{h^Hs_ns_n^Hhh^Hs_ks_k^Hh\} \quad (19)$$

와 같이 표시되는데 여기서 위첨자 H 는 Hermittian operator 이다. 이제 두개의 $P\times P$ 행렬 $H=hh^H$, $S_n=s_ns_n^H$ 를 정의하여 사용하면 식 (19) 는

$$\sum_n^L\sum_{k,k\neq n}^L E\{|y_n|^2|y_k|^2\}=h^HE\{S_nHS_k\}h \quad (20)$$

와 같이 표시된다. 식 (17), (18), (20) 을 대입하면 식 (16) 은 소스신호가 i.i.d (independent identical distributed) 라는 가정하에

$$\frac{J_{CM}^L(f)}{L}=\sum_{n=1}^L E\{|y_n|^4\}+L^2\gamma^2$$
$$-2L\gamma\sum_{n=1}^L E\{|y|^2\}+\sum_n^L\sum_{k,k\neq n}^L E\{|y_n|^2|y_k|^2\}$$
$$+\kappa_s\sigma_s\sum_{i=0}^{P-1}|h_i|^4+2\sigma_s^4\sum_{i=0}^{P-1}\sum_{m=0,m\neq i}^{P-1}|h_i|^2\cdot|h_m|^2$$
$$+|E\{s^2\}|^2\sum_{i=0}^{P-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{P-1}h_i^2(h_j^*)^2+\kappa_w\sigma_w^4\sum_{i=0}^{N-1}|f_i|^4$$
$$+2\sigma_w^4\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{m=0,m\neq i}^{N-1}|f_i|^2|f_m|^2+|E\{w^2\}|^2\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0,j\neq i}^{N-1}f_i^2(f_j^*)^2$$
$$+(E\{s^2\}\sum_{i=0}^{P-1}h_i^2)(E\{w^2\}\sum_{i=0}^{N-1}f_i^2)^*+4\sigma_s^2\sigma_w^2\|h\|^2\|f\|^2$$
$$+(E\{s^2\}\sum_{i=0}^{P-1}h_i^2)^*(E\{w^2\}\sum_{i=0}^{N-1}f_i^2)$$
$$+L\gamma^2-2L\gamma(\sigma_s^2\|h\|^2+\sigma_w^2\|f\|^2)+\frac{1}{L}h^HE\{S_nHS_k\}h \quad (21)$$

와 같이 완성된다. 이러한 결과를 확인하기 위하여 계수가 2 개인 적응필터에 대한 오차함수를 그려서, 기존의 CMA 의 오차함수와 비교하여 볼 필요가 있다. 이를 이용한 block CMA 기반 고속 알고리듬의 수렴성에 대한 고찰을 다음절에서 수행한다.

IV. Block CMA기반 고속 알고리듬의 수렴성 문제

본 논문에서는 실험상에서 얻어진 기본의 block CMA 기반의 나쁜 수렴성을 분석하는 것을 목적으로 한다. 또한 상대적으로 수렴성이 우수한 최근의 고속 알고리듬의 우월성에 대해서도 고찰한다. Block CMA 기반의 고속알고리듬은 Parseval 의 정의를 이용하여 시간영역의 에너지가 주파수 영역의 에너지로 보존된다는 성질 즉 $y(n), Y(k)$ 를 각각 시간, 주파수 영역의 신호라 할때

$$\sum_{n=0}^{L-1}|y(n)|^2=\sum_{k=0}^{L-1}|Y(k)|^2 \quad (22)$$

와 같은 성질을 사용하기 위하여 기존의 CMA 의 목적함수 $J_{CM}=E\{(|y(n)|^2-R_p)^2\}$ 를

$$J_{CM}^{L}=E\left\{(\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}|y_i|^2-R_2)^2\right\} \quad (23)$$

로 확장한 것이다. 반면에 최근에 제시된 고속 알고리듬은 블록처리에서

$$J_{total}=\sum_{n=0}^{L-1}J_{CM} \quad (24)$$
$$=\sum_{n=0}^{L-1}E\{(|y(n)|^2-R_p)^2\}$$

을 사용한 것인데, $E\left\{(\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1}|y_i|^2-R_2)^2\right\}\neq\sum_{n=0}^{L-1}E\{(|y(n)|^2-R_p)^2\}$ 임이 명백하다. 그런데 식 (24) 가 원래의 CMA 의 목적함수와 동일하므로 최근에 제안된 고속 알고리듬의 수렴성이 수월하다는 것은 명백하다.

이를 증명하기 위하여 앞에서는 Block CMA 기반의 오차평면 (error surface) 를 해석적으로 구하였다. 본 논문에서는 [6] 에서 CMA 의 오차평면에서 제시한 채널에 대해서 각각 CMA 와 block CMA 에 대한 오차평면을 해석적으로 구한 앞 절의 결과를 제시하려고 한다. 오차평면을 그리기 위해서 부득이하게 채널이 2-tap 인 $\{f_0,f_1\}$ 등화기를 고려하였다. 그러면, 오차 평면은 $J_{CM}^{L}(f_0,f_1)$ 과 같이 정의 구역이 2차원 치역이 1차원인 함수가 되는데, 그림 5 에는 채널응답이 $C=[0.5,-0.3,0.25]$ 인 채널에 대한 기존의 CMA 와 이와 동등한 새로운 FBCMA [2]의 오차평면이 제시되어 있다.

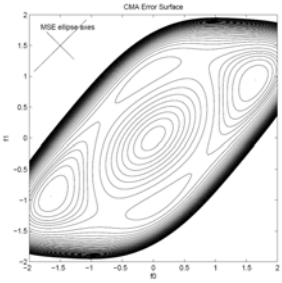
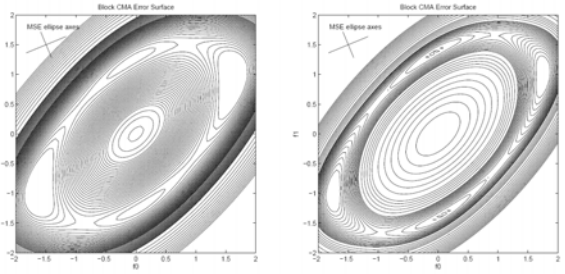


Fig. 5. Error surface of CMA for channel 1
그림 5. Channel 1 의 CMA 의 error surface



(a) Block length=4 (b) Block length=8
Fig. 6. Error surface of block CMA
그림 6. Block CMA 의 error surface

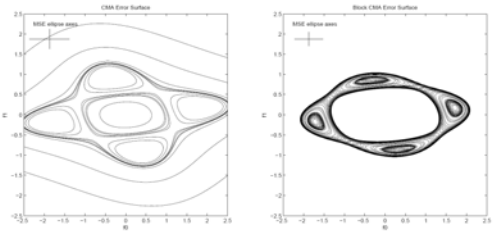
여기서, 새로운 FBCMA 인 new-FBCMA 는 기본적으로 기본의 CMA 와 동일한 오차평면을 가지고 있고, 반면에, old-FBCMA 는 block CMA 의 오차평면을 가지고 있다는 것에 유의하자.

이러한 점을 고려하여 그림 6 (a), (b) 에는 앞장에서 유도한 식으로 부터 그려진 블록 크기 4 및 8 인 BCMA 의 목적함수 J_{CM}^{L} 가 제시되어 있다. 그림에서 보듯이 두개의 국소 최소는 유사한 패턴을 보이나 예상대로 BCMA 의 경우 경사가 훨씬 급하게 구성되어 있어 국소 최소에서 빠져나오기가 어렵다는 것을 유추할 수 있다.

그림 7 (a) 은 채널응답이 $C=[0.2,0.5,1,-0.1]$ 으로 [6] 에서 perfect equalizable 이라고 제시된 채널의 CMA 에 대한 오차평면이 제시되어 있고, 그림 7 (b) 에서는 이 경우의 BCMA 의 오차평면이 제시되어 있다. 앞선 채널과 마찬가지로 국소 최소에 대한 경사의 증가로 전역 최소로 수렴하는데 약간의 문제가 발생할 수 있다. 이러한 결과를 다음절에서는 실제로 채널에 두가지 알고리듬을 비교하여 검증하기로 한다.

V. 컴퓨터 모의실험을 통한 수렴성 비교

본 장에서는 모의실험을 통하여 두가지 고속 주파수영역 CMA 알고리듬의 성능을 분석하여 보기로 한다. 실험에서는 총 6 개의 채널을 모의실험 하였다. 모의실험에서 QPSK 변조기법으로 사용되었다고 가정하자. 그러면, 복소 통신채널의 표본화된 등가모델인 $C(z)$ 는 inphase 성분 $c_I[n]$ 과 quadrature 성분



(a) CMA (b) BCMA

Fig. 7. Error surface of channel 2
그림 7 Channel 2 에 대한 error surface

$c_Q[n]$ 을 갖는다. 따라서, $C(z)$ 는 $C(z)=\sum_{m=0}^{K}\{c_I(m)+jc_Q(m)\}z^{-m}$ 과 같이 표시될 수 있는데, 여기서 K 은 채널의 차수이고 $c_I(m)$ 과 $c_Q(m)$ 는 각각 inphase 성분과 quadrature 성분의 채널의 임펄스 응답이다. 실험에서는 IEEE 의 주요 저널에서 CMA 와 관련된 채널에 대해서 실험 하였는데, 실험에 사용된 채널의 임펄스 응답이 표 1 에 제시되어 있다.

Table 1. Channel impulse response for simulation
표 1. 모의 실험에 사용된 채널의 임펄스 응답

채널	채널 계수	Channel impulse response
1	$C_I(n)$	$(-0.005, 0.009, -0.024, 0.854, -0.218, 0.049, -0.016)$
	$C_Q(n)$	$(-0.004, 0.030, -0.104, 0.520, 0.273, -0.074, 0.020)$
2	$C_I(n)$	$(0.0545, 0.2832, -0.7676, -0.0641, 0.0566, 0.4063)$
	$C_Q(n)$	$(0.05, -0.1197, -0.2788, -0.0576, -0.2275, -0.0739)$
3	$C_I(n)$	$(-0.0901, 0.6853, 0.717, -0.0901)$
	$C_Q(n)$	0
4	$C_I(n)$	$(-0.0901, 0.7170)$
	$C_Q(n)$	0
5	$C_I(n)$	$(1.0, 0.2)$
	$C_Q(n)$	0
6	$C_I(n)$	$(1.0, 0.2, -0.2)$
	$C_Q(n)$	0

표에서 channel 1 은 [7] 에서 제시된 채널이고, channel 2 는 [8] 에서 제시된 채널이고, channel 3 은 [9] 에서 사용된 채널이다. channel 4-6 는 각각 [6]에서 제시된 3 개의 채널이고, 모든 실험에서는 SNR = 25 dB 인 AWGN 채널에 대해서 실험하였다. 여기서 사용된 CMA의 적응필터의 차수는 32 차 FIR 필터이고 수렴상수 μ 는 0.001 이며 25,000 개의 심볼이 사용되었다. FBCMA 에서는 필터차수 $M=32$, 블록길이 $L=33$, FFT 길이 $N=64$ 가 사용 되였다.

본 논문에서는 BCMA 기반의 이전의 알고리듬과 최신의 FBCMA 알고리듬을 표와 같은 6 개의 채널에 대해서 실험하면서 수렴성을 분석하였다.

그림 8 에는 SNR=25 dB 인 경우가 수신신호의 성상도 (constellation) 가 6개의 채널에 대해서 제시되어 있다.

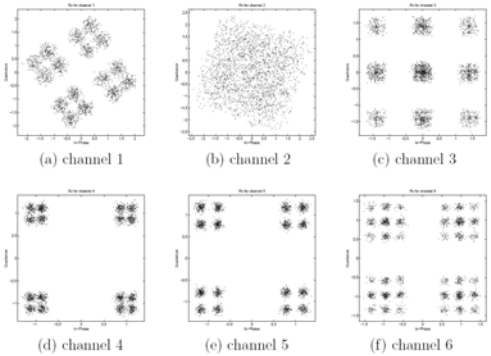


Fig. 8. Scatter diagram for the received signal
그림 8. 수신신호의 scatter diagram

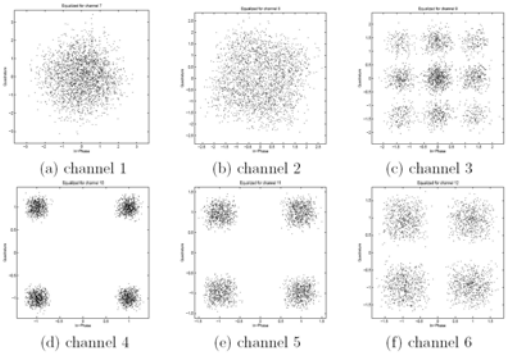


Fig. 9. Equalized scatter diagram for old FBCMA
그림 9. 이전의 FBCMA 의 equalized scatter diagram

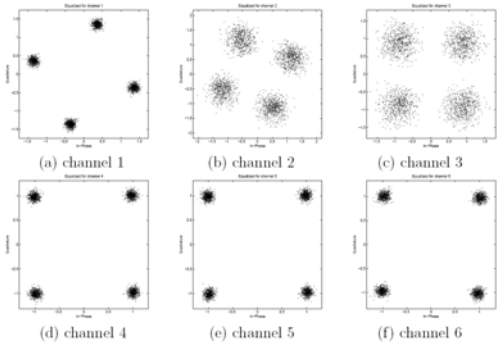


Fig. 10. Equalized scatter diagram for new FBCMA
그림 10. 새로운 FBCMA 의 equalized scatter diagram

그림 9, 10 에는 각각 기존의 BCMA based FBCMA 와 새로운 FBCMA 를 사용한 경우의 등화된 신호의 성상도가 제시되어 있다. 실험에서는 여러 가지의 수렴 조건중 최상의 경우를 선정하여 실험하였다. 그림에서 보듯이 이전의 알고리듬에서는 channel 1 - 3 까지의 채널에 대해서는 국소 최소로 수렴하여 잘못된 등화의 결과를 보여주고 있다. 반면 최신의 알고리듬에서는 모든 채널에 대해서 잘 수렴하여 적절한 등화가 이루어짐을 알 수 있다. 전체적인 수렴결과가 표 2 에 제시되어 있다.

Table 2. Convergence result for CMA, old-FBCMA, new-FBCMA
표 2. CMA,old-FBCMA, new-FBCMA 의 수렴결과

채널	CMA	old FBCMA	new FBCMA
1	수렴	실패	수렴
2	수렴	실패	수렴
3	수렴	실패	수렴
4	수렴	수렴	수렴
5	수렴	수렴	수렴
6	수렴	수렴	수렴

VI. 결 론

본 논문에서는 최근에 제시된 두개의 고속 CMA 알고리듬에 대한 성능을 비교하기 위하여 목적함수를 해석적으로 분석하여 오차평면을 유도하여 이전의 고속알고리듬이 잘못된 수렴성을 보일 수 있음을 간접적으로 보였다. 이러한 과정에서 근본적으로 두 알고리듬이 다른 두개의 목적함수를 최소화한다는 중요한 차이점이 다시 부각되었으며, 최근에 제안된 알고리듬이 최초에 CMA 가 추구하였던 목적함수와 동일한 목적함수를 최소화 으로써 기존의 CMA 와 유사한 수렴특성을 보여서 더 우수한 수렴성을 보인다는 것을 유도하였다.

실제로 컴퓨터 모의실험결과 이러한 사실이 체계적으로 증명되었고 이를 토대로 새로운 FBCMA 알고리듬의 수렴성이나 성능이 안정적이라는 사실을 간접적으로도 보일 수 있었다. 따라서, 필터의 길이가 길어야 하는 등화기에서는 이러한 FBCMA 가 convolution 에 소요되는 계산량을 상당히 줄여서 쓸 수 있는 알고리듬으로 사용될 수 있다는 사실을 보다 세밀하게 관찰할 수 있었다.

참고문헌

[1] Y. G. Yang and S. U. Lee, ''Low complexity adaptive blind equalization using the frequency domain block constant modulus algorithm,'' *IEICE Tr. on Communications,* vol.~E82-B, pp.~1694--1698, Oct. 1999.

[2] 양윤기, 조남익, 이창수, 김진율, ''DFT 를 사용한 고속 constant modulus algorithm,'' *SK Telecommincation Review*, vol.~16, pp.~129--140, Feb. 2006.

[3] D. N. Godard, ''Self - recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communication systems,'' *IEEE Trans. Commun.*, vol.~28, pp.~1867--1875, Nov. 1980.

[4] J. C. Lee and C. K. Un, ''Performance analysis of frequency domain block LMS adaptive digital filters,'' *IEEE Trans. Circuits and Systems,* vol.~36, pp.~173--189, Feb. 1989.

[5] General Instrument Corporation, *DigiCipher HDTV System Description.* Aug 1991.

[6] C. R. Johnson Jr. et. al, ''Blind equalization using the constant modulus criterion: A review,'' *Proc. of the IEEE*, vol.~86, pp.~1927--1949, Oct. 1998.

[7] G. Picchi and G. Prati, ''Blind equalization

and carrier recovery using a ''stop-and-go'' decision-directed algorithm,'' *IEEE Trans. Commun.*, vol.~35, pp.~877--887, Sept. 1987.

[8] X. Li, ''A tutorial channel equalization: blind adaptive equalization cma,'' *http://uceps.ws.binghamton.edu/~xli/tutor/channel.htm.*

[9] Sudarshan Rao Nelatury and S. S. Rao, ''Increasing the speed of convergence of the constant modulus algorithm for blind channel equalization,'' *IEEE Trans. Commun.,* vol.~50, no.~6, pp.~872--876, 2002.

저 자 소 개

양 윤 기 (정회원)

1989년 : 서울대학교 제어계측공학과 졸업 (공학사)
1991년 : 서울대학교 대학원 제어계측공학과 (공학석사)
1996년 : 서울대학교 대학원 제어계측공학과 (공학박사)
1997년 9월~현재 : 수원대학교 정보통신공학과 부교수
<주관심분야> 디지털 통신, 영상처리, 신호처리

이 창 수 (정회원)

1985년 : 서울대학교 제어계측공학과 졸업 (공학사)
1987년 : 서울대학교 대학원 제어계측공학과 (공학석사)
1997년 : 서울대학교 대학원 제어계측공학과 (공학박사)
1997년 9월~현재 : 수원대학교 전자공학과 부교수
<주관심분야> 영상신호처리, 컴퓨터 응용, 신경망

양 수 미 (정회원)

1985년 : 서울대학교 컴퓨터공학과 졸업 (공학사)
1987년 : 서울대학교 대학원 컴퓨터공학과 (석사)
1997년 : 서울대학교 대학원 컴퓨터공학과 (박사)
1988년 ~2000년 : KT 연구소 선임연구원
2004년 9월~현재 : 수원대학교 교수
<주관심분야> 컴퓨터 보안, 시스템 소프트웨어, 알고리즘 분석