

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-B.2009.33.6.443

경계면 포착법에 의한 밀도차이에 따른 물질경계면을 갖는 다상유동 수치해석

명 현 국[†]

(2009년 1월 14일 접수, 2009년 4월 7일 수정, 2009년 4월 8일 심사완료)

Numerical Simulation of Multiphase Flows with Material Interface due to Density Difference by Interface Capturing Method

Hyon Kook Myong

Key Words: Multiphase Flow(다상유동), Volume of Fluid(VOF), Density Difference(밀도차이), Bubble Rising(방울 상승), Rayleigh-Taylor Instability(Rayleigh-Taylor 불안정성), Droplet Splash(물방울 튀김), Numerical Simulation(수치해석), Interface Capturing Method(경계면 포착법), Free Surface(자유표면), Material Interface(물질경계면)

Abstract

The Rayleigh-Taylor instability, the bubble rising in both partially and fully filled containers and the droplet splash are simulated by an in-house solution code(PowerCFD), which are typical benchmark problems among multiphase flows with material interface due to density difference. The present method(code) employs an unstructured cell-centered method based on a conservative pressure-based finite-volume method with interface capturing method(CICSAM) in a volume of fluid(VOF) scheme for phase interface capturing. The present results are compared with other numerical solutions found in the literature. It is found that the present method simulates efficiently and accurately complex free surface flows such as multiphase flows with material interface due to both density difference and instability.

1. 서 론

현재 자유표면(free surface) 또는 물질경계면(material interface)을 갖는 복잡한 다상유동(multiphase flow) 현상들을 해석하기 위한 다양한 수치기법들이 제안되고 있다. 이중 경계면 포착법(interface capturing method)인 VOF(Volume Of Fluid) 방법⁽¹⁾은 셀(또는 검사체적)내에 액상의 체적비로 정의된 VOF 값 α 를 사용하여 상경계면을 추적하며, 현재 대부분의 상용 CFD코드에 도입되어 널리 사용되고 있다. 이것은 이 방법이

각 상의 체적이 잘 보존되는 장점 때문에 다상유동의 물리적인 현상을 왜곡 없이 표현할 수 있는 대표적인 방법으로 인식되기 때문이다. 이 VOF 방법은 검사체적 내 자유표면의 위치와 α 값을 직접적으로 추적하고 계산하는 체적추적법(volume tracking method)^(1~4)과, α 를 자유표면의 정확한 위치에 대한 정보가 필요 없는 함수형태로 표현하고 이를 이송하는 방정식을 HR도식(High Resolution differencing scheme)으로 풀어 경계면의 움직임을 포착하는 체적포착법(volume capturing method)^(5~8)으로 다시 크게 구분된다.

한편 다상유동 중에서 두 유체의 밀도차이(density difference)에 의해 발생하는 부력에 의한 유동은 일반적으로 복잡한 유동현상들이 포함되어 나타나며, 특히 밀도비가 큰 경우 유체 간에 형성되는 경계면을 기준으로 국소 물성값이 급격

[†] 회원, 국민대학교 기계자동차공학부
E-mail : myong@kookmin.ac.kr
TEL : (02)910-4714 FAX : (02)910-4839

하게 변하게 되어 수치해석상의 어려움이 발생한다. 따라서 이러한 다상유동을 해석하기 위한 수치해석방법의 타당성과 정확성을 확인하기 위한 대표적인 검증문제(benchmark problem)로 2차원 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제, 기름방울 상승(oil bubble rising) 문제, 기포(공기방울) 상승문제, 물방울 튀김문제 등이 제시되고 있다. 특히 2차원 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제는 밀도비가 다른 비압축성인 두 점성유체가 이루는 경계층에 대한 문제로, VOF 지배방정식과 운동량보존방정식의 연관관계를 테스트하기 위한 최적의 검증문제로 알려져 있다. 즉 여기서 유동은 밀도차이로 인해 지배되어지고, VOF 지배방정식에서 발생하는 수치적 오차는 VOF 값을 사용한 국소 물성값인 밀도의 계산결과를 통해 운동량보존방정식에서의 수치적 오차를 유발할 수 있기 때문이다. 또한, 두 유체의 큰 밀도차이에 의해 발생하는 부력에 의한 유동문제인 기름방울 상승문제,^(3,7,8) 기포 상승문제,^(3,7,8) 물방울 튀김문제^(3,4)는 보다 실제적인 다상유동의 예로 제시될 수 있다. 이들 문제를 해결하기 위해 기존 연구자들이 사용한 수치해석적인 방법^(3,4,7,8)을 살펴보면 자유표면 해석을 위해 체적추적법^(3,4) 및 체적포착법^(7,8)이 모두 사용되고 있다. 그러나 대부분의 방법^(3,4,7)이 정렬격자계로 국한되어 있어 적용범위가 제한되어 있다. 또한 공간차분으로 다양한 고차의 HR(High Resolution) 도식을 사용하고 있으나, 시간차분에 대해서는 모두 특수한 방법인 ACM(Artificial Compressibility Method) 및 dual time-stepping 도식을 사용하고 있다.

최근 Myong and Kim⁽⁹⁾은 다상 유동과 같이 자유표면이 존재하는 복잡한 유동현상들을 해석할 수 있는 비정렬격자계에 적합한 수치해석방법(PowerCFD 코드)을 개발하였다. 이 방법은 일반 상용 CFD 코드와 같이 비정렬 셀 중심방법을 채용하고 압력수정방법에 기반을 둔 3차원 유동해석방법⁽¹⁰⁻¹²⁾에 경계면 포착법에서 크게 문제가 되는 번짐(smearing)현상과 같은 경계면의 비물리적인 변형 및 수치확산 문제를 상당히 개선한 것으로 알려진 HR도식인 CICSAM⁽⁶⁾(Compressive Interface Capturing Scheme for Arbitrary Meshes)을 도입한 것이다.

본 연구에서는 Myong and Kim⁽⁹⁾이 개발한 수치해석방법을 사용하여 2차원 Rayleigh-Taylor 불

안정성 문제, 기름방울 상승문제(밀도비= 2), 물속에서의 기포 상승문제(밀도비= 100) 및 물방울 튀김문제(밀도비=1000)와 같은 두 유체의 밀도차이에 의해 발생하는 전형적인 부력에 의한 물질 경계면을 가진 다상유동 문제를 수치해석 한다. 또한 수치해석 결과로부터 밀도차이에 따른 부력에 의한 유동현상을 파악하고, 수치해석방법의 정확성과 타당성을 검증한다.

2. 수치해석방법

2.1 지배방정식 및 α 에 대한 이산화방정식

유동을 비압축성이라고 가정하면, 기상-액상 모든 영역에 적용되는 질량보존, 운동량보존 및 VOF 값 α 에 대한 지배방정식은 다음과 같이 적분형태로 표현할 수 있다.

$$\int_S \underline{v} \cdot \underline{dS} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \underline{v}) dV + \int_S [\rho \underline{v} \otimes \underline{v}] \cdot \underline{dS} = \int_S \underline{\tau} \cdot \underline{dS} - \int_S p \underline{dS} + \int_V \underline{s} dV \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha dV + \int_S \alpha \underline{v} \cdot \underline{dS} = 0 \quad (3)$$

그리고 국소 물성값인 밀도와 점성계수는 다음과 같이 계산한다.

$$\rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2 \quad (4)$$

$$\mu = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2 \quad (5)$$

여기서 아래첨자 1과 2는 다른 종류의 유체를 각각 나타내며, α 는 0과 1 사이의 값을 가진다.

식 (3)을 셀(체적 V_P)에 대해 이산화하고 시간 변화 δt 가 충분히 작다면, 일반적으로 셀 면에서의 체적유량 Q_f 는 α_f 에 비해 무시할 정도의 미소변화량을 가지기 때문에 일정하다고 가정하면, 액상 체적비 α 에 대한 최종 이산화식은 다음과 같다.

$$\alpha_P^{t+\delta t} = \alpha_P^t + \frac{\delta t}{V_P} \sum_{f=1}^n \alpha_f^* Q_f \quad (6)$$

위식을 정확하게 계산하기 위해서는 셀 면에서

의 α_f^* 를 수치확산을 최소화시키며 구할 수 있는 이류 알고리즘, 즉 해의 한정성(boundedness)을 보장하면서도 급격한 기울기를 가지는 경계면을 유지하도록 인접한 셀 중심값을 사용하여 적절히 보간하여 α_f^* 를 구하는 방법이 필요하다.

2.2 CICSAM 방법

본 연구에서는 셀 면에서의 α_f^* 를 구하기 위해 기존의 경계면 포착법에 적용된 여러 차분도식들이 가지고 있는 경계면의 번짐현상 및 수치확산 문제점을 극복한 것으로 알려져 있는 CICSAM 방법⁽⁶⁾을 사용한다. HR도식인 CICSAM은 다양한 방법으로 재구성 될 수 있으나, 여기서는 식 (6)에 나타난 이산화방정식의 형태에 한정성기준을 적용하기에 가장 적절한 형태인 NVD(Normalized Variable Diagram)에 기초하여 나타낸다. 아래 식은 NVD 개념을 활용한 정규화변수(normalized variable)인 $\tilde{\alpha}_D$ 와 $\tilde{\alpha}_f$ 의 정의 및 비정렬격자계에 적합한 일반적인 형태를 각각 나타낸다.

$$\tilde{\alpha}_D = \frac{\alpha_D - \alpha_U}{\alpha_A - \alpha_U} = 1 + \frac{\alpha_D - \alpha_A}{2(\nabla\alpha)_D \cdot \underline{d}} \quad (7)$$

$$\tilde{\alpha}_f = \frac{\alpha_f - \alpha_U}{\alpha_A - \alpha_U} = 1 + \frac{\alpha_f - \alpha_A}{2(\nabla\alpha)_D \cdot \underline{d}} \quad (8)$$

여기서 아래첨자 U, D 그리고 A 는 1차원적으로 이웃하는 셀로 Upwind 셀, Donor 셀 및 Acceptor 셀을 각각 나타낸다. 그러나 정렬격자계와 달리 격자간의 연결성에 규칙성이 없는 비정렬격자계에서는 일반적으로 Upwind 셀을 정의하는 것이 용이하지 않으므로, 비정렬격자계에서는 Upwind 셀의 값을 경계면에 인접한 Donor 셀의 구배값과 Acceptor 셀의 값 및 $\underline{d} = \underline{r}_A - \underline{r}_D$ 로부터 벡터연산을 사용하여 외삽으로 구하며, 이 값을 대체시킨 형태가 위 두식에서의 마지막 형태이다.⁽⁹⁾

기본적으로 CICSAM은 Donor-Acceptor 방법의 개념으로부터 출발하는 것으로, 해의 안정성은 보장하지만 수치확산 및 번짐현상이 심한 상류차분도식과 한정성은 유지하지 않으나 급격한 기울기를 가지는 경계면을 잘 보존해주는 특성을 가진 하류차분도식을 셀 면과 유동의 움직임 방향이 이루는 각을 활용하여 두 가지 도식을 혼합하여 나타낸 형태이다. 즉, CICSAM에서는 $\tilde{\alpha}_f$ 상의

국소한정기준을 항상 만족할 수 있는 정규화변수의 범위를 규정하는 CBC(Convective Boundedness Criteria)의 상한을 따르는 Hyper-C 도식⁽¹³⁾을 하류차분도식으로 사용하며, 그 형태는 다음과 같다.

$$\tilde{\alpha}_{fCBC} = \begin{cases} \max\left[\tilde{\alpha}_D, \min\left\{1, \frac{\tilde{\alpha}_D}{c_D}\right\}\right] & \text{for } 0 \leq \alpha_D \leq 1 \\ \tilde{\alpha}_D & \text{for } \tilde{\alpha}_D < 0, \tilde{\alpha}_D > 1 \end{cases} \quad (9)$$

여기서, CFL 수인 c_D 는 다음과 같다.

$$c_D = \sum_{f=1}^n \max\left\{\frac{Q_f \delta t}{V_D}, 0\right\} \quad (10)$$

한편, Hyper-C 도식은 실제적으로 경계면의 형상을 보장하지 못하는 경향을 가지기 때문에, 더 개선된 경계면의 형상을 보장하기 위해 또 다른 도식으로의 전환이 필요하게 된다. 따라서 CICSAM에서는 가장 우수한 성능을 가진 것으로 알려진 다음과 같은 UQ(Ultimate-Quickest) 도식⁽¹³⁾을 상류차분도식으로 사용한다.

$$\tilde{\alpha}_{fUQ} = \begin{cases} \min\left\{\frac{8c_D \tilde{\alpha}_D + (1-c_D)(6\tilde{\alpha}_D + 3)}{8}, \tilde{\alpha}_{fCBC}\right\} & \text{for } 0 \leq \tilde{\alpha}_D \leq 1 \\ \tilde{\alpha}_D & \text{for } \tilde{\alpha}_D < 0, \tilde{\alpha}_D > 1 \end{cases} \quad (11)$$

마지막으로 앞에서 언급한 것과 같이 수치확산이 적은 정규화된 셀 면에서의 값을 예측하기 위해 CICSAM에서는 셀 면과 유동의 움직임방향이 이루는 각을 고려하여 유연하게 변하는 식 (13)과 같이 정의되는 가중계수 γ_f 를 사용하여 식 (9)와 식 (11)의 전환이 자동적으로 이루어지는 아래 식을 구성한다.⁽⁶⁾

$$\tilde{\alpha}_f = \gamma_f \tilde{\alpha}_{fCBC} + (1 - \gamma_f) \tilde{\alpha}_{fUQ} \quad (12)$$

$$\gamma_f = \min\left\{\frac{\cos(2\theta_f) + 1}{2}, 1\right\} \quad (13)$$

$$\theta_f = \arccos\left|\frac{(\nabla\alpha)_D \cdot \underline{d}}{|(\nabla\alpha)_D| |\underline{d}|}\right| \quad (14)$$

2.3 비정렬격자계에 적합한 α_f^* 계산 방법

한편, 기존의 VOF 방법에서는 일정한 형태의

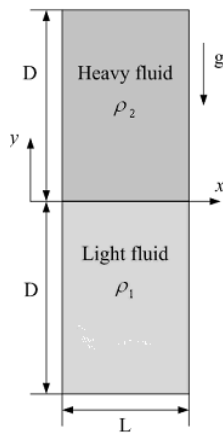


Fig.1 Definition and calculation domain of Rayleigh-Taylor instability problem

정렬격자에만 사용이 국한된 현시적 분할자(split operator)를 적용하고 있기 때문에, 새로운 시각에서의 α 를 나타내는 임의의 특정 셀 면을 통과한 체적비의 총합이 좌표축의 방향에 따른 전개(sweep)순서에 따라 다르게 나타나게 된다. 따라서 본 연구에서는 식 (6)에서 필요로 하는 셀 면에서의 α_f^* 값을 다음과 같이 2차 정확도를 가지고 수치확산도 적어지는 장점을 지닌 Crank-Nicholson 도식의 형태로 구한다.

$$\alpha_f^* = \frac{1}{2}(\alpha_f^t + \alpha_f^{t+\delta t}) \quad (15)$$

결과적으로 전개순서에 대한 의존성이 제거됨으로써 비정렬격자계에도 용이하게 적용될 수 있으며, 또한 α 에 대한 이산화방정식을 음해법(implicit method)으로 풀고 있어 계산의 안정성도 도모할 수 있다.⁽⁹⁾ 또한 식 (15)로 정의된 새로운 시점에서의 가중계수가 시간간격이 매우 짧다면 경계면과 유동의 움직임 방향이 이루는 각도변화가 매우 작으므로, 현시점의 가중계수로 대체되어도 무방하다고 할 수 있다. 따라서 최종적으로 셀 면에서의 α_f^* 값은 식 (7), 식 (8) 및 식 (15)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\alpha_f^* = (1 - \beta_f) \frac{\alpha_D^t + \alpha_D^{t+\delta t}}{2} + \beta_f \frac{\alpha_A^t + \alpha_A^{t+\delta t}}{2} \quad (16)$$

$$\beta_f = \frac{\widetilde{\alpha}_f - \widetilde{\alpha}_D}{1 - \widetilde{\alpha}_D} \quad (17)$$

참고로 식 (17)로 표현된 가중계수 β_f 는 유동 방향에 관계된 경계면의 방향뿐만 아니라 Upwind 셀을 포함하여 Donor 셀 및 Acceptor 셀에서의 모든 정보를 함축적으로 포함하고 있다.

본 연구에서는 위에 기술한 방법을 Myong and Kim⁽¹⁰⁻¹²⁾이 유동해석을 위해 개발한 해석코드에 적용하여, 2차원 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제, 기름방울 상승문제(밀도비= 2), 물속에서의 기포 상승문제(밀도비= 100) 및 물방울 튀김문제(밀도비 \approx 1000)와 같은 두 유체의 밀도차이에 의해 발생하는 전형적인 부력에 의한 다상유동문제에 대한 수치해석을 수행하였다.

3. 계산결과 및 고찰

3.1 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제

첫 번째 검증문제는 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제로, 연직 하방으로 중력장이 작용할 때 무거운 유체가 상대적으로 가벼운 유체 위에 놓여 있을 때, 두 유체층 사이의 경계면(interface)은 불안정하여 경계면에 작은 섭동(perturbation)이 주어지면 경계면의 섭동 크기는 시간과 함께 증가한다. 실제로 경계면은 곧 버섯모양으로 감싸지게 되기 때문에 이 문제는 파의 깨짐(wave breaking)을 계산하는 해석방법의 능력을 적절하게 평가할 수 있어 검증용으로 자주 사용되고 있다.

Fig. 1은 Pan and Chang⁽⁷⁾이 검증용 해로 제시한 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제에 대한 주요 경계조건과 함께 본 수치계산을 위해 사용된 전체 계산영역을 나타낸다. 여기서 전체 계산영역은 각각 다른 밀도비($\rho_2/\rho_1 = 998/499 = 2$)와 동일한 동점성계수비($\mu_2/\mu_1 = 1$)를 가진 두 종류의 유체를 상부(ρ_2) 및 하부(ρ_1)에 각각 구분하여 포함하고 있으며, 이 두 유체가 차지하는 2차원 사각형의 전체 넓이는 L 로 일정하고 각각의 유체가 차지하는 높이 D 가 $D = 1.5L$ 로 전체높이 $H = 3L$ 이다. 본 연구에서는 Pan and Chang⁽⁷⁾과 같이 Froude 수 $Fr = 1$ 이고, 다음과 같이 정의한 Reynolds 수 $Re = 283$ 이며, 표면장력은 없다고 가정하였다.

$$Re = \frac{\rho_2 \sqrt{g} L^{\frac{3}{2}}}{\mu_2} \quad (18)$$

본 수치계산을 위해 사용된 격자계는 비정렬 등간격 사각형격자계로서 4800(40×120) 개의 제어체적을 사용하였다. 참고로 이 격자계는 Pan and Chang⁽⁷⁾의 격자계와 같으나, 그들은 본 연구와는 달리 정렬격자계에 적합한 수치해석방법을 사용하였다.

경계조건은 상부 및 하부벽면은 불침투성 벽면 조건이고, 좌우벽면은 유동장에 대해 대칭경계조건으로 주었다. 한편 두 유체가 이루는 경계면상에 대한 초기속도조건은 아래와 같이 Daly⁽¹⁴⁾가 적용한 것과 일치하는 것으로 단위 파장 섭동 (single wavelength perturbation)이 경계면상에 적용되었다.

$$u = \begin{cases} \frac{\pi A \Delta y}{2L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-\pi|y|}{L}\right) & \text{for } \frac{y}{L} \geq 0 \\ -\frac{\pi A \Delta y}{2L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-\pi|y|}{L}\right) & \text{for } \frac{y}{L} \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$v = \frac{\pi A \Delta y}{2L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-\pi|y|}{L}\right) \quad (20)$$

여기서 A 는 섭동 진폭(perturbation amplitude)을 나타내며, 본 연구에서는 Pan and Chang⁽⁷⁾과 같이 $A = 1.0$ 로 놓았다. 그리고 Δy 는 계산을 위해 사용된 격자의 y -방향(수직방향)에 따라 나타난 격자간의 간격을 나타낸다. 결국 위와 같이 나타낸 속도장은 사인파장에 해당하고, 초기압력은 정수력학적 압력분포와 일치한다.

Fig. 2는 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제에 대한 VOF 값 및 속도에 대한 수치계산결과를 나타낸다. 총 계산시간은 $\sqrt{L/g}$ 로 무차원화한 무차원 시간으로 7이며, 각각의 그림에 나타난 선은 VOF 값 α 로 0.1, 0.5 및 0.9의 값을 가지는 등고선을 각각 나타낸다. 그리고 이 문제를 해석하기 위해 사용된 무차원 시간스텝은 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ 이다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제에서 초기섭동은 가벼운 유체가 대칭경계조건으로 주어진 왼쪽 벽면을 타고 상승하는 반면, 무거운 유체는 반대로 대칭경계조건외 오른쪽 벽면을 따라 하강하는 유동의 형태를 나

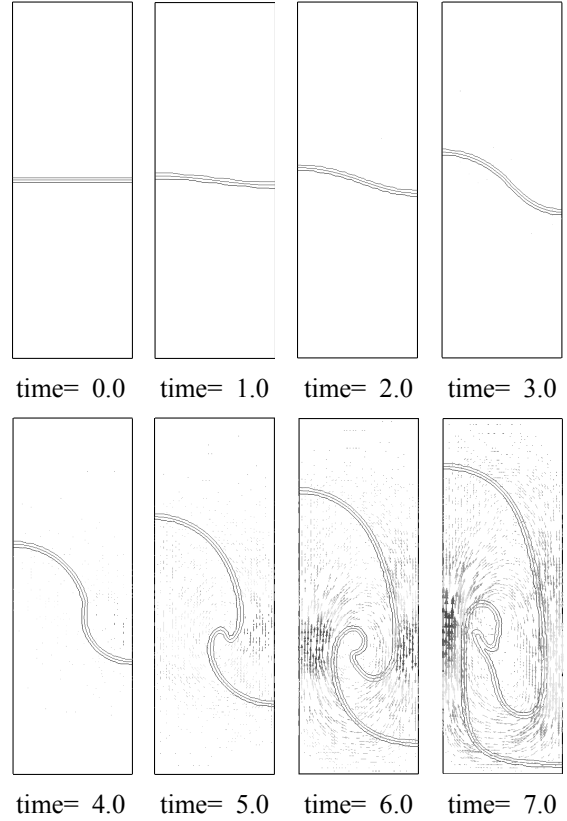


Fig. 2 Present results of Rayleigh-Taylor instability at several nondimensional times

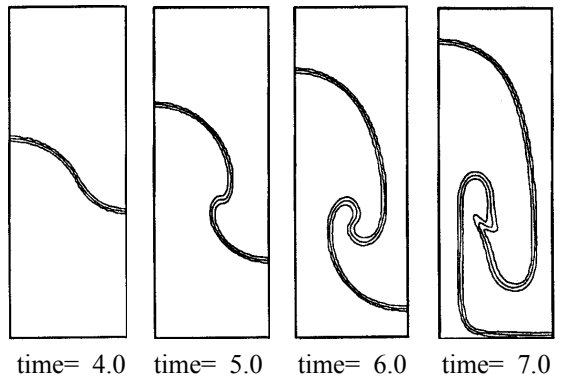


Fig. 3 Results of Rayleigh-Taylor instability at several nondimensional times by Pan and Chang⁽⁷⁾

타낸다. 또한 상의 불안정성이 발생하는 초기에는 두 유체가 형성하는 경계면의 이동은 미흡하게 거의 대칭경계조건외 근처에서만 나타나는 것을 확인할 수 있다. 그리고 불안정성의 진폭이 증가하면서부터는 마치 버섯과 같은 형상을 나타내고, 최종적으로 마주보는 두 대칭경계면의 중

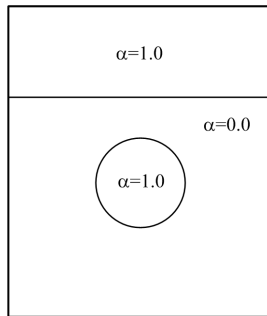


Fig. 4 Contour plot showing the initialization of α values for oil bubble rising in a partially filled container

심을 기점으로 와류가 형성되는 유동장의 형태를 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 이는 이미 기존의 다른 수치해석결과^(3,7,8)를 통해 확인한 사실들과 일치하는 것으로 본 수치해석방법의 타당성을 확인시켜준다.

Fig. 3은 똑같은 조건에서 계산된 Pan and Chang⁽⁷⁾의 수치해석 결과로 이들은 정렬격자계에 적합한 수치해석방법 및 시간차분에 대해서 특수한 방법인 ACM 및 dual time-stepping 도식을 사용하고 있다. 한편 본 수치해석방법에서는 비정렬격자계에 적합한 수치해석방법 및 시간차분에 대해 완전 음해법을 채택하고 있다. Fig. 2와 Fig. 3의 결과를 비교해 보면 본 수치해석 방법은 정확도 면에서도 거의 차이가 없음을 알 수 있다. 또한 전체 질량변화를 살펴보면 7000 시간스텝이 지난 후에 1.29×10^{-3} %의 매우 작은 오차를 나타내고 있으며, 이는 본 수치해석 방법이 질량보존법칙을 잘 만족시키고 있음을 입증하고 있다.

3.2 물속의 기름방울 상승문제

Fig. 4는 물속의 기름방울 상승에 관한 검증문제에 대한 조건을 나타내고 있다. 즉, 기름과 물의 밀도비는 이전 연구^(3,7,8)와 같이 $\rho_w/\rho_o = 2$ 이며, 이중 상대적으로 가벼운 유체는 기름으로 밀도(ρ_o) 값은 500 kg/m^3 이고, 반면에 무거운 유체인 물은 $1,000 \text{ kg/m}^3$ 의 밀도(ρ_w) 값을 가진다. 그리고 점성비는 $\mu_w/\mu_o = 2$ 이다. 수치해석을 위한 전체 계산영역은 물속에 잠겨있는 기름방울의 초기 지름을 D 이라 하였을 때, 물과 기름이 공존하면서 가득 차있는 2차원 밀폐된 사각형 캐비티의 크기는 $3D \times 3.5D$ 로 물이 차지하는 깊이는

$2.5D$, 그 위에 $1D$ 두께의 기름 층이 각각 존재한다. 그리고 기름방울의 중심은 물 표면으로부터 아랫방향으로 $1D$ 떨어진 곳에 위치하고 있다. 계산을 위해 사용된 격자는 비정렬 삼각형 격자로 제어체적수는 27,556개이다. 모든 수치계산영역에 대해서 초기 속도조건은 0이고, $Fr = 1$ 이며, 길이 D 및 물의 물성값에 기초하여 식 (18)로 계산된 Reynolds수 $Re = 200$ 이다. 또한 표면장력은 없다고 가정하였다. 참고로 Fig. 4에 $t = 0$ 시점 즉 수치계산을 위한 초기 VOF 값과 함께 물속에 잠겨있는 기름방울의 형상을 나타낸다.

Fig. 5는 시간에 따른 수치계산결과를 기존의 수치해석결과^(7,8)와 비교·검증하기 위해 각각의 무차원 시간간격에서 나타나는 자유표면(기름방울의 형상)을 VOF 값 0.1, 0.5 및 0.9의 값인 등고선과 함께 벡터선도를 표기하여 나타낸 것이다. 여기서 수치계산을 위한 무차원 시간스텝은 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ 이다. 결과를 보면, 기름방울은 물과 기름의 밀도차이에 따른 부력에 기인하여 원래 위치에서 위쪽 방향으로 가속되고, 두 개의 순환하는 와류가 점차 기름방울의 좌우에 대칭적으로 형성되면서, 무차원 시간이 1.5일 경우 위로 향하는 속도장이 기름방울의 하부 면을 편평하게 만들며, 무차원시간이 2 일 때 기름방울의 형상은 마치 신장과 같은 형상으로 변형되어 나타나는 것을 확인할 수 있다. 이것은 결과 그림에서도 확인할 수 있듯이 기포의 윗면에서도 그러한 속도가 생성되지만 기포의 하부에 존재하는 물의 압력에 의해 생성되는 아래쪽 면에서의 속도가 더 크기 때문이다.

기름방울은 시간의 흐름과 함께 계속해서 상승하여 물과 기름이 형성한 경계면에 근접해 가고 그 형상은 기름방울 상부에서 생성되는 부력이 상대적으로 하부에서 생성되는 부력보다 작기 때문에 기포 하부의 상승속도가 더 커 기름방울이 양 옆으로 퍼지게 되면서, 기름방울의 형태는 부메랑과 같은 형상으로 점차 변해가는 것을 확인할 수 있다. 이렇게 양쪽 측면으로 쪽 늘어선 형태를 가지게 된 기름방울은 무차원 시간이 4.0에 이르렀을 때 거의 물과 기름이 형성한 경계면에 근접한 형태로 나타난다.

또한 본 수치해석 결과는 시간이 지나도 초기의 경계가 퍼지거나 하는 현상이 거의 나타나고 있지 않으며, 전체 질량변화를 살펴보면 8000 시

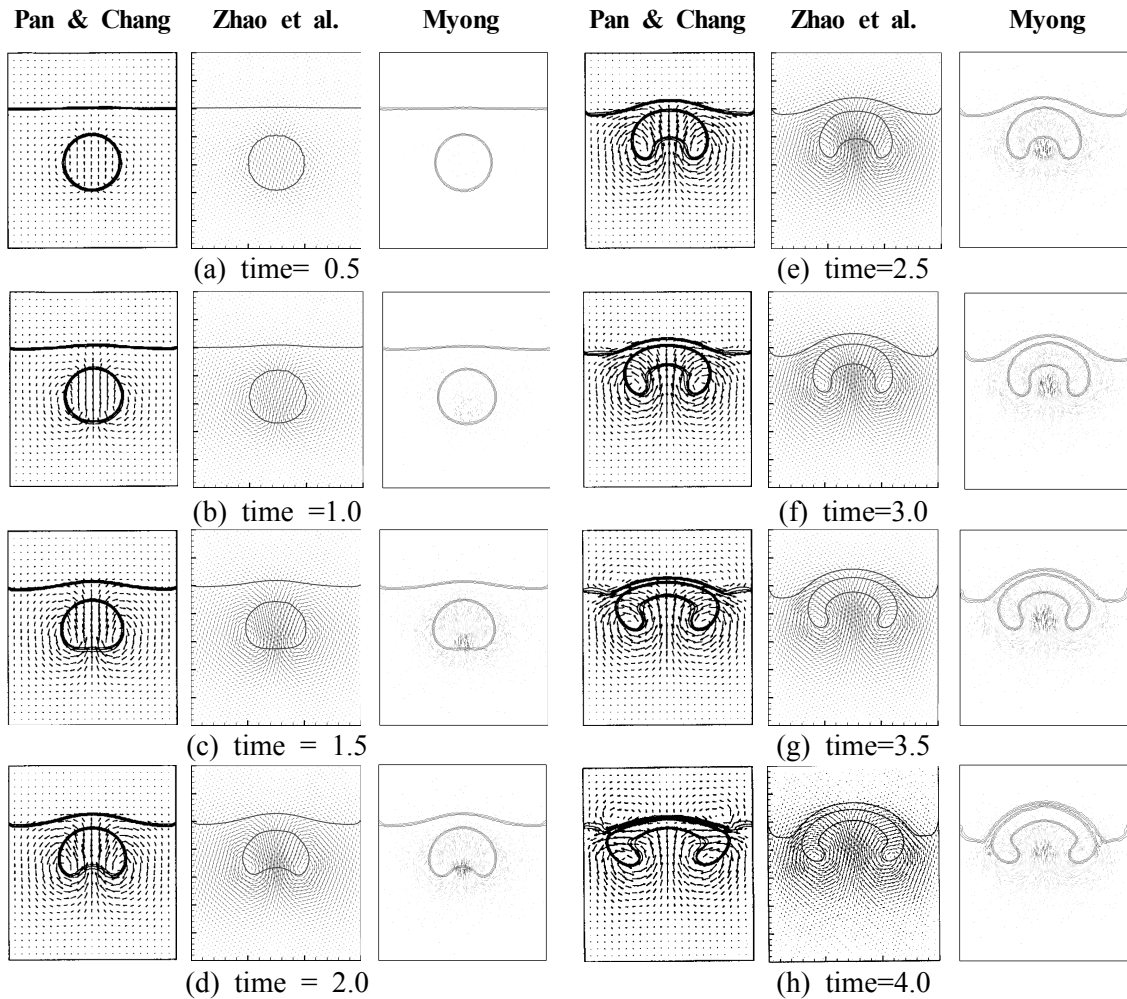


Fig. 5 Time evolution of oil bubble rising in partially-filled container. no surface tension and $Re = 200$, $Fr = 1.0$

간스텝이 지난 후에 2.00×10^{-3} %의 매우 작은 오차를 가지면서 질량보존을 잘 만족시켜 주고 있다.

한편 본 해석결과를 기존의 수치해석결과와 비교해 보면 Zhao et al.⁽⁸⁾의 결과와는 거의 차이를 나타내지 않으나, Pan and Chang⁽⁷⁾의 결과와는 무차원 시간이 2를 넘으면서 캐비티 상부에서 눈에 띄게 나타남을 알 수 있다. 이것은 이들의 수치해석 결과가 본 연구 및 Zhao et al.⁽⁸⁾과는 달리 세 개로 이루어진 유체시스템에 의해 모델화하였다는 차이점에 기인한다. 즉, 이들은 Fig. 4에서 물위에 기름 대신에 공기가 존재하는 것으로 계산을 수행하였기 때문이다.

3.3 물속의 기포상승 문제

물로 가득한 2차원 용기 내에서 떠오르는 기포

즉 공기방울을 해석하는 검증문제에 대한 조건은 Fig. 6에 나타낸 것과 같이 이전 연구⁽⁸⁾와 같다 즉 물과 공기방울의 밀도비 $\rho_w/\rho_a = 100$ 이며, 점성계수비는 물과 공기의 비인 $\mu_w/\mu_a \approx 64$ 이다. 표면장력은 고려되지 않았으며, 물의 물성값에 기초하여 식 (18)로 정의되는 Reynolds 수 Re 는 100이다.

수치해석을 위한 전체 수치계산영역은 물속에 잠겨있는 공기방울의 초기 지름을 D 이라 하였을 때 $2D \times 3.24D$ 이고, 초기에 공기방울의 중심위치는 바닥으로부터 위로 $0.74D$ 떨어진 곳에 위치하고 있다.⁽⁸⁾ 계산을 위해 사용된 격자는 비정렬 삼각형 격자로 공기방울 부근에 좀더 조밀하게 배치하였으며, 전체 제어체적수는 30,328 개이다. 참고로 이 격자수는 동일한 계산을 수행한

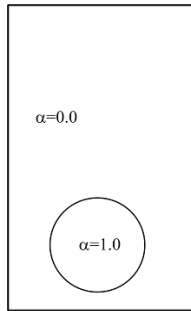


Fig. 6 Contour plot showing the initialization of α values for rising air bubble problem

Zhoa et al.⁽⁸⁾의 제어체적수 93,312개의 삼각형 격자의 약 1/3로 비교적 성긴 격자이다. 그리고 2차원 캐비티를 둘러싼 수치계산영역의 경계조건은 전부 벽면조건이다.

Fig. 7은 표면장력을 고려하지 않은 기포상승 문제에 대한 본 연구의 시간에 따른 수치계산결과이다. Zhoa et al.⁽⁸⁾의 수치해석결과와 비교·검증하기위해 각각의 무차원 시간간격에서 나타나는 자유표면(공기방울의 형상)을 VOF 값 0.1, 0.5 및 0.9의 값인 Contour 선과 벡터선도를 함께 표기하여 나타냈다. 참고로 Zhoa et al.⁽⁸⁾의 결과는 비교적 작지만 표면장력을 고려한 것이나, 이 문제의 경우 표면장력의 영향보다는 부력의 영향이 매우 크기 때문에 표면장력의 영향은 상대적으로 무시할 수 있다. 그리고 이 문제를 해석하기위해 사용된 총 계산시간은 $\sqrt{D/2g}$ 로 무차원화시킨 무차원 시간으로 5이며, 무차원 시간스텝 $\Delta t = 7 \times 10^{-4}$ 이다.

결과를 보면 본 예측결과는 전 시간에 걸쳐 Zhoa et al.⁽⁸⁾의 결과와 매우 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 즉, 기포는 초기에 물과 기포의 큰 밀도차에 따른 부력에 기인하여 원래 위치에서 위쪽 방향으로 가속되면서, 두 개의 순환하는 와류가 점차 기포(공기방울)의 좌우에 대칭적으로 형성된다. 이 와류가 기포 아랫면으로부터 기포를 밀어 올리는 물제트(water jet)를 야기하여, 무차원 시간 $t = 1$ 에 도달하였을 때 기포의 하부면을 편평하게 만든다. 시간이 더 진행되면서 상대적으로 강해진 물제트에 의해 $t = 1.5$ 일 때 공기방울의 형상은 마치 신장과 같은 형상으로 변형되어 나타난다. 이것은 기포의 윗면에서도 그러한 속도가 생성되지만 기포의 하부에 존재하

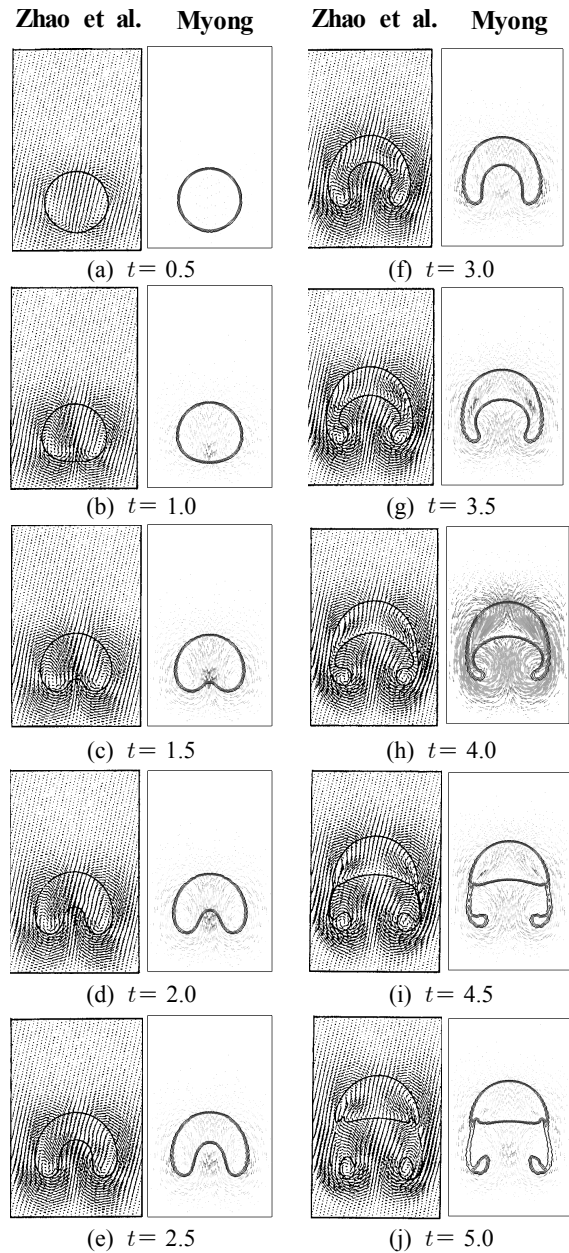


Fig. 7 Time evolution of rising air bubble problem at several nondimensional times; $Re = 100$, $Fr = 1$, density ratio=100/1

는 물의 압력에 의해 생성되는 아래쪽 면에서의 속도가 더 크기 때문이다. 시간의 흐름과 함께 기포는 계속해서 상승하면서, 와류에 기인하여 부메랑 형태로 변하면서 와류의 위치가 기포의 아래쪽으로 옮겨지며, 양쪽 방향으로 힘을 가해 점차로 기포 스커트를 만들며 점차 안쪽으로 말려들면서, 무차원 시간 $t = 4$ 에서 보는 바와 같이 스커트와 기포의 연결부분이 점차 얇게 된다.

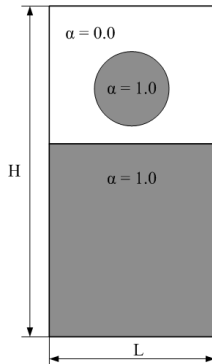


Fig. 8 Geometry of water droplet falling through air onto water surface

이것은 기포 전체를 순환하는 와류와 스커트 안 쪽에서 스커트 바깥 부분만을 순환하는 와류가 스커트 바깥 부분에서 만나 강도가 강해지므로 생기는 현상으로, 무차원 시간 4.5와 5.0 사이에서 결국 스커트와 기포는 분리되게 된다(참고로 Fig. 7(j)에서 기포와 분리된 스커트를 잇는 가는 다란 선은 VOF 값 $\alpha = 0.1$ 을 나타내고 있다). 이것은 스커트와 기포의 분리가 무차원 시간 $4.4 < t < 4.8$ 사이에서 일어난다는 기존의 연구결과^(8, 12)와도 정량적으로 일치한다.

또한 본 수치해석 결과는 비교적 성긴 격자와 다소 큰 시간간격을 사용하였으나, 시간이 상당히 진행되면서 대칭형태가 다소 무너지나, 초기의 경계가 퍼지거나 하는 현상이 거의 없다. 그리고 전체 질량변화를 살펴보면 약 7150 시간스텝이 지난 후에 1.06×10^{-5} %의 매우 작은 오차를 가지면서 질량보존을 잘 만족시켜 주고 있다.

3.4 물방울 튀김(Droplet splash) 문제

Fig. 8은 밀폐된 2차원 사각형 공간 내에서 일정한 거리로부터 수면위로 떨어지는 공기 중의 물방울의 움직임을 수치해석하기 위해 사용한 기하학적 형상과 초기조건을 나타낸다. 참고로 이 문제는 두 개의 독립된 영역이 합쳐지는 것으로 Puckett et al.⁽⁴⁾이 수치해석방법의 타당성과 정확성을 검증하기 위해 제시한 문제이기도 하다. 본 수치계산을 위해 사용한 전체 수치계산영역의 크기는 Puckett et al.⁽⁴⁾과 같이 폭 L 은 0.007 m이고, 폭과 높이 H 의 비 $H/L = 2$ 이다. 그리고 수면의 깊이는 0.0088 m이고, 공기 중에 떠있는 물방울의 초기위치는 사각형박스 상부를 기준으로 아래

로 0.0035 m 떨어진 곳에 물방울의 중심이 위치하고, 물방울의 반지름은 0.0014 m이다. 수치계산을 위한 사용한 각각의 유체에 대한 물성치는 공기의 밀도가 1.225 kg/m^3 이고, 점성은 $1.77625 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$ 이다. 그리고 물의 밀도와 점성은 각각 999.2 kg/m^3 , $1.1377 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$ 의 값을 사용하였다. 즉, 공기와 물의 밀도비 $\rho_w/\rho_a \approx 816$ 이고, 점성계수비 $\mu_w/\mu_a \approx 64$ 이다. 물방울 주위 및 물 표면에서 발생하는 표면장력은 고려하지 않았으며, 밀폐된 공간을 형성한 모든 변에 대한 경계조건은 벽면조건을 사용하였다. 그리고 본 수치계산을 위해 사용한 격자계는 이전 연구^(3, 4)에서와 같이 비교적 성긴 비정렬 등간격 사각형격자계로 제어체적수는 8192(64×128)개 이다.

Fig. 9는 물방울 튀김 문제에 대한 예측결과를 기존의 연구결과들인 Choi⁽³⁾와 Puckett et al.⁽⁴⁾의 수치해석결과를 함께 나타낸다. 그림에는 비교·검증하기 위해 기존의 수치해석연구와 마찬가지로 시간이 경과함에 따라 나타나는 자유표면(공기방울의 형상)을 몇 가지 시각에서 VOF 값 0.5 및 0.7의 값인 Contour 선과 벡터선도를 함께 표기하여 나타냈다. 그림을 통하여 확인할 수 있듯이 동일한 시간에 따라 나타나는 기존의 수치해석결과와 본 수치해석결과는 모두 정성적으로 유사한 형태로 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 그러나 두 유체가 형성하는 경계면의 변화 및 이동추이를 살펴보면 예측결과 사이에 다소 차이를 나타내고 있다. 먼저 모든 예측결과가 시간이 0.0122 초에 이르렀을 때 물방울이 물표면과 접하게 되면서 다소의 공기방울이 물속에 갇혀지나 시간이 지남에 따라 소멸되어 가는 것이 물리적으로 타당하다. 본 예측결과는 그림에서 보는 바와 같이 시간이 지남에 따라 이것이 사라지게 되나 기존의 예측결과는 마지막 결과인 0.02146초가 되었을 때까지 그대로 갇혀진 채로 존재한다. 다음으로 모든 예측결과가 물방울과 수면의 재결합과 함께 상대적인 밀도가 낮은 공기로 가득한 좌우 벽면을 향해 새로운 형태의 물기둥 및 물방울이 튀어 상승하는 현상을 보여주고 있다. 그러나 기존의 예측결과와는 달리 본 예측결과는 전체적으로 매끄러운 모양을 가지면서 벽면을 향해 사선의 형태로 진행하여 가는 물이 튀는 현상 및 새롭게 튀어서 따로 떨어져 나오는 미세한 물방울을 잘 표현하고 있다. 이는 본 연구에서 사용한

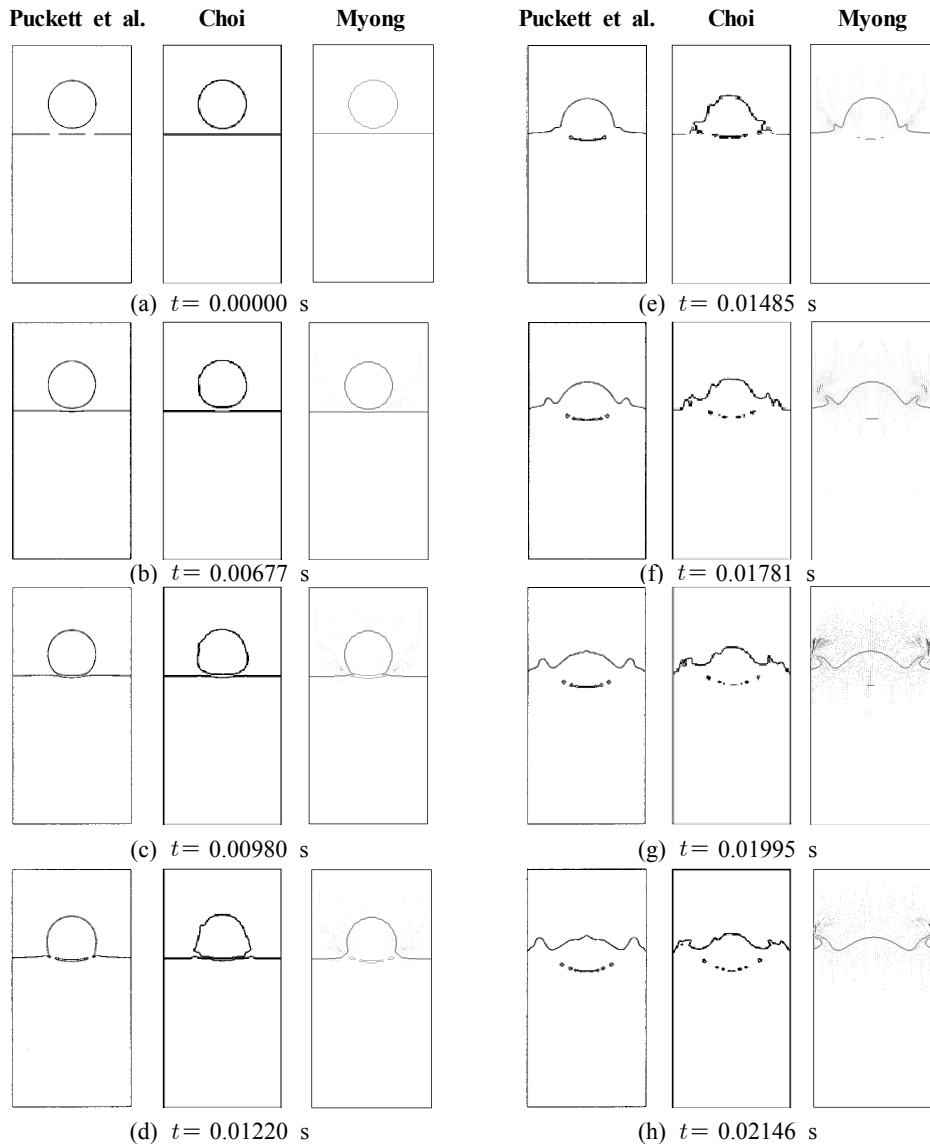


Fig. 9 Water droplet falling through air onto water surface at several times with no surface tension

체적포착법이 기존의 연구결과^(3,4)에서 사용한 체적추적법이 가지는 하나의 계산 격자보다 작은 상의 경계는 표현할 수 없는 한계를 극복하여 물리적으로 타당한 결과를 제시한다고 사료된다.

또한 본 수치해석 결과는 기존 연구와 같은 성긴 격자를 사용하였음에도 불구하고 시간이 지나도 초기의 경계가 퍼지거나 하는 현상이 거의 없으며, 전체 질량변화를 살펴보면 약 21460 시간 스텝이 지난 후에 2.8×10^{-6} %의 매우 작은 오차를 가지면서 질량보존을 잘 만족시켜 주고 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 Myong and Kim⁽⁹⁾이 개발한 수치해석방법을 사용하여 두 유체의 밀도차이에 의해 발생하는 전형적인 부력에 의한 유동문제인 2차원 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제, 기름방울 상승문제(밀도비=2), 공기방울 상승문제(밀도비=100) 및 물방울 튀김문제(밀도비=1000)를 수치해석 하였다. 또한 수치해석 결과로부터 밀도차이에 따른 부력에 의한 유동현상을 파악하고, 수치해석방법의 정확성과 타당성을 검증하였다. 본

수치해석방법은 일반 상용 CFD 코드와 같이 비정렬 셀 중심방법을 채용하고 압력수정방법에 기반을 둔 3차원 유동해석방법⁽¹⁰⁻¹²⁾에 경계면 포착법에서 문제가 되는 번짐 현상과 같은 경계면의 비물리적인 변형 및 수치확산 문제를 크게 개선한 것으로 알려진 HR도식인 CICSAM⁽⁶⁾을 도입하고, 시간차분에 대해 계산의 안정성을 위해 음해법을 채택한 것이다.

연구결과, 본 수치해석방법은 복잡한 유동현상들이 발생하는 2차원 Rayleigh-Taylor 불안정성 문제, 기름방울 상승문제, 기포 상승 문제 및 물방울 튀김 문제 모두에 대해 정확성과 타당성이 입증되었다. 따라서 본 해석방법은 두 유체의 밀도차(density difference)에 의해 발생하는 부력에 의한 물질경계면을 갖는 다상유동과 같이 자유표면이 존재하는 복잡한 유동현상들을 해석할 수 있음이 확인되었다.

후 기

본 연구는 2008년도 국민대학교 교내연구비를 지원받아 수행된 연구이다.

참고문헌

- (1) Hirt, C. W. and Nicholls, B. D., 1981, "Volume of Fluid(VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, pp. 201~225.
- (2) Rider, W. J. and Kothe, D. B., 1998, "Reconstruction Volume Tracking," *J. Comput. Phys.*, Vol.141, pp.112~152.
- (3) Choi, Y. S., 2004, Analysis of Multi-Phase Flow using PLIC-VOF Method, *Master Thesis*, Seoul National University.
- (4) Puckett, E. G., Almgren, A. S., Bell, J. B., Marcus, D. L. and Rider, W. J., 1997, "A High-Order Projection Method for Tracking Fluid Interfaces in Variable Density Incompressible Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol. 130, pp. 269~282.
- (5) Muzafferija, S. and Peric, M., 1999, "Computation of Free Surface Flows using Interface Tracking and Interface Capturing Methods," Chap. 2, in Mahrenholtz, O. and Markewicz, M., *Nonlinear Water Wave Interaction*, Comput. Mech. Publications.
- (6) Ubbink, O., 1997, "Numerical Prediction of Two Fluid Systems with Sharp Interface," *PhD Thesis*, University of London.
- (7) Pan, D. and Chang, C. H., 2000, "The Capturing of Free Surfaces in Incompressible Multi-fluid Flows," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 33, pp. 203~222.
- (8) Zhao, Y., Tan, H. H. and Zhang, B., 2002, "A High-Resolution Characteristics-based Implicit Dual Time-Stepping VOF Method for Free Surface Flow Simulation on Unstructured Grids," *J. Comput. Phys.*, Vol. 183, pp. 233~273.
- (9) Myong, H. K. and Kim, J. E., 2006, "A Study on an Interface Capturing Method Applicable to Unstructured Meshes for the Analysis of Free Surface Flow" *KSCFE J. of Computational Fluids Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp.14~19.
- (10) Myong, H. K. and Kim, J., 2005, "Development of 3D Flow Analysis Code using Unstructured Grid System(1st Report, Numerical Method)," *Trans. of the KSME(B)*, Vol. 29, No. 9, pp. 1049~1056.
- (11) Myong, H. K., Kim, J. and Kim, J. T., 2005, "Development of 3D Flow Analysis Code using Unstructured Grid System(2nd Report, Code's Performance Evaluation)," *Trans. of the KSME(B)*, Vol. 29, No. 9, pp. 1057~1064.
- (12) Myong, H. K. and Kim, J., "Development of a Flow Analysis Code using an Unstructured Grid with the Cell-Centered Method," *J. of Mechanical Science and Technology (KSME Int. J.)*, Vol. 20, No.12, pp.2218~2229, 2006.(12)
- (13) Leonard, B. P., 1991, "The ULTIMATE Conservative Difference Scheme Applied to Unsteady One-Dimensional Advection," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 88, No. 1, pp. 17~74.
- (14) Daly, B. J., 1967, "Dynamics of Liquids in Moving Containers", *Phys. Fluids*, Vol. 10, p. 297.