

# $p$ -수렴 완전층별모델에 의한 일면패치로 보강된 원공 적층판의 휨효과

## Bending Effect of Laminated Plates with a Circular Hole Repaired by Single-Sided Patch Based on $p$ -Convergent Full Layerwise Model

우 광 성†      양 승 호\*      안 재 석\*\*      신 영 식\*\*\*  
Woo, Kwang-Sung      Yang, Seung-Ho      Ahn, Jae-Seok      Shin, Young-Sik  
(논문접수일 : 2009년 7월 14일 ; 심사종료일 : 2009년 9월 7일)

### 요 지

기존에 설치되어 있는 구조물의 양면대칭 패치보강은 항상 면내거동만을 유발하나 시공상 어려움이 있다. 반면에 일면 패치보강의 경우 인장력의 증가에 따라 중립축의 위치가 대칭이 아니므로 휨에 대한 강성도가 증가하게 되며, 결과적으로 적층판의 휨을 심화시키게 된다. 이 연구에서는 일면 패치보강된 적층판의 두께방향은 물론이고 원공주위의 응력집중계수를 산정하기 위해  $p$ -수렴 완전층별모델을 제안하였다. 가정된 변위장의 정의를 위해, 임의의 층에서 변위-변형률 관계와 3차원 구성방정식은 2차원 및 3차원 계층적 형상함수의 조합이 사용된다. 원형경계의 기하형상을 나타내기 위해 초유한사상 기법이 사용되며, 다른 외삽법을 사용하지 않고 각 층마다 절점에서의 응력값을 직접적으로 얻기위해 가우스-로바토 수치적분이 수행되었다. 제안된 모델의 정확도와 단순성은 기존의 3차원 유한요소해석과 실험에 의해 구해진 결과들과의 비교를 통해 검증되었다. 또한 정사각형, 원형, 고리형 형상의 다양한 패치보강에 따른 휨효과를 조사하였다.

**핵심용어** :  $p$ -수렴 완전층별모델, 일면 패치보강, 원공, 초유한사상, 가우스-로바토 적분, 면외 휨효과

### Abstract

Double symmetric patch repair of existing structures always causes membrane action only, however, in many cases this technique is not practical. On the other hand, the bending stiffness of the patch and the skin increases as tensile loading is increased and affects the bending deformation significantly in the case of single-sided patch repair. In this study, the  $p$ -convergent full layerwise model has been proposed to determine the stress concentration factor in the vicinity of a circular hole as well as across the thickness of plates with single-sided patch repair. In assumed displacement field, the strain-displacement relations and 3-D constitutive equations of a layer are obtained by the combination of 2-D and 3-D hierarchical shape functions. The transfinite mapping technique has been used to represent a circular boundary and Gauss-Lobatto numerical integration is implemented in order to directly obtain stresses occurred at the nodal points of each layer without other extrapolation techniques. The accuracy and simplicity of the present model are verified with comparison of the previous results in literatures using experiment and conventional 3-D finite element. Also, the bending effect has been investigated with various patch types like square, circular and annular shape.

**Keywords** :  $p$ -convergent full layerwise model, single patch repair, circular hole, transfinite mapping, Gauss-Lobatto integration, out-of-plane bending effect

### 1. 서 론

1970년대 이후부터 시작된 여러 소재를 사용한 패치(patch)

보강에 관한 연구는 실험적 방법의 단점을 보완 또는 극복하고자 고급화된 수치해석 기법을 통하여 다양한 패치보강에 대한 연구가 진행되고 있다. Jones 등(1979), Mitchell 등(1975)

† 책임저자, 종신회원 · 영남대학교 건설시스템공학과 정교수  
Tel: 053-810-2593 ; Fax: 053-810-4622  
E-mail: kswoo@yu.ac.kr

\* 영남대학교 건설시스템공학과 석사과정

\*\* 영남대학교 공업기술연구소 연구원

\*\*\* 종신회원 · 영남대학교 건설시스템공학과 정교수

• 이 논문에 대한 토론을 2009년 12월 31일까지 본 학회에 보내주 시면 2010년 2월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

과 Chu 등(1989)는 유한요소법을 이용하여 균열을 갖는 평판, 패치보강판 및 접착층에서의 응력분포에 대해 연구하였다. Tran 등(1991)은 보강된 구조물의 패치부분은 2차원 유한요소법, 금속판에는 경계요소법을 이용하여 응력집중 및 응력확대계수를 구하였다. 또한, 1990년대 이후 컴퓨터 연산능력의 급격한 발전과 더불어 복합재료이론에 기초를 둔 고급화된 수치해석을 통하여 내하력 증가 및 보강의 효율성에 대한 언급과 함께 손상된 부재의 보강 후의 거동에 대한 이론적인 분석을 할 수 있게 됨에 따라 수많은 연구들이 진행되었다.

패치와 접착재(adhesive), 접착재와 모재(skin)사이의 계면에서 발생하는 응력장을 산정하기 위해 3차원 고체요소(solid element)가 가장 많이 사용된다. 그러나 모재 뿐만 아니라 얇은 접착재와 패치까지 3차원 고체요소로 모델링하여야 하기 때문에 요소의 적절한 변장비(aspect ratio)를 유지할 때 수천 개에서부터 수십만 개의 요소를 필요로 한다(Ellyin, 2007). 일반적으로  $h$ -version의 경우 사각형 요소의 변장비가 1:7을 넘으면 변위값에, 1:5를 넘을 경우는 응력값에 많은 오차를 발생(Robinson, 1976)할 수 있는 것으로 보고되어 있다. 물론 경험적으로 해석문제의 종류에 따라 변장비의 기준은 다소 달라질 수는 있다. 또한, 본 연구에서 고려하고 있는 일면패치보강된 원공(circular hole)적층판의 경우 원형경계를 정확히 사상(mapping)해야 하기 때문에 원공주위에 많은 요소분할을 요구하게 된다. 이러한 이유로 자동요소분할이 가능한 ABAQUS, ANSYS, FRANC-2D 등의 상용소프트웨어가 여러 연구자들에 의해 사용되어 왔다. 이러한 문제점을 극복하기 위한 대안으로 Sun 등(1996)은 모재와 패치를 포함하는 피접착체(adherents)는 평판요소로 접착재는 인장과 압축만을 표현하는 스프링요소로 모델링하여 요소수를 줄이려는 노력을 하였으나 3차원 고체요소에 비해 정확도가 떨어질 뿐만 아니라 접착재주위의 계면에서 발생하는 응력값에 많은 차이를 보여주었다. Nabouli (1998)는 3층기법(three-layer technique)이라 하여 Sun이 사용한 모델링에서 스프링요소를 평판요소로 대체하였다. 한편, Bezzerrouki(2008)는 Kansas대학에서 개발된 FRANC 2D/L를 사용하여 3차원 모델링에서 2차원화하는 해석을 시도하였다. 즉, 각 층은 개별적으로 평면응력상태의 변위장으로 가정한 후 각 층을 합치는 적층모델로 접착재의 변형은 전단에 의해서만 발생되며 두께에 걸쳐 일정하다는 가정이다. 그 외에도 적층이론에 따른 층별이론(layerwise theory)과 등가단층이론(equivalent single layer theory) 등의 적용이 있으나 원공부분의 불연속 모재를 모델링하는데 어려움이 따른다.

본 연구에서는 인장력을 받는 원공을 갖는 알루미늄 판의

패치보강 전후 원공주위의 응력집중계수의 변화와 적절한 보강을 위한 최적의 패치크기를 산정하였다. 패치보강효과를 파악하기 위해 패치의 종류는 정사각형, 원형, 고리형(annular)이 고려되었다. 제안된 유한요소모델은 완전층별이론(full layerwise theory)에 기초를 둔  $p$ -수렴 적층요소이며, 원공의 기하형상을 정확히 표현하기 위해 초유한사상(transfinite mapping)을 사용하여 체논의 개수를 최소화하였다. 고차 적분형 르장드르 다항식에 의한 계층적 형상함수가 사용되는  $p$ -수렴 적층요소의 변장비에 대한 강건성(robustness)은 이미 발표된 논문(Woo, 1993)에서 증명된 바가 있다. 본 연구에서는 수렴성조사후 1:80까지의 변장비를 최대로 하는 적층모델을 구축하였다. 한편, 양면대칭 패치보강은 항상 면내거동만을 유발하기 때문에 훨씬 효율적인 반면, 실제 구조물에서 양면보강법이 불가능하거나 실제적이지 못한 경우가 많다. 반면에, 일면 패치보강의 경우 인장력의 증가에 따라 중립축의 위치가 대칭이 아니므로 휨에 대한 강성도가 증가하게 되며, 결과적으로 적층판의 휨을 심화시키게 된다. 따라서, 이 연구에서는 일면 패치보강된 적층판의 두께방향에 따른 원공주위의 응력집중계수를 산정할 뿐 아니라 실제로 휨이 발생하는지를 조사하기 위해 보강판의 처짐을 조사하였다. 한편, 수치적분은 가우스적분점이 아니라 실제 절점에서의 응력 계산이 가능한 Gauss-Lobatto 적분이 채택되었다. 연구목적용 컴퓨터 프로그램은 MATLAB 7의 M-file code를 사용하여 작성되었다. 제안된 해석법의 타당성을 확인하기 위하여 기존 연구자의 실험값과 ANSYS 프로그램에 의한 3차원 고체요소를 사용한 유한요소 해석값의 비교가 수행되었다.

## 2. $p$ -수렴 완전층별모델

### 2.1 완전층별이론을 사용한 적층모델

대부분의 주 구조물은 보조 구조물보다 두껍기 때문에 전체적 거동을 결정할 때에도 두께효과가 고려될 수 있는 적층이론이 필요하게 된다. 특히, 손상이 시작될 가능성이 있는 국부영역에 대한 분석을 위해서는 층 수준(ply level)에서의 3차원 응력과 변형률을 알아야만 한다. 따라서, 본 연구에서는 층별적층이론을 적용하였다. 지금까지 적층판 모델시 지배방정식을 구하기 위해서 많은 변위근거 이론이 제안되어져 왔으며, 크게 등가단층이론(equivalent single layer theory; ESLT) 이론과 층별이론(layerwise theory)으로 나눌 수 있다. 본 연구에서는 3차원 탄성이론에 기초한 완전층별이론을 사용한다. 즉, 적층판 변위장의 두께방향에 대해서  $C^0$ -

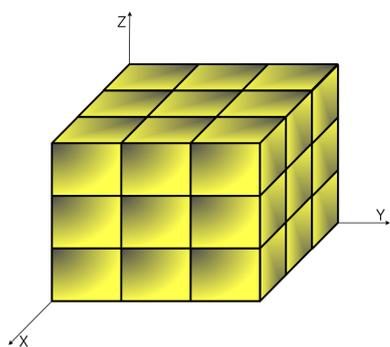


그림 1 3차원 고체요소

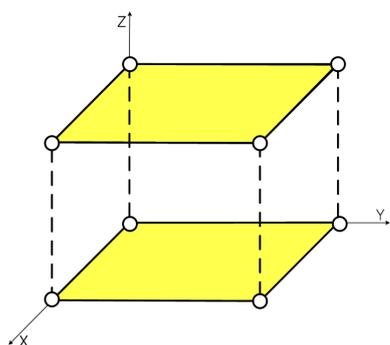


그림 2 완전층별이론에 의한 적층모델

연속 조건을 만족시켜야 한다.

일반적으로 ESLT는 얇은 적층평판의 전체거동을 파악하는데는 장점을 가지고 있는 반면에 두께가 매우 두꺼운 적층판 또는 국부적인 응력상태를 파악할 때는 부정확성을 가질 수도 있다. 이와같은 ESLT의 단점을 보완하기 위해서 FLWT(full layerwise theory)가 사용될 수 있다. 그림 1과 그림 2는 3차원 고체요소와 현재 연구에서 사용하고 있는 FLWT에 기초한 모델의 차이점을 보이고 있다. 식 (1)에서 표현되는  $p$ -수렴 완전층별이론은  $T$ ,  $S$  함수에 대해서 1차 형상함수를 선택하는 경우 선형조합으로 결합할 수도 있다. 다시 말하면 면내변위장은 적분형 르장드르 다항식에 기초를 둔 2차원 형상함수로 하여 형상함수의 차수를 1차에서 10차까지 증가시키게 하였으며, 두께방향의 변위장은 1차원 형상함수로 차수는 1차에서 10차까지 사용할 수 있도록 하였다. 그러므로 2차원 형태의 입력자료구조를 가지므로 범용 3차원 유한요소모델에 비해 단순한 입력자료와 손쉬운 체변경이 가능한 장점을 갖는다.

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z) &= \sum_{k=1}^m \Psi_k(\xi,\eta) T_k(\zeta) u^k \\
 v(x,y,z) &= \sum_{k=1}^m \Psi_k(\xi,\eta) T_k(\zeta) v^k \\
 w(x,y,z) &= \sum_{k=1}^m \Psi_k(\xi,\eta) S_k(\zeta) w^k
 \end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)은  $p$ -수렴 완전층별이론에 기본이 되는 식으로서, 위 식에서 표현한  $T$ 와  $S$ 는 직교성을 가지는 1차원 적분형 르장드르 형상함수이고,  $\Psi$ 는 2차원 적분형 르장드르 형상함수이다. 식 (1)에서 사용되는 1차원 적분형 르장드르 형상함수  $T_k$ 와  $S_k$ 는 계층적 성질(hierarchic nature)을 가지고 있는 변위보간함수로서, 1차원 변위보간함수  $T_k$ 와  $S_k$ 는 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned}
 T_1(\zeta) &= \frac{1-\zeta}{2}, T_2(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2}, p=1 \\
 T_{p+1}(\zeta) &= \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \int_{-1}^{\zeta} \frac{1}{2^{p-1}(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dq^{p-1}} (q^2-1)^{p-1} dq, \\
 & p=2,3,4,\dots \\
 S_1(\zeta) &= \frac{1-\zeta}{2}, T_2(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2}, p=1 \\
 S_{p+1}(\zeta) &= \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \int_{-1}^{\zeta} \frac{1}{2^{p-1}(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dq^{p-1}} (q^2-1)^{p-1} dq, \\
 & p=2,3,4,\dots
 \end{aligned} \tag{2}$$

또한, 2차원 형상함수는 1차원 형상함수로부터 전개되어진다. 2차원 변위함수의 사변형 요소의 4개의 꼭지점( $p=1$ )에 대해서는 선형 Lagrange 요소와 동일하다. 이에 대한 형상함수정의는 홍종현 등(1996, 2002)과 우광성 등(2008)을 참고하기 바란다. 사용된 응력과 변형률은 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \{\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \tau_{12} \tau_{13} \tau_{23}\}^T \\
 \epsilon_{ij} &= \{\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} \gamma_{12} \gamma_{13} \gamma_{23}\}^T = [B] \{\delta\}
 \end{aligned} \tag{3}$$

강성도 행렬은 식 (4)~식 (6)과 같다.

$$\begin{aligned}
 [K] &= \int_V [B]^T [\bar{D}] [B] dV \tag{4} \\
 D_{11} &= \frac{1-v_{23}v_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\
 D_{22} &= \frac{1-v_{13}v_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
 D_{33} &= \frac{1-v_{12}v_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 D_{12} = D_{21} &= \frac{v_{21} + v_{31}v_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \\
 D_{13} = D_{31} &= \frac{v_{31} + v_{21}v_{32}}{E_3 E_2 \Delta} \\
 D_{23} = D_{32} &= \frac{v_{32} + v_{12}v_{31}}{E_3 E_1 \Delta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{44} &= G_{12} \\
 D_{55} &= G_{13} \\
 D_{66} &= G_{23} \\
 D_{ij} &= 0 \text{ in the other entries}
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\Delta = \frac{1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{31}v_{13} - 2v_{21}v_{32}v_{13}}{E_1 E_2 E_3} \tag{6}$$

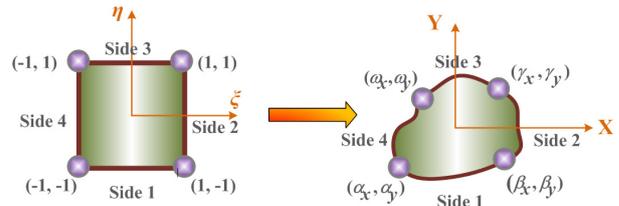


그림 3 초유한 사상의 기본 개념

### 2.2 곡선경계를 위한 초유한사상

유한요소법의 가장 어려운 문제중의 하나는 복잡한 유한요소망, 즉 요소를 만들어야 한다는 점이다. 그 동안 요소를 자동으로 발생시키는 연구가 활발히 진행되어 왔으며, 이를 위한 여러 가지 기법이 개발된 바 있다. 실제로 많은 h-수렴방식의 상업용 유한요소 프로그램에 장착된 전처리기(pre-processor)와 후처리기(post-processor)에서 요소망을 구성하기 위해서는 형상을 나타낼 수 있는 각각의 좌표값을 계산해야 하는데, 이를 위해 사상(mapping)문제가 매우 중요하게 된다. 한편, 요소발생기법은 크게 등매개변수보간법(isoparametric interpolation), 혼합함수법(blending function), 자동삼각형 분할에 의한 방법 등으로 분류할 수 있다.

이와 같은 문제점을 해결하기 위해서는 비등방성요소(anisotropic element) 개념을 사용하여, 근사적인 기법을 배제하고, 기하형상에 대해서는 실제형상과 모델링되어지는 형상을 동일하게 만드는 사상을 사용함으로써 기하형상으로 인한 오차를 제거할 수 있다. 즉 변위에 대하여 가정되어지는 함수와 독립적인 함수를 사용하며, 이때의 기하형상 함수는 실제 곡면과 일치하는 함수를 사용한다. 이와 같은 비등방성요소 개념은 h-수렴방식에 비하여 변위에 대하여 가정되어지는 영역이 상대적으로 매우 큰 p-수렴방식에서 많은 이점을 얻을 수 있다. 이차원 평면상에서 다양한 곡면을 가진 형상에 대한 사상의 일반식은 식 (7)과 같이 초유한사상(transfinite mapping)을 사용한다(우광성, 1992).

$$\begin{aligned}
 P_i &= H_1^i(\xi)S(\eta) + H_2^i(\eta)T(\xi) + H_3^i(\xi)T(\eta) + H_4^i(\eta)S(\xi) \\
 &\quad - \alpha_i S(\xi)S(\eta) - \beta_i T(\xi)S(\eta) - \gamma_i T(\xi)T(\eta) \\
 &\quad - \omega_i S(\xi)T(\eta)
 \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, P는 실제 전체 좌표계에서의 벡터함수를 나타내고, ξ와 η는 형상함수가 정의되는 영역에서의 표준좌표계를 의미하며, S와 T는 1차원 선형 Lagrange 보간함수를 나타낸다. H는 영역의 형상에 지배되는 함수를 의미하는데, 하나의 면이 선형이면 그 면에 대한 H는 선형 1차원 Lagrange 보간함수가 사용되어지고, 만약에 하나의 면의 형상이 그림 4

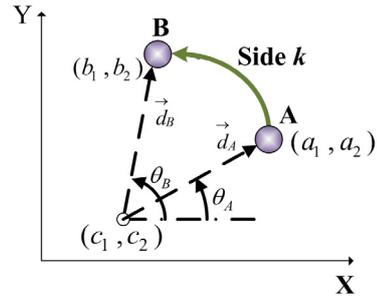


그림 4 원호(arc)를 갖는 곡선경계의 사상

를 원호(arc)를 갖는 곡선경계를 나타내는 경우에는 다음과 같다.

곡선경계의 끝 두 점은 다음의 벡터로 그 위치가 정의되어진다.

$$\vec{d}_A = \langle a_1 - c_1, a_2 - c_2 \rangle, \quad \vec{d}_B = \langle b_1 - c_1, b_2 - c_2 \rangle \tag{8}$$

각 벡터의 크기는 벡터 놈(vector norm)으로 정의되며, 여기에서는 원호의 곡선경계를 나타내기 때문에 두 벡터의 놈은 동일하다.

$$d = \|\vec{d}_A\| = \|\vec{d}_B\| \tag{9}$$

그리고 전체 좌표계의 X축에 대한 각 벡터의 각은 다음식에 의해 결정되어진다.

$$\theta_A = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{d}_A \cdot \vec{u}}{d}\right) \text{ and } \theta_B = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{d}_B \cdot \vec{u}}{d}\right) \tag{10}$$

식 (8)~식 (11)을 이용해서 면의 형상을 나타내는 H는 다음 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned}
 H_1^k(\xi) &= c_1 + d \cos\left(\theta_A \frac{1-\xi}{2} + \theta_B \frac{1+\xi}{2}\right) \\
 H_2^k(\xi) &= c_2 + d \sin\left(\theta_A \frac{1-\xi}{2} + \theta_B \frac{1+\xi}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{11}$$

이와 같은 형상을 나타내는 H에 대한 함수는 앞에서 언급



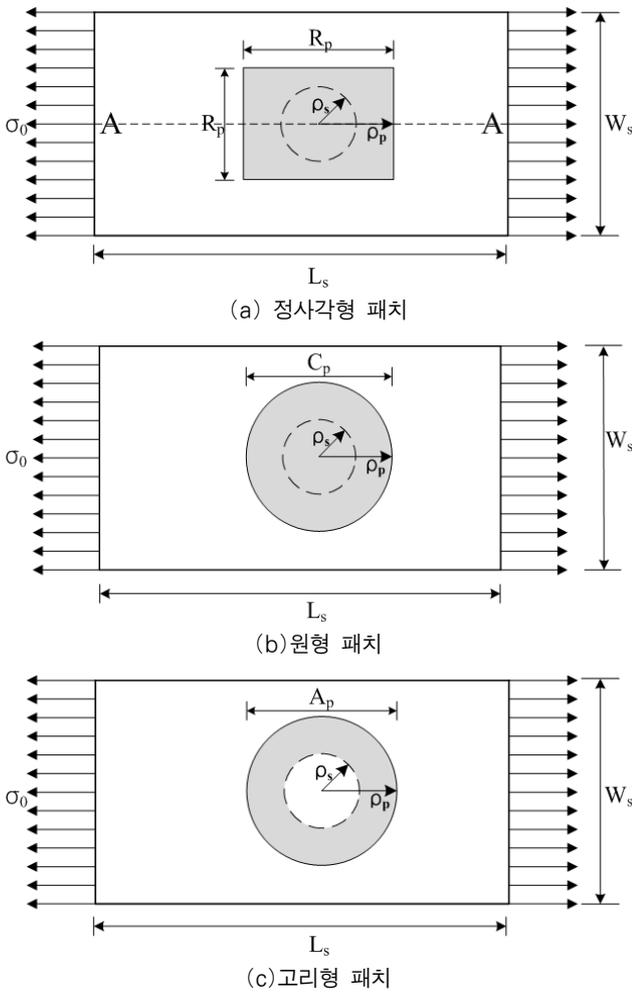


그림 5 패치 보강된 알루미늄 원공판의 기하형상

원형 패치의 경우  $C_p = 0.64in$ , 고리형 패치(annular patch)의 경우  $A_p = 0.75in$ 로 결정하였다. 모재(skin)와 패치의 재료물성치로는 알루미늄 소재로 탄성계수와 포아슨비는  $E = 10.2 \times 10^6 psi$ ,  $\nu = 0.33$ 이며, 모재와 패치 사이의 접착제(adhesive)는 3M Scotch-Weld사의 AF-163-2U(전단탄성계수  $G = 60 \times 10^6 psi$ ,  $\nu = 0.34$ )를 사용하였고, 인장력은  $P = 800lb$  ( $\sigma_0 = 3,125 lb/in^2$ )을 재하하여 해석하였다. 한편, 패치와 접착제의 두께는 각각  $t_p = 0.049in$ ,  $t_a = 0.0025in$ 이다.

### 3.1 정사각형 패치해석을 통한 제안모델의 적정성 검증

원공을 갖는 알루미늄 판의 패치 보강 전의 응력집중계수(stress concentration factor)를 구하는 방법은 여러 가지가 있지만, 일반적으로 원공을 갖는 알루미늄 판의 원공주위에서의 응력집중계수  $K$ 는  $K = (\sigma_{yy})_{max} / \sigma_0$ 로 정의된다. 통상 원공을 갖는 무한판의 원공주위에서 응력집중계수는  $K =$

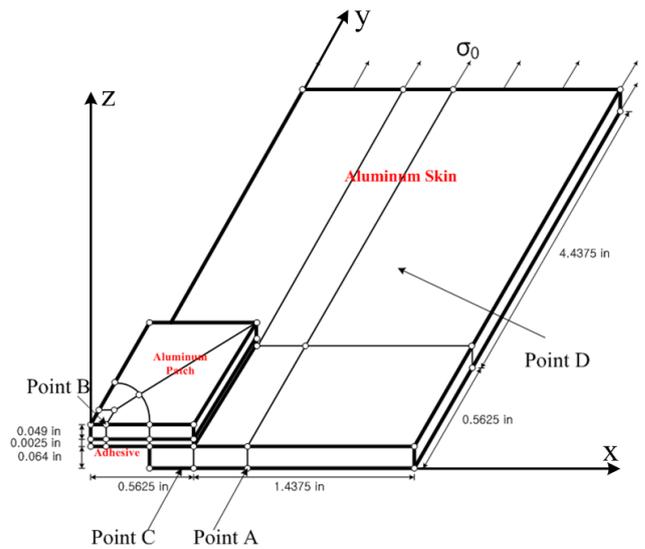


그림 6  $p$ -수렴 적층모델에 의한 유한요소 모델링

표 1 게이지 부착위치의 좌표

Gauge Label	Coordinate	Location(in)
Point A	x	0.7188
	y	0.0000
	z	0.0000
Point B	x	0.1563
	y	0.0000
	z	0.1155
Point C	x	0.4688
	y	0.0000
	z	0.0000
Point D	x	0.9375
	y	1.9375
	z	0.0635

3.0이다(Pilkey, 1997). 물론, 판의 크기와 원공의 크기에 따른 크기효과(size effect)에 따라 다소 달라질 수는 있다. 먼저 본 연구에서 제안하는  $p$ -수렴 완전층별모델의 타당성을 검증하기 위하여 Barut(2002)의 실험값 및 3차원 유한요소 해석값과 비교하였다. Barut(2002)은 ANSYS 프로그램(SOLID 45 BRICK ELEMENT) 해석을 수행하였는데, 사용된 3차원 고체요소는 23,008개이며, 86,741개 순자유도를 사용하였다. 상당한 수준의 요소수는 주로 원공의 기하형상을 표현하는데 사용되었고, 아울러 적절한 변장비를 유지하기 위해 얇은 접착재부분을 매우 잘게 분할하는 것에 기인하였다. 이에 비해 본 연구에서는  $p$ -수렴 완전층별이론에 기초를 둔 적층요소는 불과 17개의 요소와 4,740개의 순자유도를 사용하면서 모델링의 간편성과 해석의 경제성을 추구할 수 있었다. 그 이유는 원공의 기하형상을 표현하기

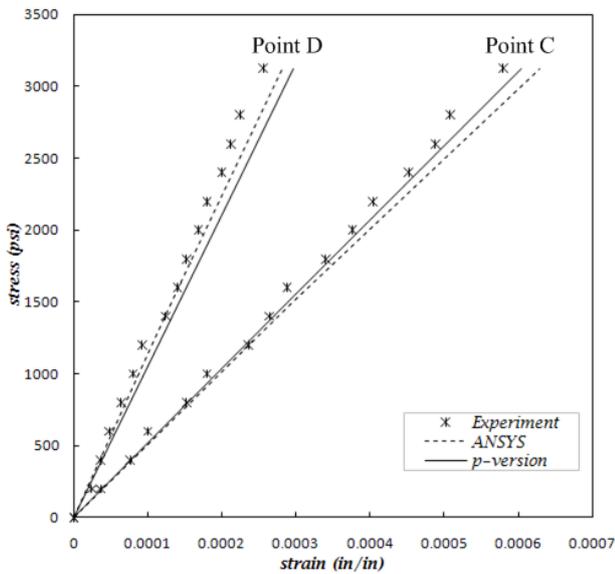


그림 7 게이지위치 Point C와 Point D에서의 응력-변형을 선도 비교

표 2 게이지 부착지점에서의 연직처짐 비교(단위 : in)

Location	Experiment	ANSYS (SOLID45)	p-Convergent Model
Point A	0.01125	0.01021	0.01085
Point B	0.01357	0.01025	0.01002

위해 초유한사상(transfinite mapping)기법을 사용하여 잘게 쪼개지 않은데 첫 번째 이유가 있다. 또, 제안하는 적층모델이 면내좌표함수와 두께방향 좌표함수의 선형조합으로 변위를 표현할 수 있기 때문에 2차원 형태의 입력자료구조를 가지므로 범용 3차원 유한요소모델에 비해 단순한 입력자료를 요구하는 것이 두 번째 이유이고, 계층적  $p$ -수렴 유한요소소는 매우 큰 변장비에도 민감도가 높지 않다는 통용성(robustness)의 장점(Woo, 1993)을 갖는다는 것이 세 번째 이유가 된다.

그림 6에는 제안한  $p$ -수렴 적층모델을 사용한 유한요소 모델링과 표 1은 Barut(2002)이 직접 실험을 위해 장착한 보강판에서의 게이지(gauge) 위치를 나타낸 것이며, 기준좌표축은 그림 6과 같다. 동일한 게이지 부착위치에서 Barut(2002)는 ANSYS 해석을 통한 수치해석값도 제시하였다. 본 연구에서도 제안한 모델의 해석값은 이 위치에서의 변위값 및 응력값과 비교하여 수치해의 적정성을 검증하고자 하였다.

그림 7은 Point C와 Point D에서의 응력-변형을 관계를 비교한 것으로 Barut(2002)의 실험값과 ANSYS 유한요소 해석값과 본 해석에서 사용된  $p$ -수렴 완전층별 모델의 해석값이 서로 비교되어 있다. 이 결과로부터 제안된  $p$ -수렴 완

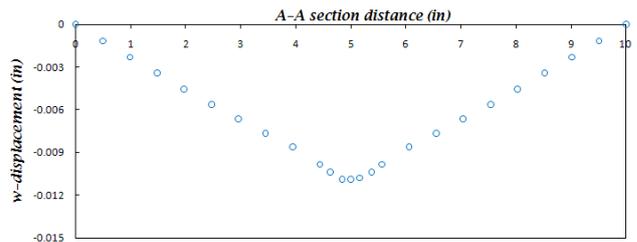


그림 8 정사각형 패치의 경우 A-A 단면에서 연직처짐 형상

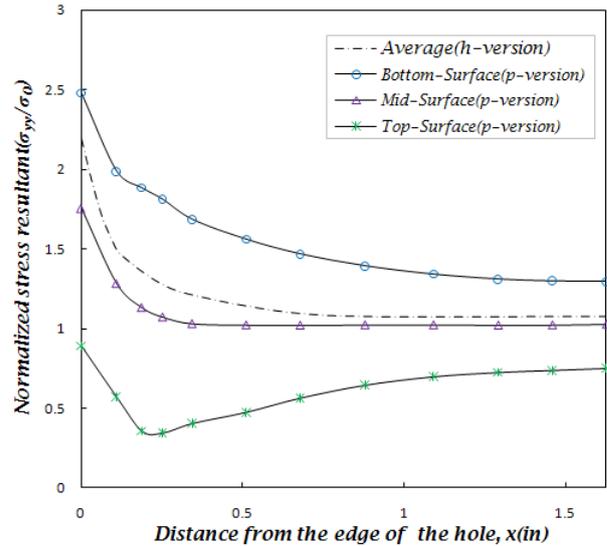


그림 9 정사각형 패치보강 전후의 두께방향에 따른 정규응력 분포 선층별 모델의 정확성은 입증되고 있음을 보여준다. 표 2는 모재부의 Point A 지점과 패치부의 Point B 지점에서의 처짐을 비교한 것이다. 표 2에서 보듯이 제안된 모델의 처짐값은 ANSYS(SOLID45)와 거의 유사한 값을 보여준 반면, Barut(2002)의 실험값과는 약간의 오차를 보여주고 있다. 이 결과로 볼 때 제안된 모델은 ANSYS 해석값과는  $\pm 5\%$ 이 내의 상대오차를 보여줌을 알 수 있다.

그림 5의 정사각형패치에서 모재의 폭 중앙을 따라 높이 방향인 A-A 단면에서의 모재부분의 바닥에서의 연직처짐이 그림 8에 도시되었다. 패치보강 전에는 모재가 순수하게 면내력만 받기 때문에 처짐은 전혀 발생되지 않는다. 그러나, 패치보강후 보강된 알루미늄 모재의 거동은 적층판의 중립축이 이동하게 되며, 새로운 중립축에 대해 인장 및 압축응력이 유발되기 때문에 면외 휨효과(out-of-plane bending effect)가 발생된다. 이를 확인하기 위해 그림 8과 같이 연직처짐을 조사한 결과 보강판 중앙에서의 최대 연직처짐이 0.01085 in로 추가로 발생됨이 확인되었다. 이 결과는 실제로 패치보강에 따른 휨이 발생되고 있음을 입증하는 것이다. 이러한 이유로 두께방향으로 모재의 원공주위에서의 응력집중계수  $K$ 는 일정하지 않고 변화하게 된다. 정사각형 패치의

경우 두께방향에 따른 응력집중계수  $K$ 와 모재의 원공주위에 서의 정규응력(normalized stress resultant:  $\sigma_{yy}/\sigma_o$ ) 분포를 그림 9에 도시하였다. 패치보강전(unpatch)의  $K$ 를 3.0으로 기준할 때, 패치보강후의  $K$ 는 모재의 중립면(mid-surface)에서 약 30~40% 감소하였으며, 모재와 패치 접착부(top-surface)에서는 면외 휨효과로 인하여 패치보강에 따른 인장효과로 인하여 약 70~80% 감소효과가 있었으며, 모재의 바닥부분(bottom-surface)에서는 패치보강효과와 압축효과로 인하여 약 10% 감소효과를 발생하였다. 이러한 면외 휨효과를 방지하기 위해서는 패치보강시 패치를 보강재의 양면에 대칭 적용하는 것이 가장 효율적인 방법이라고 알려져 있지만, 실제 적용시에는 대부분 한 쪽 면만의 접근이 가능한 경우가 대부분이어서 면외 휨효과에 따른 모재의 두께 방향에 따른 응력집중계수도 고려되어야 할 것이다.

### 3.2 패치보강 형태에 따른 보강효과

원공을 갖는 알루미늄 판의 패치보강 효과를 알아보고자 패치의 넓이를 동일하게 가정한 정사각형, 원형, 고리형(annular patch)의 3가지 패치형태로 나누어 해석하였다. 정사각형 패치모델과 원형 패치모델의 경우 17개의 요소를 사용하였고, 고리형 패치모델의 경우 11개의 요소를 사용하여 해석을 실시하였다. 각각의 모델들의 원공 부분에서의 모델링은 초유한사상을 사용하여 적은 요소로 기하형상을 정확하게 사상할 수 있었다. 그림 10에는 각각의 상세한 체눈설계를 도시하였다. 각 패치모델의 수렴성을 알아보고자  $p=1\sim 10$ 차까지의 해석을 실시하였으며, 그림 11의 Point A에서의 연직처짐에 대한 수렴성 조사결과  $p=6$ 차부터 수렴

이 시작되는 것을 알 수 있었다. 따라서, 본 연구에서는 세 모델 모두  $p=7$ 차로 고정하여 수치해석을 수행하였다.

각 패치별 해석에 대한 분석결과를 비교하기 위하여 Point A, Point B의 처짐값과 Point C, Point D에서의 정규응력(normalized stress resultant:  $\sigma_{yy}/\sigma_o$ )을 표 3에서 요약하였다. 여기서 고리형 패치보강의 경우 Point B에서의 처짐은 빈 공간이기 때문에 처짐을 구할 수 없다. 한편, 패치보강을 하였을 때 보강판의 강성도(stiffness)를 비교하기 위해 모재와 패치에서의 처짐을 비교하였다. 그 결과 원형패치모델이 강성도 측면에서 보강효과가 가장 큰 것으로 평가되었다. 그 다음으로 고리형과 정사각형 패치모델 순이다. 다음에는 패치보강후의 응력저감(stress reduction)을 평가하기 위해 모재파트인 Point C와 Point D에서의 정규응력값이 비교되었다. 이 경우에도 원형패치의 응력이 가장 크게 감소

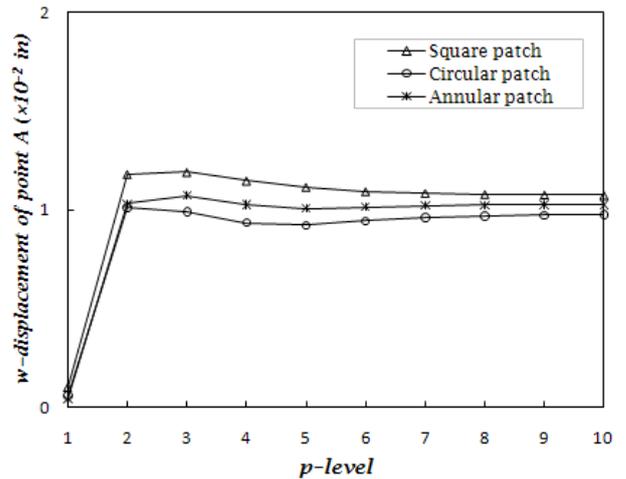


그림 11 패치모델에 따른 Point A에서의 연직처짐에 대한 수렴성 조사

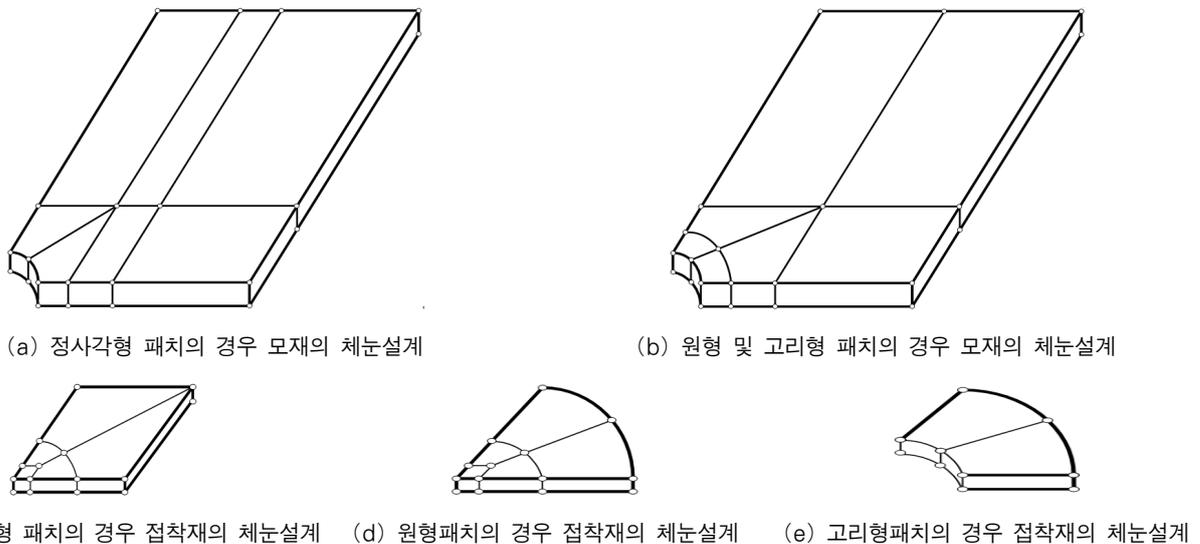


그림 10 패치보강 형태에 따른 유한요소 모델링

표 3 패치보강형태에 따른 게이지 부착위치에서의 처짐 및 응력비교

Location	Square	Circular	Annular
Point A(처짐)	0.01085 in	0.00963 in	0.01026 in
Point B(처짐)	0.01002 in	0.00906 in	-
Point C(응력)	2.07016 psi	1.87092 psi	2.25140 psi
Point D(응력)	0.99913 psi	0.97955 psi	1.00606 psi

됨을 알 수 있었다. 종합적 평가로 원형 패치보강이 가장 효율적 패치보강이 될 수 있음을 알 수 있었다.

그림 12에서는 패치 보강 전후에 대한 모재 부분에서의 응력분포를 비교하였다. 그림 12에서 보듯이 패치보강이후에는 원공주위에서의 높은 응력집중을 보이던 부분이 없어졌으며 전반적으로 낮은 응력분포를 보이고 있으며, 패치 보강효과로 인한 응력분배가 된 양상을 쉽게 알 수 있다. 또한 응

력분포의 양상 또한 앞서 살펴본 Point C, Point D의 응력 감소와 유사하게 원형, 정사각형, 고리형 순으로 응력감소 경향을 보여주고 있다. 이를 보다 자세히 분석하기 위해 그림 13에서는 패치보강 전후에 원공주위에서의 정규응력(normalized stress resultant:  $\sigma_{yy}/\sigma_o$ ) 분포를 비교해 놓았다. 이 때 정규응력은 두께방향으로 다른 양상을 보이기 때문에 모재의 중립면에서의 정규응력값을 기준으로 하였다. 정사각형 패치와 원형 패치보강의 경우 패치보강 전보다 정규응력값이 약 40%의 감소효과가 발생하였으나, 고리형 패치의 경우 약 20%의 감소효과가 발생하였다는 것을 알 수 있다. 또한 원공 주변의 응력이 정사각형 패치, 고리형 패치에 비해 원형 패치 보강의 경우가 더욱 작게 나타난다는 것을 보아 효율적인 패치 보강 형태가 아닐까 생각 되어진다.

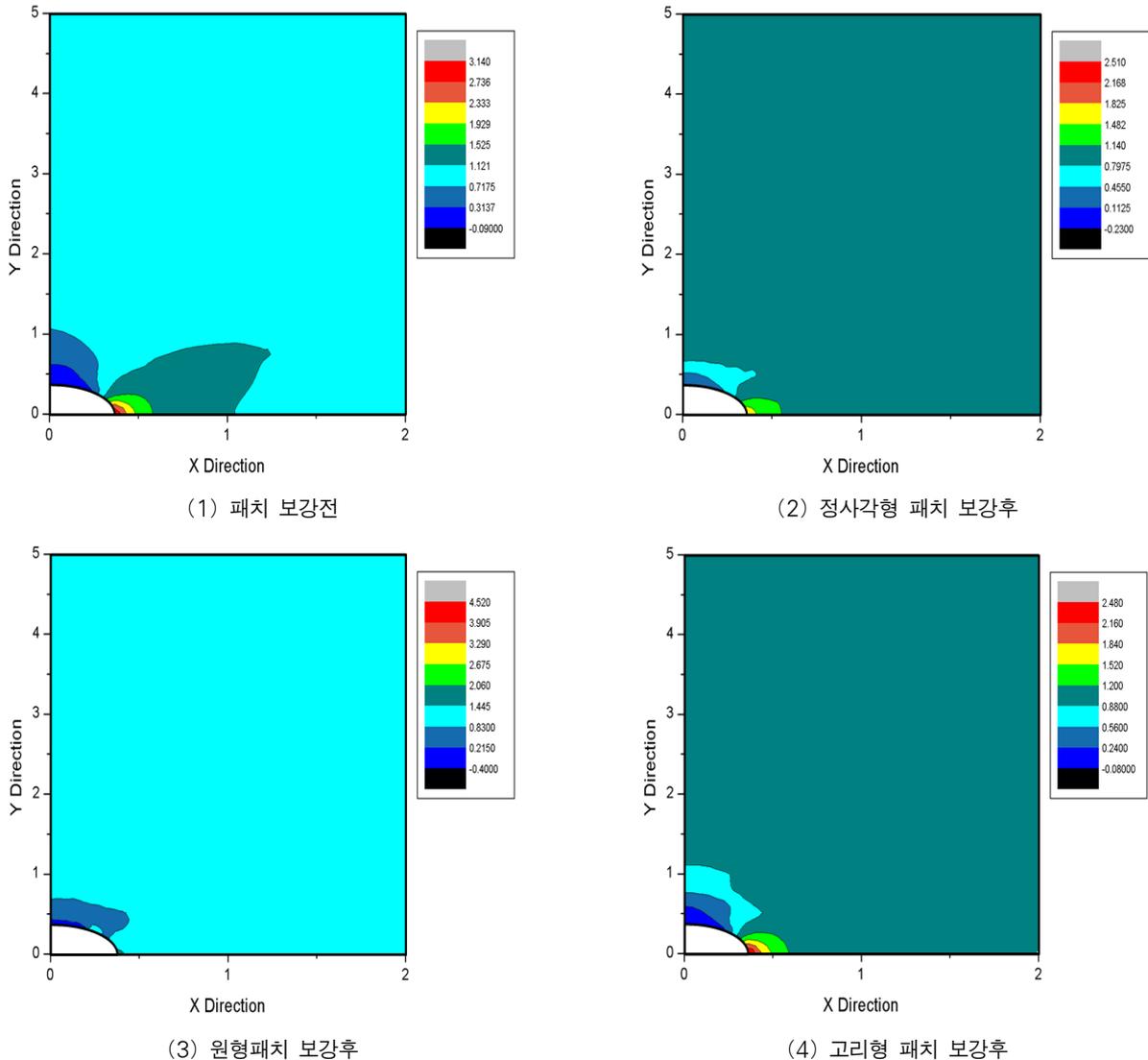


그림 12 패치보강 전후의 정규응력 분포

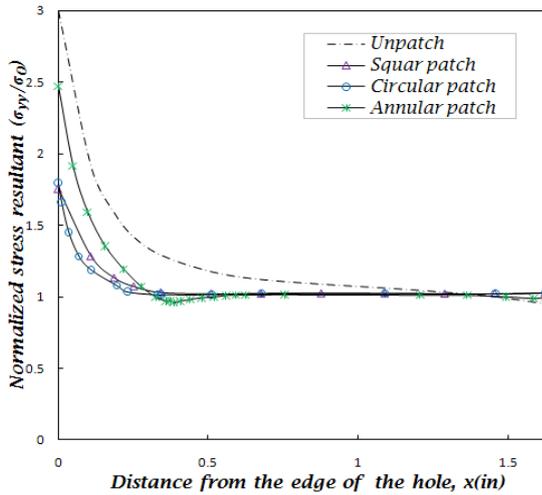


그림 13 모재 중립면을 기준으로 할 때 원공주위로부터의 정규응력 분포

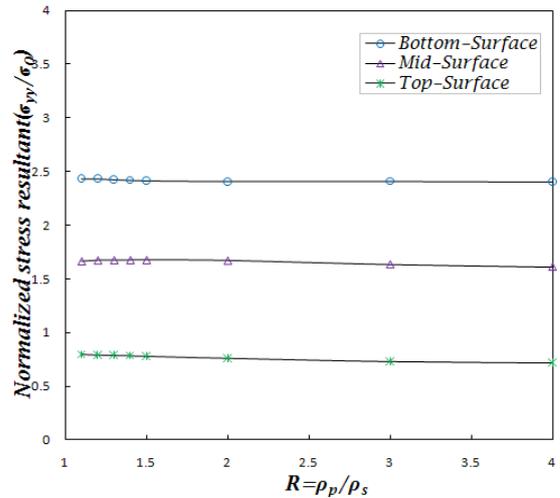


그림 15 원형 패치보강의 경우 패치크기에 따른 정규응력의 변화

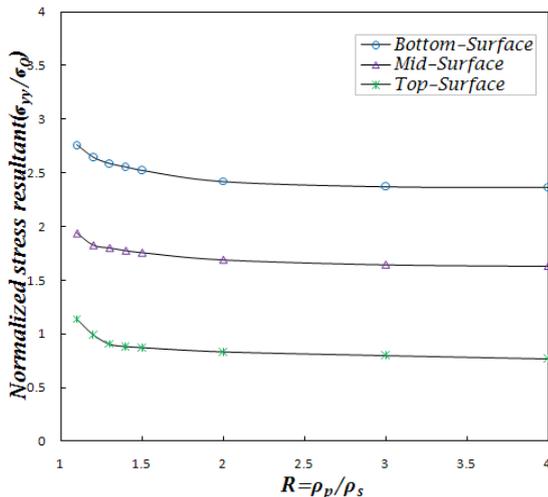


그림 14 정사각형 패치보강의 경우 패치크기에 따른 정규응력의 변화

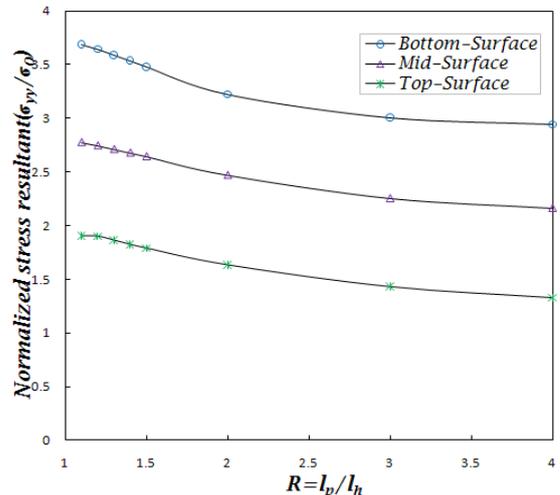


그림 16 고리형 패치보강의 경우 패치크기에 따른 정규응력의 변화

### 3.3 패치크기에 따른 보강효과

최적의 패치설계를 위해 원공의 크기( $\rho_s$ )의 크기에 비례하여 ( $R = \rho_p/\rho_s$ )를 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2.0, 3.0, 4.0로 패치크기를 증가함에 따른 보강효과를 분석하였다. 어느 정도의 패치크기에 도달하면 보강효과는 미미할 것이라는 예측아래 해석을 실시하였다. 정사각형 패치보강의 경우  $R = 1.4$ 일 경우 패치보강 효과가 그 이상의 크기에서의 보강효과와 비슷하게 나타나는 것을 그림 14를 통해 알 수 있다. 원형패치의 경우  $R = 1.2$ 일 경우가 효율적이라고 할 수 있다. 고리형패치의 경우 패치보강의 효과를 발휘하게 위해서는  $R = 2.8$ 이상의 경우에는 보강효과에 변화가 없음을 알 수 있다. 그림 14, 그림 15, 그림 16에서 알 수 있듯이 패치종류

와 패치크기에 따라 패치보강 효과가 서로 상이하다는 것을 알 수 있다. 그로 인해 원공을 갖는 알루미늄 판에 패치보강 시 패치크기의 영향도 고려하여야 할 것이다.

### 4. 결론 및 고찰

원공을 갖는 알루미늄 판의 패치보강효과에 대해 p-수렴 완전층별이론에 기초를 적층모델을 제안하여 평가하였다. 본 연구를 통해 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

- ① p-수렴 완전층별이론을 사용하여 기존의 2차원 해석에서 검토하기 어려웠던 면외 휨 효과(out-of-plane bending effect)의 영향을 3차원적으로 분석할 수 있었다. 즉, 패치보강 전에는 순수하게 면내력만 발생되었으나, 일면 패치보강시에는 중립축의 변화에 따라 인

장응력과 압축응력이 동시에 발생되어 휨을 유발한다. 실제 패치보강후에는 0.011in의 연직처짐이 추가로 발생됨이 확인되었다. 또한 모재의 두께방향에 따라 휨 효과에 기인하여 응력집중계수 및 원공주위의 응력분포의 차이를 보여 준다.

- ② 초유한사상을 사용하여 원공주위의 기하형상 표현을 하였으며,  $p$ -수렴방식의 계층적 유한요소는 변장비에 대한 강건성이 뛰어나므로 유한요소 해석모델에 소요된 요소의 개수는 ANSYS 프로그램해석(23,008 요소, 86,741 순자유도)에 비해 불과 17개 요소(4,740순자유도)만이 사용되어 모델링의 단순성이 입증되었다.
- ③ 패치보강 형태는 정사각형, 원형, 고리형 패치형태가 검토되었는데 원형패치보강이 처짐과 응력집중계수의 감소 등을 종합적으로 비교하였을 때 가장 효율적인 것으로 평가되었다.
- ④ 실무에서 원공을 갖는 알루미늄 판에 패치크기를 결정할 때 정사각형 패치보강의 경우, 원공의 크기 1.4배 이상, 원형 패치보강의 경우 원공의 크기에 1.2배 이상, 고리형 패치보강의 경우 원공의 크기 2.8배 이상이면 충분한 것으로 평가되었다.

### 감사의 글

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구(KRF-2007-313-D00778) 되었으므로 귀 재단에 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

- 우광성 (1992) Transfinite Interpolation Technique for  $p$ -Version of F.E.M., 한국전산구조공학회 논문집, 5(1), pp.75~82.
- 우광성, 한상현, 양승호 (2008)  $p$ -수렴 적층 평판이론에 의한 균열판의 패치보강 후 응력확대계수 산정, 대한토목학회 논문집, 28(5A), pp.649~656.
- 홍중현, 우광성, 신영식 (1996) 계층적  $C^0$ -요소에 의한 보강판의  $p$ -Version 유한요소모델, 한국전산구조공학회 논문집, 9(1), pp.33~45.
- 홍중현, 박진환, 우광성 (2002) 기하 및 재료비선형을 갖는 적층평판의  $p$ -Version 유한요소해석, 한국전산구조공학회 논문집, 13(2), pp.221~230.
- Barut, A., Hanauska, J., Madenci, E., Ambur, D.R. (2002) Analysis method for bonded patch

repair of a skin with a cutout, *Computers & Structures*, 55, pp.277~294.

- Bezzerrouki, M., Bouiadjra B.B., Quinas D. (2008) SIF for cracks repaired with single composite patch having two adhesive bands and double symmetric one in aircraft structures. *Computational Materials Science*, 44, pp.542~546.
- Chu, R.C., Ko, T.C. (1989) Isoparametric Shear Spring Element Applied to Crack Patching and Instability, *Theoretical & Applied Fracture Mechanics*, 11, pp.93~102.
- Ellyin, F., Ozah, F., Xia, Z. (2007) 3-D modelling of cyclically loaded composite patch repair of a cracked plate, *Computers & Structures*, 78, pp.486~494.
- Jone, R., Callinan, R.J. (1979) Finite Element Analysis of Patched Cracks, *Structural Mechanics*, 7(2), pp.107~130.
- Mitchell, R.A., Wooley, R.M., Chivirut, D.J. (1975) Analysis of Composite Reinforced Cutouts and Cracks, *AIAA Journal*, 13(6), pp.107~130.
- Nabouli, S., Mall, S. (1998) Modeling of a cracked metallic structure with bonded composite patch using the three layer technique. *Composite Structures*, 35, pp.295~308.
- Pilkey, Walter D. (1997) *Peterson's stress concentration factors*, John Wiley & Sons, Inc.
- Reddy, J.N. (1997) *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press.
- Saikat Dey, Mark S. Shephard, Joseph E. Flaherty (1997) Geometry representation issues associated with  $p$ -version finite element computations, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 150, pp.39~55.
- Schwartz, M (1966) *Numerical Mathematical Analysis*, Hopkins Press.
- Seo, D.C., Lee, J.J. (2002) Fatigue crack growth behavior of cracked aluminum plate repaired with composite patch, *Computers & Structures*, 57, pp.323~330.
- Strang, G., Fix, G.J. (1973) *An analysis of the finite element method*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall
- Sun, C.T., Klug, J., Arendt, C. (1996) Analysis of cracked aluminum plates repaired with bonded composite patches. *AIAA J*, 34, pp.369~374.
- Swenson D., James M. (1998) FRANC2D/L:

Version 1.4 User's Guide.

**Tarn, J.Q., Shek, K.L.** (1991) Analysis of Crack Plates with a Bonded Patch, *Engineering Fracture Mechanics*, 40, pp.1055~1065.

**Woo, K.S.** (1993) A robustness of hierarchical element formulated by integrals of Legendre polynomials, *Computers & Structures*, 49(3), pp.421~426.