

# 제진 평판 진동에 대한 파워흐름해석<sup>#</sup>

## Power Flow Analysis of Vibration of a Plate Covered with a Damping Sheet

이진영\*·길현권\*\*·송지훈†·홍석윤\*\*\*

Jin-Young Lee, Hyun-Gwon Kil, Jee-Hun Song and Suk-Yoon Hong

(2009년 4월 2일 접수 ; 2009년 4월 17일 심사완료)

**Key Words** : Power Flow Analysis(파워흐름해석법), Loss Factor(손실계수), Medium-to-high Frequency(중고주파수), Plate with a Damping Sheet(제진 평판)

### ABSTRACT

In this paper, the power flow analysis(PFA) has been used to analyze the vibration of a plate covered with a damping sheet. Experiments have been performed to measure the loss factor and frequency response functions of the plate covered with the damping sheet. The data for the loss factor has been used as the input data to predict the vibration of the coupled plates with PFA. The comparison between the experimental results and the predicted PFA results for the frequency response functions has been performed. It showed that PFA can be effectively used to predict structural vibration of a plate covered with a damping sheet in medium-to-high frequency range.

### 1. 서론

복합구조물에서 진동에너지는 진동원으로부터 구조요소를 따라 전파되어 고체음을 발생시킨다. 진동을 제어하여 고체음을 줄이기 위하여서는 저주파수 영역 뿐 아니라 중고주파수 영역에서의 진동에너지의 공간적 분포와 에너지 흐름의 경로를 알기 위한 해석이 필수적이다.

진동 해석을 위한 기존의 해석법인 유한요소법(finite element method, FEM)<sup>(1)</sup>의 경우, 주파수가 증가할수록 해석 비용과 시간이 기하급수적으로 증

가하고 해석 결과 또한 불확실성의 증가로 인하여 중고주파수 영역에서는 신뢰성이 떨어진다. 통계적 에너지해석법<sup>(2)</sup>의 경우 고주파수 영역에서 사용되고 있으나, 구조물 각 요소의 진동에너지에 대한 공간적인 평균값만을 제공하고, 모델링에 따라 해석 결과의 차이가 있을 수 있는 단점이 있다. 이러한 한계점을 보완하기 위하여 제안된 방법으로서 파워흐름해석법(power flow analysis, PFA)<sup>(3)</sup>을 들 수가 있다. 이 방법은 진동에너지 흐름 형태에 따른 에너지 지배방정식을 활용함으로써 진동에너지의 공간적인 분포와 전달 경로인 파워 분포 등을 예측 할 수 있는 방법이다. 이러한 파워흐름해석법은 주로 고주파수 대역에서 적용되어지나, 중주파수 영역에까지 확대 적용될 수 있는 방법으로 인식되어 왔으며, 다양한 구조 모델 자체의 진동 해석을 위하여 적용되어 왔다<sup>(4-6)</sup>. 이 논문에서는 파워흐름해석법의 적용 확장을 위하여 평판 모델 자체에 제진재를 부착한 제진 평판 진동 해석을 수행하고, 파워흐름해석법에 의한 예측 결과의 타당성을 검증하기 위하여 실험

† 교신저자; 정회원, 서울대학교 조선해양공학과  
E-mail : jhs1227@snu.ac.kr  
Tel : (02)880-7331, Fax : (02)888-9298

\* 정회원, (주)에이.브이.티

\*\* 정회원, 수원대학교 기계공학과

\*\*\* 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

# 이 논문은 2008 추계 소음진동 학술대회에서 우수논문으로 추천되었음.

연구를 수행하였다. 이 논문의 실험에서는 자유 지지되어 진동하는 제진 평판의 내부손실계수를 측정하여, 파워흐름해석법의 입력 데이터로 활용하였다. 그리고 제진 평판의 여러 지점에 대한 주파수응답 함수(frequency response function, FRF)를 측정하고 파워흐름해석법에 의한 예측 결과와 비교를 하였다. 이러한 비교를 통하여, 파워흐름해석법이 중고주파수 대역의 제진 평판의 진동을 해석하기 위하여 효과적으로 활용될 수 있음을 보였다.

## 2. 파워흐름해석(PFA)

면의 방향의 가진력에 의하여 발생하는 구조 진동의 경우 면외 파동인 굽힘파의 전파에 의하여 발생된다. 파워흐름해석법에서 굽힘파가 발생 시키는 진동에 대한 진동에너지 방정식은, 중고주파수 대역의 각진동수  $\omega$  에서 굽힘파의 한 파장에 대한 공간 평균 및 한 주기 당 시간 평균 진동에너지 밀도  $\langle e \rangle$  를 고려하면 다음과 같이 표시된다<sup>(6)</sup>.

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle e \rangle + \eta\omega \langle e \rangle = \Pi_{in} \quad (1)$$

여기서  $\eta$  는 구조감쇠에 의한 내부손실계수,  $c_g$  는 굽힘파의 에너지 전파 속도, 그리고  $\Pi_{in}$  는 가진력에 의한 입력 파워를 나타낸다. 또한 진동 인텐시티 벡터는  $\langle \mathbf{q} \rangle$  는 다음과 같이 진동에너지 밀도로 표시된다<sup>(6)</sup>.

$$\langle \mathbf{q} \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \langle e \rangle \quad (2)$$

그러므로 식 (1)과 (2)에 해당 구조물의 경계에서의 경계조건을 적용함으로써 진동에너지 밀도와 진

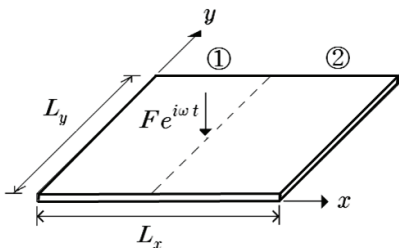


Fig. 1 A plate covered with a damping sheet excited by a point force

동인텐시티 벡터를 구할 수 있게 된다.

제진 평판의 경우에 제진재의 진동에 대한 영향은 평판의 내부손실계수의 증가 영향을 가져오게 된다. 그러므로 식 (1)에서 내부손실계수  $\eta$  값을 전체 제진 평판의 등가 내부손실계수 값으로 고려하고, 이러한 등가 내부손실계수 값은 실험을 통하여 구한 값을 활용할 수 있다. 이러한 경우, 증가된 내부손실계수 값을 갖는 평판 진동 자체의 진동에너지 밀도 해를 구하는 문제로 고려할 수 있으므로 다음과 같은 해석적 방법<sup>(5)</sup>을 적용할 수 있다. 적용 예로서 면외 가진력에 의하여 진동하는 자유 지지된 평판의 경우를 고려한다. Fig. 1과 같이 가진력에 의해 파워가 입력되는 위치를 기준으로 ①과 ②영역으로 나누어, 각 영역에서 굽힘파에 대한 진동에너지 밀도와 진동인텐시티를  $\langle e_j \rangle$  와  $\langle \mathbf{q}_j \rangle$  ( $j=1,2$ )으로 나누어 표시하기로 한다.  $x$  축에 평행한 경계선  $y=0$  와  $y=L_y$  을 따라 입력 파워가 없다고 가정할 수 있으므로, 각 영역에서 각 파동의 진동에너지 밀도는 cosine 급수로 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$\langle e_j \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_{nj}(x) \cos k_{ny} y \quad (3)$$

여기서  $k_{ny} = n\pi/L_y$ 이다. 그리고 식 (1)의 진동에너지 방정식으로부터  $E_{nj}$  은 다음과 같이 표현된다.

$$E_{nj}(x) = A_{nj}^+ e^{-k_n x x_j} + A_{nj}^- e^{k_n x x_j} \quad (4)$$

여기서

$$k_{nx}^2 = k_{ny}^2 + \left(\frac{\eta\omega}{c_g}\right)^2 \quad (5)$$

그러므로 진동에너지 밀도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\langle e_j \rangle = \langle e_j \rangle^+ + \langle e_j \rangle^- \quad (6)$$

여기서 첨자 +와 -는 +x 와 -x 방향으로의 진동에너지 전달을 의미하며,  $\langle e_j \rangle^+$  와  $\langle e_j \rangle^-$  는 다음과 같이 표현된다.

$$\langle e_j \rangle^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nj}^{\pm} e^{\mp k_n x x_j} \cos k_{ny} y \quad (7)$$

이러한 관계들을 이용하면, 진동인텐시티 성분의 일반해도 식 (2)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$\langle q_{jx} \rangle = \langle q_{jx} \rangle^+ - \langle q_{jx} \rangle^- \quad (8)$$

$$\langle q_{jy} \rangle = \langle q_{jy} \rangle^+ - \langle q_{jy} \rangle^- \quad (9)$$

여기서

$$\langle q_{jx} \rangle^\pm = \frac{c_g^2}{\eta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,j}^\pm k_{nx} e^{\mp k_{nx}x_j} \cos k_{ny}y \quad (10)$$

$$\langle q_{jy} \rangle^\pm = \frac{c_g^2}{\eta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,j}^\pm k_{ny} e^{\mp k_{nx}x_j} \sin k_{ny}y \quad (11)$$

점가진력에 의한 입력 파워도 진동에너지 밀도와 마찬가지로  $y$ 의 cosine급수로 전개되어진다. 지점  $(x_o, y_o)$ 에 작용하는 점가진력에 의한 파워의 시간 평균값은 다음과 같이 표시된다.

$$\langle \Pi_{in} \rangle \delta(x-x_o) \delta(y-y_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(x) \cos k_{ny}y \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Pi_n(x) &= \frac{\Pi_n}{L_y} \delta(x-x_o) \quad (n=0) \\ &= 2 \frac{\Pi_n}{L_y} \cos k_{ny}y_o \delta(x-x_o) \quad (n \neq 0) \end{aligned} \quad (13)$$

입력 파워의 시간 평균값은 가진 지점의 임피던스  $\tilde{Z}$ 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Pi_m = \frac{1}{2} |\tilde{F}|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\tilde{Z}^*} \right\} \quad (14)$$

여기서  $\tilde{F}$ 는 가진력의 복소 크기 그리고 \*은 공액 복소수를 나타낸다. 임피던스  $\tilde{Z}$ 의 경우, 중고주파수 영역을 고려하는 경우, 무한 평판에 대한 임피던스 값<sup>(2)</sup>을 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$\tilde{Z} = 8 \sqrt{B\rho h} \quad (15)$$

여기서  $B = h^3/[12(1-\nu^2)]$ ,  $h$ 와  $\nu$ 는 평판의 두께와 Poisson비를 각각 나타낸다.

진동에너지 밀도 해를 구하기 위해서는, 두 영역

을 고려하면  $n$ 번째 성분에 대하여 총 4개의 미지수  $A_{n,j}^+, A_{n,j}^-$  ( $j=1,2$ )를 결정하여야 한다. 이들 미지수들은 다음과 같은 경계 조건들을 이용하여 결정할 수 있다. 먼저  $y$ 축에 평행한 모서리  $x=0$ 와  $x=L_x$ 에서 외부로부터 입력되는 파워가 없다는 조건으로부터 다음 두개의 관계식들을 얻는다.

$$\langle q_{1x} \rangle = 0, \quad \langle q_{2x} \rangle = 0 \quad (16)$$

또한 파워가 입력되는 위치, 즉 영역 Fig. 1의 ①과 ②의 경계선  $x=x_o$ 에서는 에너지 밀도의 연속성과 파워의 평형 조건을 다음과 같이 만족하여야 한다. 이로부터 다음과 같은 두개의 관계식을 얻는다.

$$\langle e_1 \rangle = \langle e_2 \rangle \quad (17)$$

$$\langle q_{2x} \rangle = \langle q_{1x} \rangle + \langle \Pi_{in} \rangle \delta(y-y_o) \quad (18)$$

그러므로 식 (16)~(18)의 조건들을 이용하여 각 영역에서의 진동에너지 밀도 해를 구할 수 있다. 그러면 진동 속도 제곱의 시간 평균값은 진동에너지 밀도 해로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{m_s} \langle e \rangle \quad (19)$$

여기서  $m_s$ 는 제진 평판의 단위 면적당 질량을 나타낸다.

### 3. 실험 해석

#### 3.1 실험 변수 측정 개념

제진 평판의 경우, 전체 평판에 걸쳐서 내부 손실계수의 값은 같다고 가정할 수 있으므로, 평판 전체를 하나의 진동 요소로 고려하여 내부손실계수를 측정하게 된다. 측정방법으로는 파워평형법(power balance method)<sup>(7)</sup>과 감쇠비율방법(decay rate method)<sup>(2)</sup>을 적용 하였다.

파워평형법을 이용하여 내부손실계수를 측정하기 위하여서는 파워평형조건, 즉 관심주파수 대역에서의 입력 파워는 내부손실에 의한 손실파워와 같다는 조건을 적용한다. 이와 같은 파워평형조건으로부터 주파수 대역의 평균 내부손실계수를 다음 식으로부터 결정할 수 있다<sup>(2)</sup>.

$$\eta = \frac{\Pi_{in}}{\omega E} \quad (20)$$

여기서  $\omega, \eta, \Pi_{in}$ 는 주파수 대역 중심주파수, 주파수 대역에 대한 평균 내부손실계수, 가진력에 의한 입력 파워 및 진동에너지지를 각각 나타낸다. 주파수 평균 입력 파워  $\Pi_{in}$ 는 가진점에서의 가진력과 속도 혹은 모빌리티를 측정함으로써 다음 식을 적용하여 결정할 수 있다.

$$\Pi_{in} = \frac{1}{2} Re[\tilde{F} \tilde{v}^*] = \frac{1}{2} |\tilde{F}|^2 Re[\tilde{Y}^*] \quad (21)$$

여기서  $\tilde{v}, \tilde{Y}(=1/\tilde{Z})$ 는 속도와 모빌리티의 복소 크기를 각각 나타낸다. 그리고 가진력에 의한 평판의 시간 평균 진동에너지는 평판의 속도 제곱의 시간 및 공간 평균값과 질량  $m$ 으로 다음과 같이 표현되므로

$$E = m \langle v^2 \rangle_{sp} \quad (22)$$

평판의 속도 분포를 측정하여 구할 수 있다. 여기서 첨자  $sp$ 는 공간 평균값을 나타낸다.

감쇠비율방법을 이용하여 내부손실계수를 측정하기 위하여서는 평판의 과도 응답을 고려한다. 충격 해머로 가진을 하여 가진이 완료되면 진동 응답은 주파수 대역의 중심 주파수  $\omega$ 에서  $e^{-\omega \eta t/2}$ 에 비례하여 감소하게 된다. 이러한 관계를 고려하면 내부손실계수는 감쇠 기울기로 표현되는 감쇠비율(decay rate)  $DR$ (dB/sec)로써 다음과 같이 표현된다<sup>(2)</sup>.

$$\eta = \frac{DR}{27.3 (\omega/2\pi)} \quad (23)$$

이 경우 진동 과도 응답 신호  $h(t)$ 에 따라서  $DR$  값을 결정하기에 어려움이 있으므로, 다음과 같은 Schroeder 적분<sup>(8)</sup>, 즉 역진적분(backward integration)  $L(t)$ 를 고려한  $DR$  값을 결정하여 사용하였다.

$$L(t) = 10 \log_{10} \frac{\int_t^{t_{max}} h^2(t) dt}{\int_0^{t_{max}} h^2(t) dt} \quad (24)$$

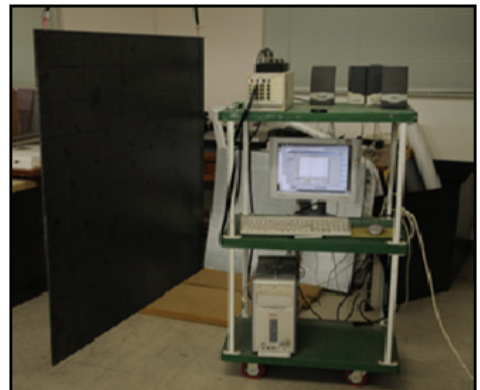
여기서  $t_{max}$ 는 과도 응답 신호가 감쇠하여 거의 신

호가 사라질 때까지의 시간을 의미한다.

### 3.2 실험 내용

실험 모델은 Fig. 2와 같이 평판에 제진재를 부착한 제진 평판이다. 평판의 재질은 강이며 평판 요소의 두께는 3.2 mm이며, 크기는 1 m×1 m이다. 제진 재료로서는 두께 2 mm 제진성 차음시트를 평판의 한쪽 전면에 부착하였다. 평판의 경계 조건으로는 자유지지를 고려하였다.

실험에서는 입력파워를 측정하기 위하여 가진 지점 3지점을 고려하고, 각 가진 지점에 대하여 모빌리티를 측정함으로써, 단위 가진력에 대한 입력 파워를 식 (21)에 의하여 측정하였다. 이 경우 1/3 옥타브 주파수 대역을 고려하여 각 주파수 대역에 대한 주파수 평균값을 고려하였다. 평판의 공간 및 시간 평균 진동энер지를 결정하기 위하여, 충격 해머



(a)



(b)

Fig. 2 (a) Experimental set-up, (b) a freely suspended plate covered with a damping sheet

를 이용하여 40지점을 차례로 가진 시키면서 주파수응답함수 값을 측정하였다. 이 경우 가역성의 원리를 이용하였기 때문에, 3가속계 부착 지점이 가진 지점이 되어, 한 가진 지점당 40개의 진동을 측정하므로 총 120지점을 고려한 공간 평균 진동에너지 값을 측정하게 된다. 이렇게 측정한 입력파위와 공간 및 시간 평균 진동에너지를 활용하여 파워평형법인 식 (20)에 의하여 내부손실계수를 결정하였다. 또한 감쇠비율방법을 적용하여 내부손실계수를 측정하기 위하여 식 (23)을 적용하였으며, 120지점에 대한 과도 진동 응답을 이용하여 각 주파수 대역에 대한 공간 평균 DR 값을 결정하여 활용하였다. 이 연구의 실험에서는 모든 측정 변수에 대하여 1/3 옥타브 주파수 대역에 대한 값을 고려하였다.

#### 4. 결과 및 고찰

Fig. 3은 파워평형법과 감쇠비율방법을 이용하여 측정된 제진 평판의 내부손실계수의 측정값을 보여 준다. 두 방법에 의한 내부손실계수 측정값은 주파수 80 Hz 이상에서는 유사한 경향을 보이고 있음을 알 수 있다. 파워평형법의 경우, 주파수 80 Hz 미만의 저주파수 대역에서 내부손실계수 측정값의 주파수에 따른 변화 폭이 크게 나타나고 있다. 이러한 이유는 파워평형법의 경우 제진 평판의 공간 평균 진동에너지를 측정하게 되는데, 1/3 옥타브 주파수 대역을 고려한 저주파수 대역에서는 해당 주파수 대역의 폭이 좁아 진동 모드의 영향을 상대적으로 많이 받는 것으로 사료된다. 그리고 감쇠비율방법을 고려하는 경우, 내부손실계수 값은 주파수 증가와 함께 감소하다가 주파수 200~3000 Hz에서는 0.008 ~0.01의 값을 가짐을 알 수 있다.

Fig. 4와 5는 충격 해머 가진에 의하여 실험으로 구한 주파수응답함수(FRF= $v/F$ , =속도/가진력) 결과와 파워흐름해석법을 이용하여 구한 예측 값을 비교하고 있다. 실험결과와 두 가진 지점을 각각 가진 하면서 서로 다른 4지점에서 측정된 주파수응답함수 값을 나타낸다. 실험결과와 파워흐름해석 결과를 비교하여 보면, 약 200 Hz 이상부터는 파워흐름해석 결과가 실험 결과를 잘 예측하고 있음을 알 수가 있다. 또한 약 100 Hz까지도 주파수 의존도를 비교적 잘 예측하고 있음을 알 수 있다. Fig. 6은

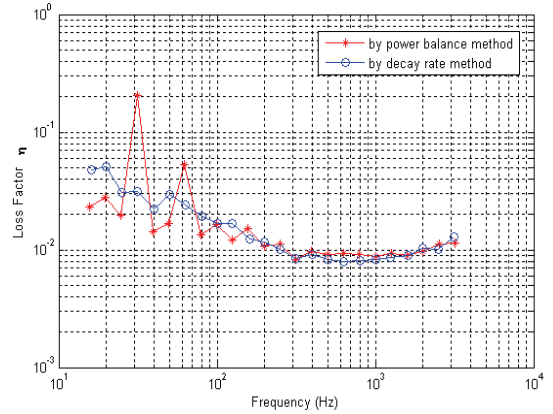
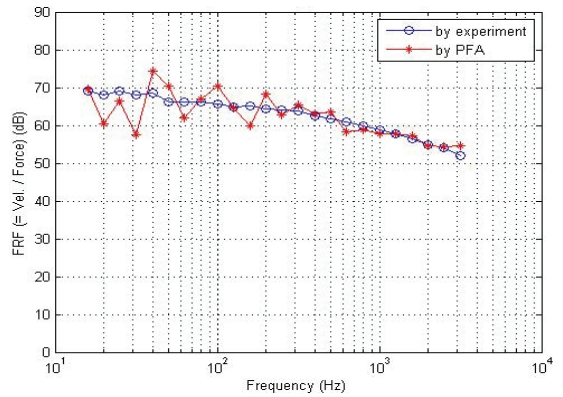
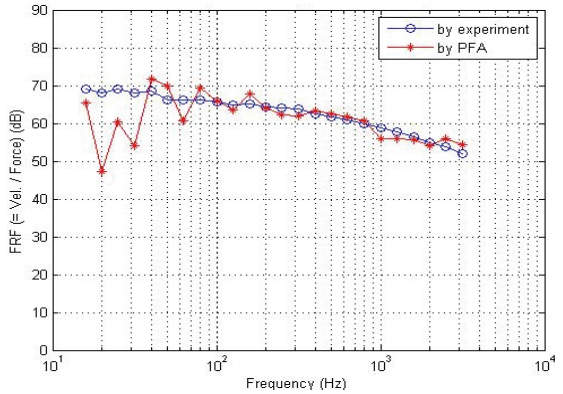


Fig. 3 Comparison of experimental results for loss factor by power balance method and decay rate method

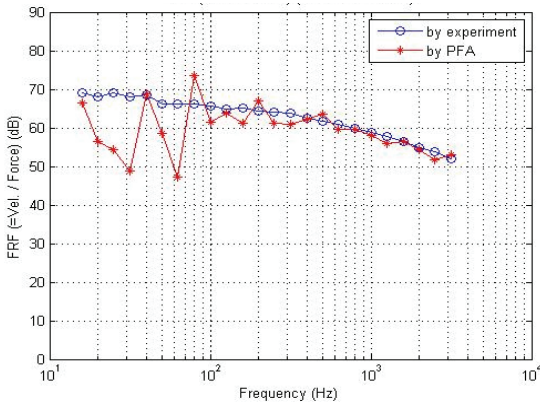


(a)

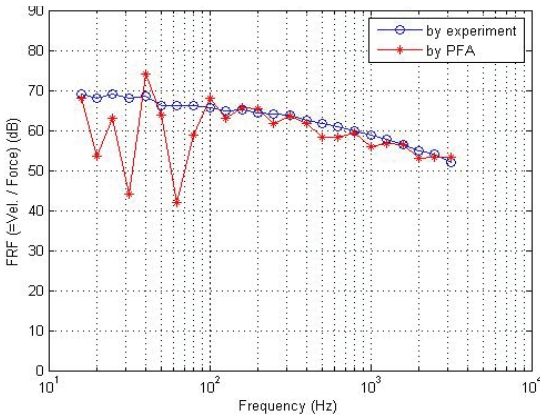


(b)

Fig. 4 Comparison between experimental result and predicted PFA result for FRF(considering excitation point (x = 0.36 m, y = 0.79 m), (a) at a point (x = 0.30 m, y = 0.88 m), (b) at a point (x = 0.64 m, y = 0.78 m)

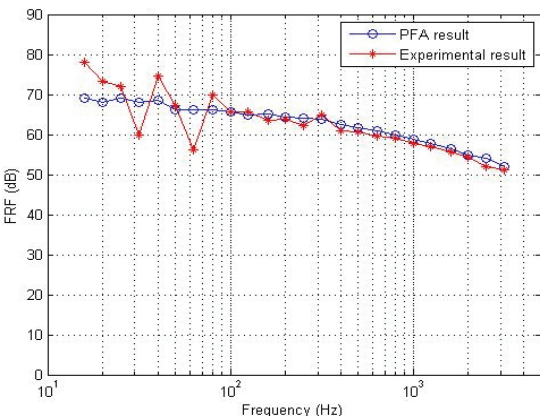


(a)



(b)

**Fig. 5** Comparison between experimental result and predicted PFA result for FRF(considering excitation point (x=0.33 m, y=0.35 m), (a) at a point (x=0.55 m, y=0.48 m), (b) at a point (x=0.56 m, y=0.27 m)



**Fig. 6** Comparison between experimental result and predicted PFA result for space-averaged FRF

40지점에서 측정된 주파수응답함수에 대한 공간 평균값을 나타낸다. 실험값과 파워흐름해석 결과를 비교하여 보면, 100 Hz 이상부터는 파워흐름해석 결과가 실험 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

## 5. 결 론

이 논문에서는 제진 평판 진동을 해석하기 위하여 파워흐름해석법을 적용하였다. 또한 예측 결과의 타당성을 검증하기 위하여 실험 연구를 수행하였다. 실험적 연구에 있어서는 제진 평판의 진동 특성을 나타내는 내부손실계수 값을 측정하여 파워흐름해석법을 위한 입력 데이터로 활용하였다. 그리고 주파수응답함수를 실험으로 측정하고 파워흐름해석법에 의한 예측 값과 비교하였다. 이러한 비교로부터 파워흐름해석법이 중고주파수 영역에서 제진 평판의 진동응답을 예측하기에 효과적으로 활용될 수 있음을 보였다.

## 참 고 문 헌

- (1) Zienkiewicz, O. C., 1977, "The Finite Element Method," McGraw Hill Book Co.
- (2) Lyon, R. H., 1975, "Statistical Analysis of Dynamic Systems: Theory and Applications," MIT Press.
- (3) Belov, V. D., Rybak, S. A. and Tartakovskii, B. D., 1977, "Propagation of Vibrational Energy in Absorbing Structures," Journal of Soviet Physics Acoustics, Vol. 23, No. 2, pp. 115~119.
- (4) Bouthier, O. M. and Bernhard, R. J., 1992, "Models of Space-averaged Energetics of Plates," American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 30, No. 3, pp. 616~623.
- (5) Park, D. H., Hong, S. Y. and Kil, H. G., 1998, "Vibration Power Flow Analysis of Coupled Co-planar Rectangular Plates," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 8, No. 6, pp. 1053~1061.
- (6) Choi, J. S., Kil, H. G. and Hong, S. Y., 2001, "Power Flow Analysis of Vibration of Coupled Plates Excited by a Point Force In an Arbitrary

Direction,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 3, pp. 181~192.

(7) Brown, K. T. and Norton, M. P., 1985, “Some Comments of the Experimental Determination of Modal Densities and Loss Factors for Statistical

Analysis Applications,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, pp. 588~594.

(8) Cremer, L. and Mülle, H. A., 1982, “Principles and Applications of Room Acoustics,” Applied Science Publishers, New York.