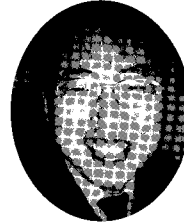


무요소법을 이용한 위상최적화

Topology Optimization using Meshless Method



이 상 진 *
Lee, Sang Jin



이 창 계 **
Lee, Chang-Kye

1. 서론

1960년대부터 컴퓨터의 발달과 함께 활발히 연구되기 시작한 구조최적화는 그 적용분야가 점차 확대되고 있으며 최근에는 실제 건설되고 있는 구조물을 설계하는 데에도 직접적으로 이용되고 있다. 구조최적화가 실제 구조물에 대해 적용 가능하게 된 것은 다양한 분야에서 매우 광범위하게 이용되고 있는 유한요소법과 같은 수치해석 기법의 발전과 매우 밀접한 관계가 있다. 그러나 최고의 범용성을 가지는 유한요소법 또한 한편으로 해의 정확도를 높이기 위해 유한요소망을 재구성하는 과정을 거치는 경우가 많으며 유한요소법의 해석결과가 형성된 유한요소망에 의존하게 되기도 한다.

최근에는 이러한 유한요소법의 단점을 보완하기 위하여 유한요소법의 대안으로 무요소법이 제시되고 있다.^{1,2)} 무요소법은 해석 대상물을 모델링 할 때 요소망에 의존하지 않으므로 해석절차가 비교적 간단하고 단순하다. 무요소법은 물체의 영역내부와 경계에 절점들을 배치시키고 요소망을 구성하지 않으며 절점

에 대한 좌표 값만을 해석에 이용하기 때문에 앞서 기술한 유한요소법의 단점을 일부 해소할 수 있다. 이때 무요소법은 유한요소법에서와는 달리 형상함수를 절점정보만을 이용하여 구성하게 된다. 현재 무요소법은 파괴역학, 대변형 해석, 오차산정과 적응적 기법에 활발히 적용되고 있으며 국내에서도 구조역학 분야에 점차적으로 적용되고 있다.

현재 다양한 분야에서 무요소법과 관련한 연구가 진행되고 있으나 구조최적화와 연관된 연구는 매우 적으며 특히 최근에 활발히 연구되고 있는 위상최적화³⁻⁵⁾와 관련한 무요소법의 적용사례는 찾아보기 매우 힘들다. 따라서 본고에서는 최근 발표된 RPIM(Radial Point Interpolation Method) 형상함수를 이용하는 무요소법을 바탕으로 수행된 구조물의 위상최적화기법에 대한 내용과 그 결과를 소개하고자 한다.

2. 무요소법 이론

무요소법은 요소를 사용하지 않고 해석영역에 절점을 추가, 삭제, 재배치하는 방법으로 구조해석을 수행하게 된다. 또한 지정된 국부 절점을 기초로 관심점에서만 형상함수가 형성이 되고, 관심점이 변함에

* 정회원 · 경상대학교 건축공학과 부교수, Ph. D.
E-mail: lee@gnu.ac.kr

** 경상대학교 건축공학과 계산역학연구실 연구원

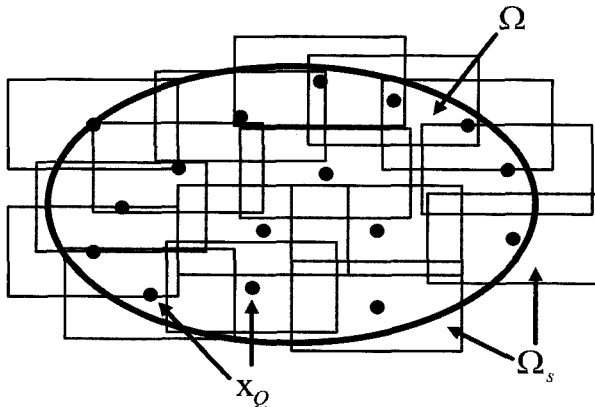
따라 형상함수도 변하는 특성을 가지고 있다. 따라서 무요소법은 불연속 구간이 존재하는 문제, 경계조건이나 불연속구간 등이 계속 변화하는 문제 또는 복잡한 형상을 가지는 구조물에 널리 사용되고 있다. 이 절에서는 무요소법의 기본 이론¹⁻²⁾을 간단히 기술하였다.

2.1 지지영역(Support Domain)

무요소법의 관심점(the point of interest)에서 적분결과를 그 지지영역내에 존재하는 절점과 밀접한 관계가 있다. 본고에서는 <그림 1>에 도시된 바와 같은 사각형지지영역(rectangular support domain)에 대해 기술하였다. 이때 x축과 y축에 대한 영향영역의 d_{ix} 와 d_{iy} 는 각각 다음과 같이 정의 된다.

$$\begin{aligned} d_{ix} &= \alpha_{ix} d_{cx} \\ d_{iy} &= \alpha_{iy} d_{cy} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 α_{ix} 와 α_{iy} 는 x와 y축과 연관된 무차원 실수이고 d_{cx} 와 d_{cy} 는 관심점 x와 y 근방의 평균절점거리이다. 이때 α_{ix} 와 α_{iy} 는 지지영역의 실제의 차원을 결정한다. 즉, $\alpha_{ix}, \alpha_{iy} = 2.5$ 라면 평균 절점거리가 2.5인 지지영역을 뜻한다.



<그림 1> 관심점의 영향영역

2.2 RPIM 형상함수

본 고에서는 형상함수의 형성을 위해 방사기저함수(Radial Basis Function, RBF)를 사용하는 RPIM(Radial Point Interpolation method)을 도입하였다. RPIM은 특이성 문제를 해결하고 임의로 분포된 절점에서 안정적으로 해를 구할 수 있으며, 유일한 변수가 반지름이기 때문에 3차원에서도 쉽게 해

석할 수 있는 장점이 있다. 또 무요소법이 필수경계조건을 만족 시키지 못하는 단점이 있으나 RPIM은 크로네커 델타(Kronecker delta) 함수를 포함하고 있기 때문에 특별한 추가 방법 없이 필수경계조건을 처리할 수 있다. RPIM의 보간 함수는 다음과 같다.

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x})a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\mathbf{x})b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{b} \quad (2)$$

여기서 $R_i(\mathbf{x}), P_j(\mathbf{x})$ 는 각각 방사기저함수(Radial Basis Function), 다항기저함수(Polynomial Basis Function)이고, 계수 a_i, b_j 는 미지 상수이다. n은 국소지지영역에 존재하는 필드절점(field node)의 수이다.

본 고에서는 MQ(Multi-Quadratics Function)-RBF을 도입한 무요소법을 이용한 예를 기술하였으며 방사기저함수는 다음과 같이 정의된 절점거리에 관한 함수이다.

$$R_i(\mathbf{x}) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q \quad (3)$$

여기서 α_c, q 는 무차원인 임의의 실수변수이고, d_c 는 관심점근처의 평균절점거리를 나타내고 r_i 는 다음과 같다.

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (4)$$

그리고 다항기저함수는 다음과 같다.

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots\} \quad (5)$$

이때 식(2)의 상수 a_i, b_j 는 필드함수(field function)를 모든 국부지지영역(local support domain)에 있는 절점을 강제로 통과시킴으로써 결정할 수 있다. k번째 점에서 식(2)는 다음과 같은 형태로 다시 쓸 수 있다.

$$u(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^n R_i(x_k, y_k)a_i + \sum_{j=1}^m P_j(x_k, y_k)b_j, \quad (6)$$

$k = 1, n$

위의 식을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{U}_\ell = \mathbf{R}_\ell \mathbf{a} + \mathbf{P}_\ell \mathbf{b} \quad (7)$$

여기서 U_ℓ 는 국부지지영역내의 절점에서 함수의 값을 성분으로 하는 벡터를 나타내며 다음과 같다.

$$\mathbf{U}_\ell = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (8)$$

방사기저함수의 모멘트행렬 R_0 과 다항기저함수의 모멘트행렬 P_m^T 는 다음과 같이 나타낸다.

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (9)$$

$$P_m^T = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_m(x_1) & p_m(x_2) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (10)$$

식(7)에 대한 유일해를 구하기 위해서 아래의 제약조건을 도입하였다.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n p_j(x_i) a_i = P_m^T a = 0, \quad j=1, m \quad (11)$$

식(7)과 위의 제약조건을 조합하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{U}_\ell = \begin{Bmatrix} U_\ell \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = G a_0 \quad (12)$$

식(11)을 식(2)에 대입하면 다음과 같다.

$$u(x) = \{R^T(x) P^T(x)\} G^{-1} \tilde{U}_\ell = \tilde{\Phi}^T(x) \tilde{U}_\ell \quad (13)$$

따라서 RPIM의 형상함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\Phi}^T(x) = \{\phi_1(x) \phi_2(x) \dots \phi_n(x)\} \quad (14)$$

따라서 n 개의 필드절점에 대한 RPIM의 형상함수는 다음과 같다.

$$u(x) = \tilde{\Phi}^T(x) U_\ell = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i \quad (15)$$

2.3 강성행렬의 정식화

정적인 문제에서 Galerkin의 가중잔차법을 이용하면 해석하고자 하는 문제의 약형식(weak form)은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (L\delta u)^T (DLu) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta u^T t d\Gamma = 0 \quad (16)$$

평면문제에서 변위장은 RPIM 형상함수와 국부지 영역의 필드절점 변위를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u^h = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \Phi u \quad (17)$$

식(17)의 변위식을 이용하여 변형률-변위관계를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= Lu^h = L\Phi u \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}}_u \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 B_I 는 절점 I 에서의 변형률-변위 관계 행렬을 나타낸다.

식(17)과 식(18)은 가상변위와 가상변형률로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta u^h = \Phi \delta u = \sum_{I=1}^n \Phi_I \delta u_I \quad (19)$$

$$\delta \varepsilon = L \delta u^h = L \Phi \delta u = B \delta u = \sum_{I=1}^n B_I \delta u_I \quad (20)$$

또한 응력-변형률관계식은 다음과 같다.

$$\sigma = D \varepsilon = DB u = \sum_{I=1}^n DB_I u_I \quad (21)$$

여기서 선형탄성문제의 탄성상수행렬 D 는 평면응력일 때 다음과 같다.

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 \\ \nu & 1-\nu \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서 E 는 탄성계수를 나타내고 ν 는 프와송비를 나타낸다.

위에서 정의한 식(18)과 식(20)을 식(16)의 첫 번째 항에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (L\delta u)^T (DLu) d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\sum_{I=1}^n B_I \delta u_I \right)^T \left(\sum_{J=1}^n DB_J u_J \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \delta u_I^T [B_I^T DB_J] u_J d\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

국부영역의 절점을 전체영역 절점번호인 1번부터 N 번으로 바꾸면 식(23)은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N \delta\mathbf{u}_I^T \underbrace{\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \right)}_{\mathbf{K}_{IJ}} \mathbf{u}_J \quad (24)$$

식(24)는 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N \delta\mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J = \delta\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (25)$$

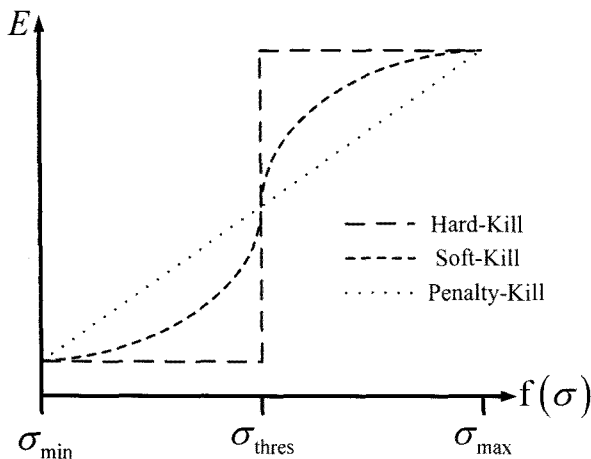
따라서 N개의 절점을 가지는 영역에 대한 전체강성행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \quad (26)$$

구조물의 전체강성행렬이 형성되면 선형대수방정식을 푸는 방법은 유한요소법과 동일하다.

3. 제거법

본 절에서는 평면요소의 위상최적화를 수행하기 위해서 도입한 경질제거법(hard-kill method)⁶⁾에 대하여 기술하였다. 경질제거법의 중요한 특징은 반복계산을 통하여 상대적으로 낮은 응력이 발생하는 요소를 제거해 나가는 것이다. 이러한 개념은 응력을 분담하지 않는 요소가 제거됨으로써 구조물의 모든 부분이 충분히 응력을 분담하게 하여 전체 구조물이 균등하게 하중에 저항하는 위상으로 바꾸어 나가는 기법이다. 따라서 경질제거법은 유한요소법을 사용할 경우 요소망에 의존적이며 이는 경질제거법의 단점으로 간주될 수 있다. 경질제거법으로 제거된 재료는 0에 가까운 값을 가지는 물성치로 치환하게 된다. 본 연구에서는 무요소법을 이용하여 구조물의 응력상태



〈그림 2〉 경질제거법 응력제거기준

를 계산하고 배경셀 내에 있는 절점 응력의 평균값이 설계자가 결정한 최대 응력의 소거기준보다 작으면 배경셀에 지정되어 있는 탄성계수 값을 0에 가까운 값으로 조정하여 배경셀 내에 존재하는 절점에 연관된 탄성계수값을 연질재료로 바꾸는 방법을 이용하였다. 〈그림 2〉는 본 연구에서 이용한 경질제거법의 기준을 그림으로 도시한 것이다.

참고로 경질제거법에서는 각 반복계산과정을 통해 제거되는 재료영역이 안정적인 위상의 변화로 이어지기 위해서 적절한 제거율이 주어져야 한다. 그러나 제거기준이 되는 응력값 σ_{thres} 는 구조물의 종류와 가해지는 하중에 따라 달라서 제거응력수준을 정하는데 어려움이 있다. 따라서 본 연구에서는 이러한 기준의 경질제거법의 단점을 개선하기 위하여 전체구조물의 응력분포에서 일정비율이하에 포함되는 설계영역을 제거하는 방법을 택하였다. 따라서 제거기준응력을 다음과 같이 설정하였다.

$$\sigma_{thres}^i = \sigma_{(p)} = \sigma_{(i \times \mathbf{n} \times N_{cell})} \quad (27)$$

여기서 i 는 반복계산수를 나타내고 \mathbf{n} ($0 < \mathbf{n} < 1$)는 제거율을 나타낸다. 이때 제거율 \mathbf{n} 은 각 반복계산 단 $\sigma_{(p)}$ 계마다 임의 값을 사용할 수 있으나 본 연구에서는 상수 값을 사용하였다. 단 는 구조물의 응력을 오름차순으로 정리하였을 때 p 번째 응력을 나타낸다. 이때 p 는 설계영역의 전체 배경셀의 수(N_{cell})를 초과할 수 없다. 참고로 위상의 변화를 더욱 가속화시키기 위하여 설계자가 제거율을 높은 수치로 설정할 수 있다. 이런 방법으로 갱신되는 설계영역 내의 응력분포 값이 최대가 될 때 전 응력 구조물(fully stressed structure)이라고 한다.

4. 최적화알고리즘

경질제거법을 이용하여 구조물의 위상최적화 알고리즘을 형성하면 다음과 같다:

- ① 주어진 구조물에 대한 초기 탄성계수를 입력한다.
- ② 초기(또는 갱신된) 탄성계수로 구조물의 변위값을 구한다.
- ③ 변위값을 사용하여 Von Mises응력값 또는 변형에너지 값을 구한다.
- ④ 경질제거법으로 소거 대상의 배경셀을 선정한다.

이때 식(27)을 이용한다.

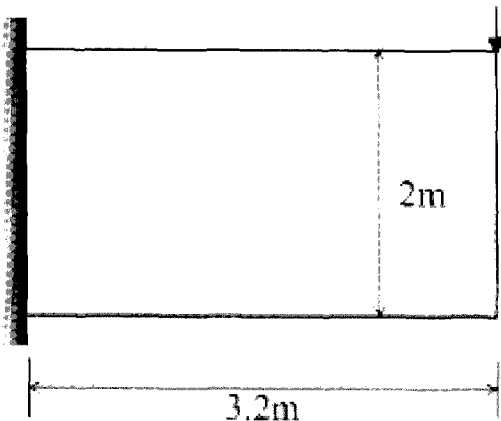
- ⑤ 소거대상 배경셀의 탄성계수값을 갱신한다.
- ⑥ 갱신된 설계변수값이 주어진 정지조건을 만족하면 최적화를 멈추고 그렇지 않으면 ②-⑤를 반복한다.

5. 위상최적화 예

본 고에서는 무요소법을 이용한 위상최적화기법의 가능성을 두 가지의 평면구조물에 대한 위상최적화를 통해 보여주고자 한다.

5.1 캔틸레버 보

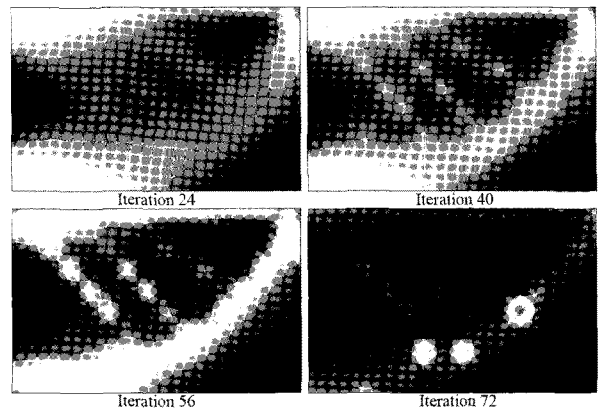
무요소법을 이용한 위상최적화기법의 성능을 조사하기 위하여 <그림 3>에 도시한 캔틸레버 보를 이용하여 위상최적화를 수행하였다. 캔틸레버 보의 크기는 길이 $L=3.2m$, 높이 $D=2m$ 이며 오른쪽 끝단의 상부에 하중의 하중 $P=1000N$ 을 작용시켰다. 보의 탄성계수는 $E=3 \times 10^7 N/m^2$ 이고 프와송비 ν 는 0.3을 이용하였다. 이 예제에서는 Von Mises응력을 제거기준에 사용하였다.



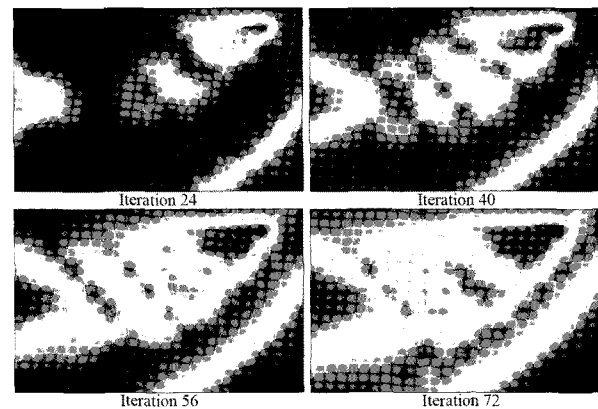
<그림 3> 캔틸레버 보

이 예제에서는 먼저 160개와 640개의 배경셀을 최적화에 이용하였다. 최적화를 수행하기 위해 각 반복계산마다 일정한 제거율 $\kappa=0.0125$ 을 설정하였다. 이는 각 반복계산마다 160개 배경셀의 경우 2개씩 그리고 640개 배경셀의 경우 8개씩 일정하게 그 탄성계수를 제거하게 되는 것이다. 반복계산을 통하여 도출된 보의 Von Mises응력분포와 최적위상은 <그림 4-7>에 각각 도시하였다. 응력분포나 최적위상에

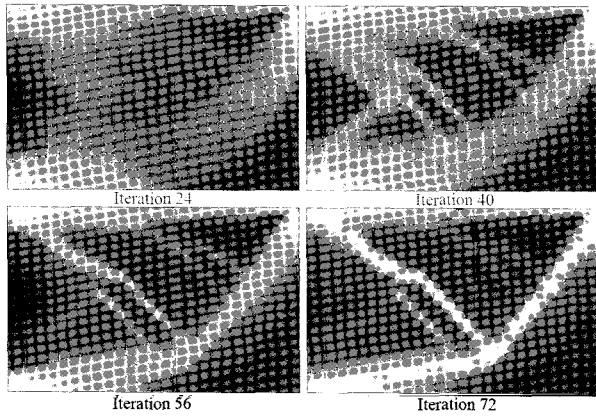
서 붉은색은 응력수치나 물질의 수치가 높은 것을 푸른색은 낮은 것을 나타낸다. 전술한 바와 같이 경질 제거법은 설계영역의 재료를 제거하는 방법으로 새로운 위상을 찾게 되는데 이는 반복계산이 진행됨에 따라서 구조물의 일부는 연질화되고 응력이 많이 발생하는 부분은 그냥 유지되어 상대적으로 경질화 되게 된다. 다시 말하면 반복계산을 통하여 구조물의 물질을 제거함으로써 위상을 갱신하는 방법으로 구조물의 새로운 위상을 도출하게 되는 것이다. 따라서 이 예제에서는 반복계산이 24, 40, 56, 72번 이루어질 때 구조물에 분포하고 있는 재료가 각각 30%, 50%, 70%, 90%가 제거되게 된다. 본 연구를 통하여 도출된 최적위상은 참고문헌¹⁴⁾에 도출된 최적위상과 비교적 잘 일치하는 것으로 나타났다. 그런데 그림 5와 그림 7을 비교해 보면 배경셀의 수는 최종 위상에 많은 영향을 미치는 것으로 판단되며 위상최적화시 적절한 수의 배경셀을 이용하는 것이 필요한 것으로 나타났다.



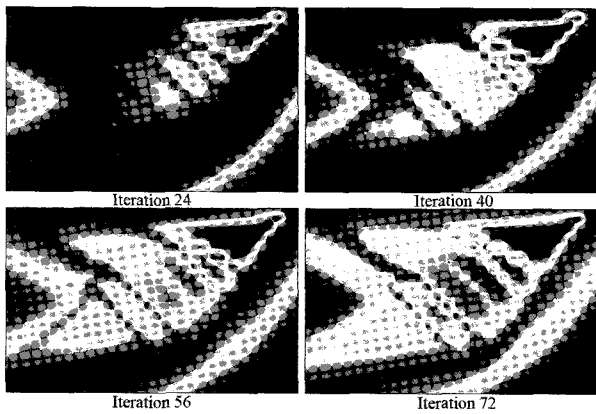
<그림 4> 반복계산에 따른 보의 Von Mises 응력 분포(배경셀160)



<그림 5> 반복계산에 따른 보의 최적위상(배경셀160)



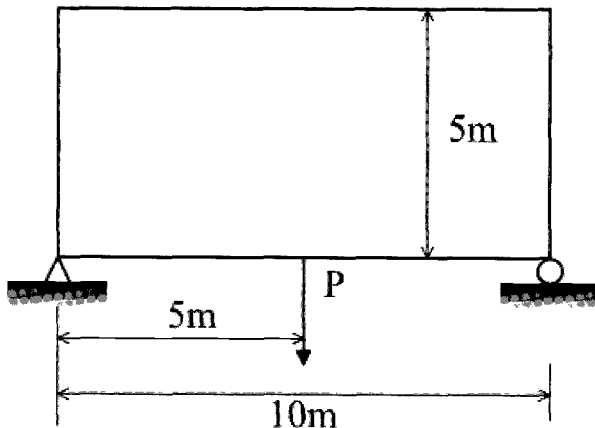
〈그림 6〉 반복계산에 따른 보의 Von Mises 응력 분포(배경셀640)



〈그림 7〉 반복계산에 따른 보의 최적위상(배경셀640)

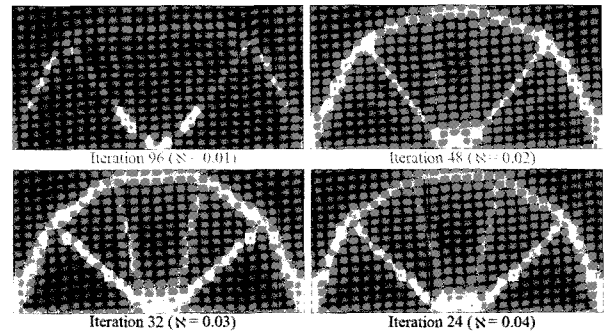
5.2 단순보

이 예제에서는 경질제거법의 제거속도에 따른 최적위상의 변화에 대해서 분석하였다. 이를 위해 단순 지지된 보를 이용하였으며 보의 형상은 〈그림 8〉에 도시하였다.

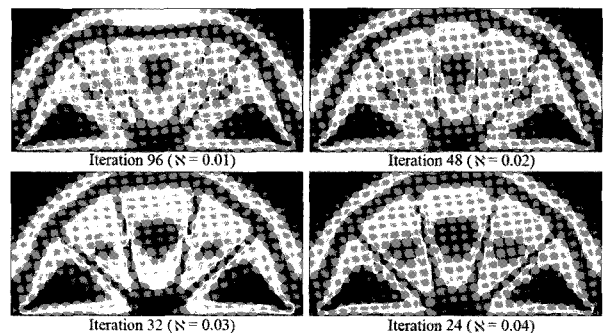


〈그림 8〉 단순보

보의 직사각형 영역의 크기는 $L=10m$, $H=5m$ 이다. 최적화에 이용된 탄성계수는 $E=1.0 \times 10^5 N/m^2$ 이고 프와송비 $\nu=0.3$ 이다. 위상최적화에 필요한 Von Mises응력을 계산하기 위하여 위해 1071개의 절점과 1000개의 배경셀로 보를 모델링하였다. 단순보의 위상최적화에 제거율 $\kappa=0.01, 0.02, 0.03, 0.04$ 의 4가지 케이스에 대해서 최적화를 실시하고 그 최종결과를 〈그림 9〉와 〈그림 10〉에 도시하였다. 이 예제를 통하여 구해진 Von Mises응력 분포와 최적위상으로부터 무요소법과 경질제거법을 이용할 경우 제거속도는 최적위상에 큰 영향을 끼치는 것으로 나타났다. 특히 제거속도가 느릴수록 최적위상이 설계영역의 일부에서 복잡하게 나타난 반면 제거속도를 빠르게 하면 최적위상은 보다 뚜렷하고 단순하게 도출되는 것으로 나타났다. 이때 4가지 제거율에 따라서 각각 반복계산을 96, 48, 32, 24번 수행하였다. 수치해석 결과로부터 경질제거법을 사용할 경우 %의 적절한 제거율을 사용할 경우 낮은 제거율에 비해 반복계산의 수도 줄일 수 있을 뿐 아니라 적절한 위상을 도출할 수 있어 효과적인 것으로 나타났다.



〈그림 9〉 반복계산에 따른 보의 Von Mises응력 분포.



〈그림 9〉 반복계산에 따른 보의 Von Mises응력 분포.

6. 결론

본고에서 소개한 무요소법을 도입한 위상최적화 기법은 요소망을 생성하지 않고 절점의 정보만을 이용하여 해석을 수행하므로 최적설계를 위한 과정이 단순하며 특히 이러한 기법은 고층건물과 대공간 구조에서 빈번히 나타나는 프리폼 구조에 대한 위상최적화 기법에 효율적으로 이용될 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Liu, G. R., Mesh Free Method: Moving beyond the Finite Element Method, CRC Press Company, New York, 2002.
2. Liu, G. R., Gu, Y. T., An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming, Springer, 2005.
3. Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using homogenization method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, pp. 197-224, 1988.
4. 배정은, 이상진, 김용부, 평면구조의 위상최적화, 대한건축학회논문집, 제13권 제6호, pp. 215-227, 1997.
5. 이상진, 저차 유한요소를 이용한 다하중 경우를 가지는 평면구조물의 위상최적화, 한국전산구조공학회논문집, 제 16권 1호, pp. 59-68, 2003.
6. Hinton, E. and Sienz, J., Fully stressed topological design of structures using an evolutionary approach, Engineering Computation, Vol. 12, 1995, pp. 229-244