

# 이등변삼각형 단면을 갖는 파이프 내의 pseudo-plastic 유체유동에 대한 압력강하의 연구

## Investigation of Pressure Drop for a Pseudo-plastic Fluid Flow in Isosceles Triangle Pipes

이 동 렬  
D. R. Lee

(접수일 : 2009년 1월 12일, 수정일 : 2009년 3월 16일, 채택확정 : 2009년 3월 18일)

**Key Words** : Pseudoplastic Fluid(의소성 유체), Modified Power Law(수정멱법칙), Non-Newtonian Fluid(비뉴턴 유체), Friction Factor(마찰계수), Shear Rate Parameter(전단율 파라메타), Isosceles Triangle Pipe(이등변 삼각형 파이프)

**Abstract** : Numerical Calculations for dimensionless pressure drop (friction factor times Reynolds number) have been obtained for fully developed laminar flow of MPL(Modified Power Law) fluid in isosceles triangle pipes. The solutions are valid for Pseudoplastic fluids over a wide range from Newtonian behavior at low shear rates through transition region to power law behavior at higher shear rates. The analysis identified a dimensionless shear rate parameter which for a given set of operating conditions specifies where in the shear rate range a particular system is operating, i.e., Newtonian, transition or power law region. The numerical calculation data of the dimensionless pressure drop for the Newtonian and power law regions are compared with previously published asymptotic results presenting within 0.16 % in Newtonian region and 2.98 % in power law region.

### 기호 설명

<p>a : 이등변삼각형의 밑변의 길이 [m]</p> <p>a<sup>+</sup> : 이등변삼각형의 무차원 밑변의 길이 [-]</p> <p>B<sub>1</sub> : 무차원 Kozicki 계수 [-]</p> <p>B<sub>2</sub> : 무차원 Kozicki 계수 [-]</p> <p>b : 이등변삼각형의 높이 [m]</p> <p>b<sup>+</sup> : 이등변삼각형의 무차원 높이 [-]</p> <p>d<sub>h</sub> : 수력 직경 [m]</p> <p>d<sub>ij</sub> : 전단율 텐서 [1/s]</p> <p>f : Darcy 마찰계수( 2(dP/dx)d<sub>h</sub>/ρū<sup>2</sup> ) [-]</p> <p>K : 멱법칙 상수 [Ns<sup>n</sup>/m<sup>2</sup>]</p> <p>n : 멱법칙 유동지수 [-]</p> <p>Re<sub>dh</sub> : 뉴턴 유체의 레이놀즈수(ρūd<sub>h</sub>/η<sub>0</sub>) [-]</p> <p>Re<sub>g</sub> : 멱법칙 유체의 레이놀즈수(ρū<sup>2-n</sup>d<sub>h</sub><sup>n</sup>/K) [-]</p> <p>Re<sub>M</sub> : 수정멱법칙 유체의 레이놀즈수(ρūd<sub>h</sub>/η*) [-]</p> <p>u : 유동방향의 유체속도 [m/s]</p>	<p>ū : 유동방향의 평균유체속도 [m/s]</p> <p>u<sup>+</sup> : 유동방향의 무차원 유체속도(u/ū) [-]</p> <p>u<sup>++</sup> : 유동방향의 무차원 유체속도(2u<sup>+</sup>/f·Re<sub>M</sub>) [-]</p> <p>β : 전단율 파라메타((η<sub>0</sub>/K)(ū/d<sub>h</sub>)<sup>1-n</sup>) [-]</p> <p>γ̇ : 전단율 [1/s]</p> <p>η<sub>a</sub> : 겔보기 점성계수 (τ/γ̇) [Ns/m<sup>2</sup>]</p> <p>η<sub>0</sub> : 전단율 영일 때의 점성계수 [Ns/m<sup>2</sup>]</p> <p>η* : 기준 점성계수 (η<sub>0</sub>/(1+β)) [Ns/m<sup>2</sup>]</p> <p>η<sup>+</sup> : 무차원 점성계수 (η<sub>a</sub>/η*) [-]</p> <p>ρ : 유체밀도 [kg/m<sup>3</sup>]</p> <p>τ : 전단응력 [N/m<sup>2</sup>]</p>
--	--

### 1. 서 론

파이프 내의 유체유동에서 압력강하의 예측은 유체공학의 응용분야에서 매우 중요하다. 완전히 발달된 층류유동의 경우 뉴턴 유체와 비뉴턴 유체의 압력강하는 여러 계산결과와 실험을 통하여 검증되었다. 이등변삼각형 단면을 갖는 파이프내의 완전히 발

이동렬(책임저자) : 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부  
E-mail : dlee@cu.ac.kr, Tel : 053-850-2717

달된 층류유동의 속도분포와 압력강하에 대한 관계는, 뉴턴 유체의 경우 Shah<sup>1)</sup>, Sparrow<sup>2)</sup>, Migay<sup>3)</sup>, Eckert 등<sup>4)</sup>에 의해 계산되었고 떡법칙 뉴턴 유체의 경우는 Kozicki 등<sup>5,6)</sup>에 의해 계산되었다. 비뉴턴 유체 공학에서는 떡법칙유체로 가정하여 해석하는 것이 보통이지만 비뉴턴 유체의 점성에 관련된 여러 물성치들은 전단율의 값에 따라 변하는 경우가 대부분이다. Pseudo-plastic 비뉴턴 유체의 점성계수는 Fig. 1에서 보듯이 작은 전단율 영역에서 뉴턴 유체의 성질을 갖고 아주 큰 전단율 영역에서는 떡법칙 유체의 성질을 갖는다. 이 두 영역 사이는 천이영역이다. 또 떡법칙 유체의 모델링에는 파이프의 중심에서 전단율이 영일 때에도 전단응력은 유한값을 가지므로 걸보기 점성계수가 무한대의 값을 갖는 모순이 있다. 그래서 Pseudo-plastic 유체의 넓은 전단율 영역을 동시에 표현할 수 있는 구성방정식이 필요하다. Sutterby<sup>7)</sup>, Cross<sup>8)</sup>, Carreau 등<sup>9)</sup>이 여러가지 구성방정식의 모델을 제안하였으나, Dunleavy와 Middleman<sup>10)</sup>에 의해 제안된 수정떡법칙(Modified Power-Law)유체 모델이 그중 아주 유용한 모델이다.

$$\eta_a = \frac{\eta_0}{1 + \frac{\eta_0}{K}(\dot{\gamma})^{1-n}} \quad (1)$$

식(1)은 아주 작은 전단율 영역(  $(\eta_0/K)(\dot{\gamma})^{1-n} \ll 1$  )에서 걸보기 점성계수가 뉴턴 유체의 점성계수와 같고, 아주 큰 전단율 영역(  $(\eta_0/K)(\dot{\gamma})^{1-n} \gg 1$  )에서는 떡법칙 유체의 걸보기점성계수와 같게 된다. 수정떡법칙 모델의 그 이외의 장점은 다른 모델에 비하여 해석하는 동안에 뉴턴 유체와 떡법칙 유체의 레이놀즈수가 유지될 수 있다는 점이다.

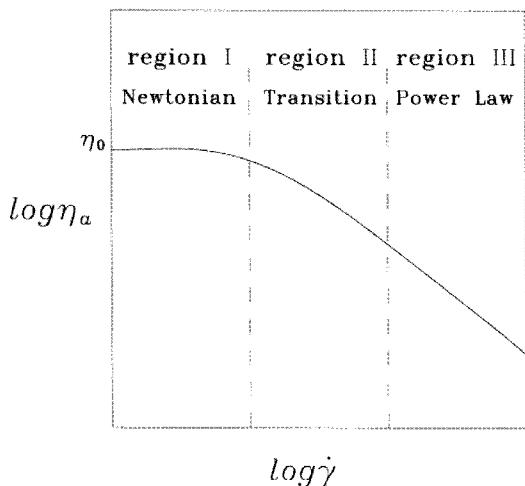


Fig. 1 Typical flow curve of a pseudo-plastic fluid

이 논문의 연구목적은 이등변삼각형 단면을 갖는 파이프내의 완전히 발달된 층류유동의 속도분포를 파악하고 레이놀즈수와 마찰계수와의 관계를 얻어서 궁극적으로 압력강하를 예측하는 데 목적이 있다. 수정떡법칙 유체의 원관 내의 유동에 대한 해석은 Brewster 등<sup>11)</sup>이, 사각형 단면을 갖는 파이프내의 유동에 대해서는 Park<sup>12)</sup>, Park 등<sup>13)</sup>이, 동심환상의 단면을 갖는 파이프내의 유동에 대해서는 Irvine 등<sup>14)</sup>이 마찰계수와 레이놀즈수에 대한 관계를 얻었다.

## 2. 해 석

파이프 내를 흐르는 유체유동에 관련된 문제를 해석하기 위하여 Fig. 2의 주어진 기준위치에 대한 속도변화를 나타내는 지배방정식을 생각하면 시스템내의 좌표계에서 점성소산항을 무시한 정상상태의 비압축성 유체흐름에 대한 지배방정식은 전단응력과 전단율에 관계되는 걸보기 점성계수에 따라 결정된다.

뉴턴 유체의 걸보기 점성계수는 실제의 물성치와 같다.

$$\tau_{ij} = \eta_a d_{ij} = \eta_0 d_{ij} \quad (2)$$

그러나, 비뉴턴 유체의 경우에는 실제의 물성치와 다르고 속도분포의 함수로 나타내어진다.

$$\text{즉, } \tau_{ij} = \eta_a(I, II, III) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{이다.}$$

특히, 비압축성, 순수 전단류의 경우에는  $\eta_a = \eta_a(\sqrt{II}/2)$ 이다.

$$\text{여기서 } II = 2 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} \text{ 이 된다.}$$

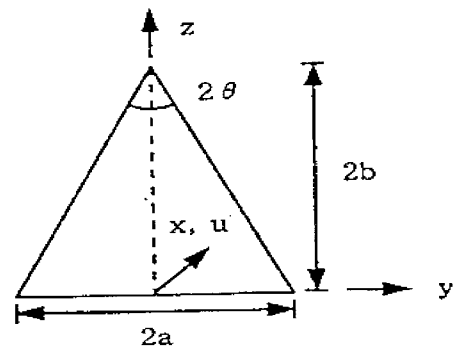


Fig. 2 Schematic diagram of isosceles pipe

Shah 등<sup>1)</sup>은 이등변삼각형 단면을 갖는 파이프 내의 완전히 발달된 뉴턴 유체의 층류유동에 대하여 다음과 같이 속도분포와 마찰계수에 대한 해를 얻었다.

$$u = -\frac{1}{2n_0} \cdot \left( \frac{dP}{dx} \right) \frac{y^2 - z^2 \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} \left[ \left( \frac{z}{2b} \right)^{B-2} - 1 \right]$$

$$\bar{u} = -\frac{2b^2}{3n_0} \left( \frac{dP}{dx} \right) \frac{(B-2) \tan^2 \theta}{(B+2)(1 - \tan^2 \theta)}$$

$$f \cdot Re = \frac{12(B+2)(1 - \tan^2 \theta)}{(B-2)[\tan \theta + (1 + \tan^2 \theta)^{\frac{1}{2}}]^2}$$

$$B = \left[ 4 + \frac{5}{2} \left( \frac{1}{\tan^2 \theta} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

이등변삼각형 단면을 갖는 파이프내의 완전히 발달된 먹법칙 비뉴톤 유체의 층류유동에 대하여 Kozicki 등<sup>5,6)</sup>, Chang<sup>15)</sup>은 다음과 같이 속도분포와 레이놀즈수에 대한 해를 얻었다.

$$f \cdot Re_g = 2^{3n+3} \left( \frac{B_1 + B_2 n}{n} \right)^n \quad (4)$$

꼭지점의 각도(2θ)에 따르는 계수 B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>는 Table 1과 같다.

먹법칙 비뉴톤 유체의 경우 겉보기 점성계수는

$$\eta_{ay} = K \left( \frac{du}{dy} \right)^{n-1}, \quad \eta_{az} = K \left( \frac{du}{dz} \right)^{n-1} \quad (5)$$

$$\eta_{a,y} = \frac{\eta_0}{1 + \frac{\eta_0}{K} \left( \frac{du}{dy} \right)^{1-n}}$$

Table 1 Dimensionless Kozicki coefficients<sup>5,6)</sup> for isosceles pipes

isosceles apex angle (θ)	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
5°	0.15	0.63
10°	0.17	0.63
20°	0.18	0.64
30°	0.19	0.65
40°	0.18	0.64
45°	0.18	0.64

이며, 수정먹법칙 유체의 경우에는

$$\eta_{a,z} = \frac{\eta_0}{1 + \frac{\eta_0}{K} \left( \frac{du}{dz} \right)^{1-n}} \quad (6)$$

순수점성(purely viscous) 비뉴톤 유체로 분류되는 수정먹법칙 유체의 경우 Fig. 2의 좌표계에서 이등변삼각형 단면을 갖는 파이프내의 완전히 발달된 먹법칙 비뉴톤 유체의 층류유동에서는

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = w = 0, \quad p = p(x), \quad u = u(y, z) \text{의}$$

가정이 가능하고 연속방정식과 운동량방정식은 다음과 같다.

$$\bar{u} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} u \, dA_c \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta_{a,y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta_{a,z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (8)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$u(y, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(0, z)}{\partial y} = 0$$

$$u(y, -\cot \theta \cdot y + \frac{y}{\tan \theta}) = 0$$

지배방정식을 무차원화 하기위한 파라메타를 고려하면,

$$d_h = \frac{2a \cdot \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$y^+ = \frac{y}{d_h}, \quad z^+ = \frac{z}{d_h}$$

$$\eta_a^+ = \frac{\eta_a}{\eta^*}, \quad u^+ = \frac{u}{u}$$

$$\eta^* = \frac{\eta_0}{1 + \frac{\eta_0}{K} \left( \frac{u}{d_h} \right)^{1-n}}$$

$$\beta = \frac{Re_g}{Re_{d_h}} = \frac{\eta_0}{K} \left( \frac{u}{d_h} \right)^{1-n}$$

$$\eta_{a,y}^+ = \frac{1 + \beta}{1 + \beta \left( \frac{du^+}{dy^+} \right)^{1-n}}$$

$$\eta_{a,z}^+ = \frac{1 + \beta}{1 + \beta \left( \frac{du^+}{dz^+} \right)^{1-n}}$$

$$u^{++} = \frac{u^+}{\frac{1}{2} f \cdot Re_M}$$

$$Re_M = Re_{d_h} + Re_g = \frac{\rho \bar{u} d_h}{n_0} + \frac{\rho \bar{u}^{2-n} d_h^n}{K}$$

$$= \frac{\rho \bar{u} d_h}{n_0} (1 + \beta) \quad (9)$$

$$n_{a,y^+} = \frac{1 + \beta}{1 + \beta \left(\frac{1}{2} f \cdot Re_M\right)^{1-n} \left(-\frac{du^{++}}{dy^+}\right)^{1-n}}$$

$$n_{a,z^+} = \frac{1 + \beta}{1 + \beta \left(\frac{1}{2} f \cdot Re_M\right)^{1-n} \left(-\frac{du^{++}}{dz^+}\right)^{1-n}}$$

식 (1)과 (9)로부터

$$\beta \rightarrow 0 \text{ 이면 } n_a \rightarrow n_0, \quad Re_M \rightarrow Re_{d_h}$$

$$\beta \rightarrow \infty \text{ 이면 } n_a \rightarrow K (\dot{\gamma})^{n-1}, \quad Re_M \rightarrow Re_g$$

임을 알 수 있다.

무차원 연속방정식과 운동량방정식은 다음과 같다.

$$f \cdot Re_M = \frac{1}{4} \frac{(1 + \sin\theta)^2}{\sin\theta \cdot \cos\theta} \frac{1}{\int_0^{2b^+} \int_0^{a^+} u^{++} dy^+ dz^+} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^+} \left( n_{a,y^+} \frac{\partial u^{++}}{\partial y^+} \right) + \frac{\partial}{\partial z^+} \left( n_{a,z^+} \frac{\partial u^{++}}{\partial z^+} \right) = -1 \quad (11)$$

무차원 경계조건은 다음과 같다.

$$u^{++}(y^+, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^{++}(0, z^+)}{\partial y^+} = 0$$

$$u^{++}(y^+, -\cot\theta \cdot y^+ + \frac{y^+}{\tan\theta}) = 0$$

### 3. 계산 결과

이등변삼각형의 단면을 갖는 파이프내의 완전히 발달된 수정떡법칙 유체의 층류유동에 대하여 수정 떡법칙 유체의 구성방정식을 이용하여 Pseudo-plastic 유체의 뉴턴 영역부터 천이영역을 지나 비뉴턴 떡법칙 영역까지의 넓은 전단율 영역에서의 마찰 계수와 레이놀즈수와의 관계를 얻었다.

Table 2와 Fig. 3은 계산결과중 꼭지점 반각이 45°인 경우의 예를 나타내고 있다. 뉴턴 유체영역에 대한 여러가지 꼭지점 반각(θ= 0°, 10°, 20°, 30°, 45°, 60°, 90°)에 대하여 Shah 등<sup>1)</sup>의 계산치와 아주 작은 전단율 파라메타(0.0001)의 경우 본 계산 결과를 Table 3에 나타내었는데 두 값들이 0.16 %이하의 차이를 보여주고 Kozicki 등<sup>5,6)</sup>의 계산결과와 아주 큰 전단율 파라메타(10000)의 경우의 본 계산결과를

Table 4에 나타내었는데 두 값들이 2.98 %이하의 차이를 보여주는 결과를 얻었다.

### 4. 결 론

(1) 수정떡법칙 유체의 경우 해석에서 살펴보고 계산결과로도 확인했듯이 전단율이 증가하면 떡법칙유체의 특성을 가지려는 경향이 강하고 전단율이 감소하여 아주 작은 값을 갖게되면 뉴턴 유체의 특성을 가지려는 경향이 강한 것을 보여주고 있다.

(2) 해석 및 실험도중이라도 전단율 파라메타의 값을 알면 유체의 유동이 뉴턴 유체유동인지 떡법칙유체유동인지 또는 천이영역의 유체유동인지 판단하는 기준으로 삼을 수 있다.

(3) Pseudo-plastic 유체의 경우, 특히 뉴턴 영역 및 천이영역에서는 떡법칙유체 모델이 실제값과 큰 차이를 나타내므로 수정떡법칙 모델을 사용하는 것이 바람직하다.

Table 2 Data of dimensionless pressure drop( $f \cdot Re_M$ ) with 45 degrees of isosceles apex

$\log \beta$ $n$	- 4.0	- 3.0	- 2.0	- 1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
0.4	58.05	57.97	57.18	50.94	33.75	26.04	24.99	24.88	24.87
0.5	58.05	57.99	57.40	52.52	38.44	30.74	28.64	28.53	28.52
0.6	58.05	58.01	57.57	53.93	41.32	33.98	32.87	32.75	32.74
0.7	58.05	58.02	57.73	55.17	45.37	38.83	37.79	37.68	37.67
0.8	58.05	58.04	57.85	56.27	49.53	44.40	43.53	43.43	43.42
0.9	58.05	58.05	57.96	57.23	53.78	50.78	50.23	50.17	50.16
1.0	58.06	58.06	58.06	58.06	58.06	58.06	58.06	58.06	58.06

Table 3 Present and previous data of  $f \cdot Re_{d_h}$  for Newtonian fluid

θ	$f \cdot Re_{d_h}$ (previous) <sup>1)</sup>	$f \cdot Re_{d_h}$ (present)
0°	48.00	48.00
10°	51.28	51.36
20°	52.88	52.95
30°	53.33	53.40
45°	57.99	58.06
60°	50.97	51.02
90°	48.00	48.00

Table 4 Present and previous data  $f \cdot Re_g$  for power law fluid with 45 degrees of isosceles apex

n	$f \cdot Re_g$ (previous) <sup>5</sup>	$f \cdot Re_g$ (present)
1.0	58.03	58.06
0.9	49.87	50.16
0.8	42.94	43.42
0.7	38.05	37.67
0.6	32.04	32.74
0.5	28.78	28.52
0.4	24.13	24.87

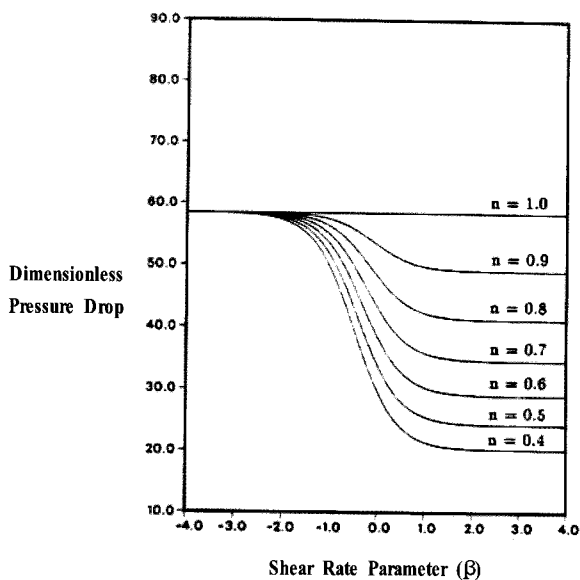


Fig. 3 Variation of dimensionless pressure drop with shear rate parameter for MPL Fluid in isosceles pipe with 45 degrees of isosceles apex

참고 문헌

1. Shah R. K. and London A. L., 1978, "Laminar Flow Forced Convection in ducts, Supplement 1 to Advances in Heat Transfer (T. F. Irvine, Jr, and J. P. Hartnett, ed.)", Academic Press, New York, pp. 227~231.
2. Sparrow E. M., 1962, "Laminar Flow in Isosceles Triangular ducts", AIChE J., Vol. 8, pp. 599~605.
3. Migay V. K., 1963, "Hydraulic Resistance of Triangular Channels in Laminar Flow", Energy,

- Vol. 6, No. 5, pp. 122~130.
4. Eckert E. R. G. and Irvine T. F. Jr, 1960, "Pressure Drop and Heat Transfer in a duct with Triangular Cross Section", J. Heat Transfer, Vol. 82, pp. 125~132.
5. Kozicki W. C., Chou H. and Tiu C., 1966, "Non-Newtonian Flow in ducts of Arbitrary Cross-Sectional Shape", Chemical Engineering Science, Vol. 21, pp. 665~669.
6. Kozicki W. and Tiu C., 1971, "Improved Parametris Characterization of Flow Geometries", Canadian J. Chem. Eng., Vol. 49, pp. 562~574.
7. Sutterby J. L. 1966, "Laminar Converging Flow of Dilute Polymer Solution in Conical Section-I. Viscosity Data, New Viscosity Model, Tube Flow Solution", AIChE J., Vol. 12, pp. 63~77.
8. Cross M. M., 1965, "Rheology of Non-Newtonian Fluids: A New Equation for Pseudoplastic Systems", J. Colloid. Sci., Vol. 20, pp. 417~428.
9. Carreau P. J., 1972, "Rheological Equations from Molecular Network Theory", Tran. Soc. Rheol., Vol. 16, pp. 99~110.
10. Dunleavy J. E. and Middleman S., 1966, "Relation of Shear Behavior of Solution of Polyisobutylene", Tran. Soc. Rheol., Vol. 10, pp. 151~164.
11. Brewster R. A. and Irvine T. F. Jr, 1987, "Similitude Considerations in Laminar Flow of Modified Power Law Fluids in Circular ducts", Wärme und Stoffübertragung, Vol. 21, pp. 83~88.
12. Park S., 1991, "Pressure Drop for a Modified Power Law Fluid Flow in a Rectangular duct", Ph.D. Thesis, Mechanical Eng. Dept., State Univ. of New York.
13. Park S., Irvine T. F. Jr and Capobianchi M., 1993, "Experimental and Numerical Study of Friction Factor for a Modified Power Law Fluid Flow in a Rectangular duct", Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Elsevier, New York, pp. 900~908.

14. Capobianchi M. and Irvine T. F. Jr, 1992, "Predictions of Pressure Drop and Heat Transfer in Concentric Annular ducts with Modified Power Law Fluids", *Wärme und Stoffübertragung*, Vol. 27, pp. 209~215.
15. Chang J. A. 1985, "Laminar Forced Convective Heat Transfer of Power Law Fluids in Isosceles ducts with Peripheral Wall Condition", Ph. D. Thesis, Mechanical Eng. Dept., State Univ. of New York.