한국수학사학회지 제22권 제3호(2009년 8월), 153 – 170

새수학 운동가 Zoltan P. Dienes의 생애 및 연구 업적

경인교육대학교 수학교육과 김수미
smkim@ginue.ac.kr

Dienes는 새수학 운동가로서, 수학의 구조를 어린 학생들에게 가르치고자 부단히 노력한 연구가이며, 실천가이다. 국내에서는 그의 수학교육 이론이 부분적으로 알려져 있지만, 그것은 50여 년 간 Dienes가 남긴 연구 업적의 일부에 불과하다. 이 연구에서는 약 90여 년 간의 그의 긴 일생과 약 50 여 년간의 연구 일생을 돌아보고, 그것이 오늘날의 수학교육에 주는 의미를 되새겨 보고자 한다. 먼저 그의 일생은 그의 회고록과 기타 연구 논문에 언급된 내용을 바탕으로 크게 다섯 부분으로 구분하여 정리하였다. 그의 연구 업적은 Dienes가 연구 전성기에 관심을 가졌던 분야로 꼽은 수학학습심리 이론, 교육과정개발, 교사교육, 그가 개발한 교구와 게임 등의 주제를 바탕으로 정리하였다. 이러한 고찰을 통해 그의 학문적 성향과 연구 내용이 그의 인간적 삶의 배경과 역사와 무관하지 않음을 알 수 있었다.

주제어 : 디엔에스(Dienes), 새수학, 수학학습심리, 교구, 게임

1. 서론

Dienes는 새수학 운동 시기에 활발히 활동했던 세계적으로 유명한 수학교육자이다. 그는 수학의 구조를 학생들에게 지도하기 위한 방법으로서 교구와 게임을 수학교육에 도입할 것을 주장하였으며, '역동성의 원리', '구성의 원리', '수학적 다양성의 원리', '지각적 다양성의 원리' 등 수학학습을 위한 원리와 수학학습 6단계 이론 등은 오늘날까지도 여전히 중요하게 취급되는 이론이기도 하다. 그러나 의외로 그의 이론에 대한 사람들의 이해는 매우 피상적이다. 예를 들면 그가 만든 놀이와 게임, 교구에는 어떤 것이 있는지, 그것들의 특징은 무엇인지에 대해 아는 사람은 많지 않다. 그가 제시한 수학적 다양성의 원리나 수학학습 6단계 이론에 대해 언어적으로 설명할 수 있는 사람은 있어도, 그에 합당한 수학적 보기를 풍부하게 제시할 수 있는 사람은 많지 않다.

이와 같은 상황은 미국도 마찬가지인 듯하다. Hirstein([13])은 Dienes가 미국 학교 수학에 끼친 영향은 적어도 간접적으로는 지대하지만, 직접적으로는 긍정적이지 않다고 평한다. 수학교구를 갖춘 수학 실험실은 70년대 중반 이래 미국 학교의 주요 부분이 되었으나, 대부분의 미국 교사들은 디엔에스가 기여한 공헌을 인식하지 못하고 있

다. Dienes의 십진블록은 보편화되었으나 그 외 다진수 블록은 이용되지 않고 있으며, 여러 가지 변형된 논리 블록이 생산되었으나, 사람들은 그것이 Dienes의 작품이라는 사실을 알지 못한다. 또한 오늘날의 기하수업은 물리적 묘사에 더욱 충실하지만 추상적 체계에 대한 논리적인 논의를 소홀히 하고 있다(pp.171-2).

이처럼 Dienes의 이론이 미국 학교 수학에 대중성을 얻지 못했던 이유는 무엇인가? Herstein([13])은 Dienes의 이론이 알려진 시점과 그가 제시한 수학적 보기의 난해성을 그 이유로 들고 있다. 그의 이론은 1970년대에 알려지기 시작했으나, 그 시기는 새 수학이 쇠퇴하고 기초・기본 복귀 운동이 시작될 무렵이었다. 당시 교육자들은 학생들이 빠르고 정확하게 계산하는 능력에 관심을 기울였겠지만, Dienes는 추상화, 일반화, 정당화 등과 같은 사고 과정을 묘사하는데 전력을 기울였다. 뿐만 아니라 그가 제시한 수학적 보기들은 수학에 대한 전문적 소양을 갖추지 못한 일반 교육자들이 이해하기 어려운 수준이었다. 따라서 교사 교육 프로그램에서는 Dienes의 학습 이론들을 설명했을지 모르나, 가장 단순한 보기들 정도가 제한된 수학적 지식을 가진 예비 교사들에게 의미를 주었을 것이다.

그러나 최근 미국에서는 Dienes의 아이디어가 재평가를 받기 시작했다. Sriraman과 Lesh([15])는 Dienes의 아이디어가 30년이 지난 오늘에서야 그 힘과 아름다움을 평가 받기 시작한다고 했다. 그는 수학교육계에 살아있는 전설로 불리며(Sriraman, [14]), Brownell, Van Engen[1)], Bruner와 더불어 고전 인지심리학의 대표적인 학자로 간주 되고 있다(English, 2007). 이처럼 사람들이 Dienes의 아이디어를 새롭게 평가하고, 주목하려는 것은 그의 아이디어가 오늘날의 수학교육에도 여전히 의미 있고, 적용 가능하며, 연구할 가치가 있다고 생각했기 때문일 것이다. 우리나라에서도 그동안 Dienes에 대한 체계적인 연구가 없었던 점을 감안해 보면, 그의 생애와 그의 연구 업적을 정리하는 일은 시기적절하고 의미 있는 작업이 될 것이다.

2. Dienes의 생애

Dienes는 '딘즈' 혹은 '디너스'로 불려왔으나, 그의 회고록 「Memoirs of a Maverick Mathematician(Dienes, 1999)」서문에 명기되었듯이 '디엔에스(Dee-enn-ess)'로 발음하는 것이 맞다. 그의 생애는 대부분의 자료에서 아주 간략히 소개되고 있을 정도이지만, 다행히 1999년에 그의 회고록이 출간됨으로써 그의 긴 생애를 간접적으로 들여다 볼 기회를 가지게 되었다. 이 절은 569쪽의 방대한 회고록에 제시된 내용을 편의상 다섯 부분으로 구분하여 각 기간에 활동한 주요 내용과 경력을 요약・정리하였다.

1) Van Engen은 우리나라에 널리 소개된 학자는 아니다. 그는 학생들이 문제해결상황에서 답을 찾기 전에 문제의 구조를 확인하는 능력과 유사한 그러나 겉보기에는 다른 여러 상황들 가운데 규칙을 찾는 능력을 개발하는 것의 중요성을 역설하였다.

(1) 제1기(1916~1939) : **출생과 성장**

Zoltán Pál Dienes(영문명 : Zoltan Paul Dienes)(1916~)는 헝가리 부다페스트에서, 수학교사인 아버지와 무용가인 어머니 사이에서 태어났다. 그는 세계 대전과 부모의 이혼으로 헝가리, 독일, 프랑스, 영국 등 유럽 여러 나라를 전전하며 유년시절을 보냈다. 이와 같은 복잡한 환경은 그로 하여금 여러 나라의 언어를 익히는 데 긍정적인 역할을 하기도 했다. 그는 1932년 이후 청년 시절을 영국에서 아버지와 함께 보냈으며, 아버지의 권유에 의해 학부 전공과 다른 수학으로 1937년에 석사 학위를, 1939년에 박사학위를 취득하였다.

(2) 제2기(1939~1960) : **수학 지도 및 수학교육에 대한 관심 시작**

그가 박사학위를 받은 직후 2차 세계대전이 발발하였으나, 다행히 영국 Highgate School과 Dartington에서 수학 교사 생활을 시작할 수 있었다. 1944년부터는 영국 Southampton, Sheffield, Manchester 대학에서 시간 강사를 하였으며, 1950년에 드디어 Leicester에서 전임 교수직을 얻게 되었다. 대학에서의 강의 경험은 그로 하여금 어떻게 하면 수학을 잘 가르칠 수 있는가에 대해 관심을 가지게 하였으며, 이 기간에 본격적으로 학습심리에 관심을 가지고 연구에 몰두하여 심리학 박사 학위를 수여하였다. 세계적으로 유명한 다진수 블록을 발명하고, Herbert Read가 서문을 쓴 명저 「Building up Mathematics」가 출판 된 것도 이 무렵의 일이다.

(3) 제3기(1960~1966) : **연구 부화기**

1960년 10월 하버드 대학 인지과학 센터에서 Bruner와 함께 공동으로 연구할 기회를 가지게 됨으로써, 수학교육에 대한 관심이 증폭되었다. 그는 1년간을 미국의 보스턴에 머물면서, 추상화와 일반화 등과 같은 사고 과정에 대해 끊임없이 탐구하고 동료들과 의견을 교환하면서 인지과학에 대한 흥미를 가지게 되었다. 그리고 이러한 인연을 바탕으로 국제 수학교육연구 단체인 International Study Group for Mathematics Learning(ISGML)을 창립하였으며, 국제 저널 Journal of Structural Learning을 창간하였다. 1961년에는 호주의 University of Adelaide의 심리학과 교수로 임명되면서, 본격적으로 수학교육자로서의 삶을 살게 되었다. 그는 호주에서 약 4년간 체류하였는데, 그 시기에 Papua New Guinea 지역의 원주민 학교를 직접 순회하면서 권위적이고 형식적인 전통적 수학 지도 방법을 허물고, 게임과 교구를 사용하여 학생들이 즐겁게 수학 수업에 참여하는 모습을 교사들에게 보여주기 위해 노력하기도 하였다.

(4) 제4기(1966~1978) : **연구 전성기**

호주에서 캐나다로 자리를 옮긴 것은 캐나다의 University of Sherbrooke에서의 강

연이 계기가 되었다. 그 곳에서 그는 군(group)을 소재로 한 게임을 초등학교 2학년 학생들에게 프랑스어로 수업 시연하였는데, 수업이 성공적으로 마무리되면서 캐나다의 수학교육계에 주목을 받게 되었다. 그리하여 1966년부터 약 12년간을 캐나다의 Sherbrooke 대학과 Brandon 대학에서 머물면서, 그의 전 생애에서 가장 활발한 연구 활동을 수행하였다. 그는 이 시기에 대해 다음과 같이 기술하고 있다.

> 나는 이전에 결코 그렇게 많은 시간을 연구에 투자한 적이 없었다. 어린이들로 하여금 수학에 관련된 과제에 참여하도록 하는 일에 완전히 빠져서, 마치 어떤 경지에 도달한 것처럼 느껴졌었다([10], p.390).

Dienes는 Sherbrooke 대학에 교편을 잡으면서 동시에 수학심리 연구센터의 소장을 맡게 되었으며, 당시로는 놀라운 규모의 연구 기금을 캐나다 정부로부터 수령하였다. 이것을 발판으로 그의 연구는 영국, 프랑스, 이탈리아, 헝가리, 독일 등 유럽의 여러 나라를 아우르는 국제적인 규모로 확장되었다. 또한 그는 수학 이외에도 음악, 미술, 무용 등 다양한 분야의 사람들과 어울리면서, 수학과 타학문과의 관련성을 연구하고 이를 수학교육에 응용하고자 노력하였다. Dienes는 학자들과의 교류 이상으로 학생들이나 교사들과의 교류를 중요시 여겼다. 그가 대학에 가서 가장 먼저 한 일은 자신의 아이디어를 실험하고 자신의 연구를 협력해줄 학교를 찾는 일이었으며, 학기 초의 몇 주는 학교에서 대부분의 시간을 보낼 정도로 현장 연구를 중요하게 생각했다. 이러한 노력의 결과는 출판으로 이어져서 이 기간 동안 많은 저작물이 Dienes의 이름으로 탄생하였다.

(5) 제5기(1978~현재) : 노년기

1978년에는 12년간의 캐나다 생활을 정리하고, 유럽으로 귀환하여 영국, 독일, 이탈리아 대학에서 강의와 집필 활동을 재기하였다. 이 시기에 가장 주목할 만한 업적으로는 1978년부터 1986년까지 수행된 이탈리아 초등교육과정 개발 작업을 들 수 있다. 이것은 두말할 여지없이 이탈리아어로 제작되었으며, 그의 외국어 구사 능력을 또 한 번 입증해 주었다. 그러나 무엇보다도 중요한 것은 이 작업을 통해 여전히 새수학 정신을 이어갔다는 것이다. 이와 같은 연구 노력 덕분에 1980년대에는 University of Siena와 University of Caen에서 명예박사 학위를 수여했다.

1980년대 중반부터는 Exeter University에서 명예 연구원으로서, 예비교사와 교수들을 대상으로 강의와 시연수업을 하였으며, 한동안 마이크로 컴퓨터에 빠져 이를 활용한 독창적인 교사 프로그램을 개발하기도 하였다. 1995년에는 이 대학에서 다시 한 번 명예박사를 수여했다. 최근에는 대부분의 시간을 캐나다 Wolfville에서 보내면서 여전히 아동을 위한 게임을 개발하고, 자신의 아이디어를 글로 옮기면서 마지막 생을 정리하고 있다고 한다.

3. Dienes의 주요 연구 업적

(1) 수학학습심리에 대한 주요 아이디어

수학학습과 관련하여 Dienes가 제시한 이론으로는 네 가지 학습 원리(활동적 원리, 구성의 원리, 수학적 다양성의 원리, 지각적 다양성의 원리)와 수학학습6단계 이론이 가장 널리 알려져 있다. 이 두 이론에 대한 요지는 여타의 문헌에서 쉽게 찾아 볼 수 있으므로 여기서는 생략하기로 한다. 대신 이 절에서는 Dienes([9])가 수학의 본질로부터 추출된 원리라고 명명한 것들을 네 가지 관점에서 정리하여 재진술하겠다.

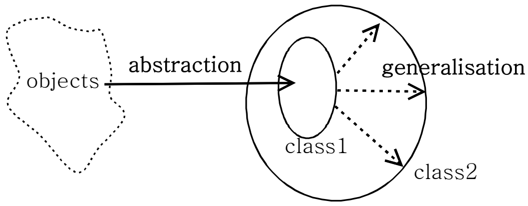
가. 추상화와 일반화의 사고 교육 강조

수학적 사고에 대한 Dienes의 관심은 특히 추상화와 일반화에 집중되어 있다. 그가 수학교육연구에 입문한 초기부터 자신의 연구업적을 정리하는 오늘에 이르기까지 변함없이 추상화와 일반화에 대한 관심을 표명하고 있다는 점은 매우 놀랍고 특이하다. 1960년대 초 미국의 하버드 대학 인지과학 센터에서 1년간 머무르면서 Bruner와 공동연구를 하는 시기에 추상화와 일반화에 대한 관심이 고조되었음을 다음 글을 통해 알 수 있다.

> 나는 사람들이 추상화(abstraction)와 일반화(generalisation) 과정에 대해 부분적으로 오해하고 있다고 생각해 왔다. 대부분의 사람들은 이 둘이 실제로는 같은 것이라고 생각하는 경향이 있다. 그러나 ‘추상화하기(abstracting)’는 공통점이 발견된 여러 가지 다양한 상황을 하나의 류(class)에 귀결시키는 것을 의미한다고 생각한다. 따라서 내가 보기에 '추상하다(to abstract)'는 ‘하나의 류(class)를 구성하는’ 것이다. 반면 ‘일반화하다(to generalise)’는 우리가 어떤 사건이나 사상으로 구성된 류에 대한 지식을 이미 가지고 있을 때, 일반화하기(generalising)에 의해, 그 류를 확장하는 것을 의미한다. 따라서 ‘추상화’는 원소들을 하나의 류로 이끄는 과정인 반면, ‘일반화’는 류를 류로 이끄는 과정으로 두 번째 류는 첫 번째 류의 확장이다. 이러한 생각이 사실이라면, 교육적인 것 이외에 철학적인 중요한 내용을 시사하게 된다([10], p.290).

인용문에 나타난 바와 같이 Dienes는 추상화와 일반화 개념을 명확하게 구분하고자 하였다. 즉 추상화는 개별적인 대상들 사이에서 공통점을 발견하고, 그 사물들을 하나의 범주로 묶는 사고 활동을 말한다. 반면 일반화는 추상화에 의해 습득된 지식을 바탕으로 사물의 범주를 확장하는 사고 활동이다. 시기적으로 보면, 일반화는 추상화 이후에 발생하는 사고과정이다. 결국 Dienes의 관점에서 개념 형성은, 추상화에 의해 대상(object)이 류(class1)가 되며, 일반화에 의해 류(class1)가 보다 확장된 류(class2)가

되는 과정이라 할 수 있다([그림 1]).



[그림 1] 추상화와 일반화

물론 이러한 아이디어가 전혀 새롭다거나 독창적인 것은 아니다. 개념 형성과 관련되어 자주 언급되는 내포와 외연에 대한 구분은 Dienes가 제시한 추상화와 일반화에 대한 구분과 매우 흡사하다. 그러나 이러한 노력 덕분에 Dienes는 개념 형성 과정을 보다 치밀하게 파악할 수 있었으며, 아동들의 개념 학습을 돕기 위한 독자적인 아이디어를 개발할 수 있었던 것으로 보인다.

추상화와 일반화에 대한 Dienes의 지속적인 관심은 1995년도에 작성한 원고 「Some thoughts on the Dynamics of Learning Mathematics」를 보면 명확해 진다. 그는 이 원고에서 자신의 수학학습 6단계이론(six stages theory of learning mathematics)을 추상화 과정이라 명시하였다. 그는 아동들이 획득하고 있는 수에 대한 초보적인 개념과 고차적인 수학을 공부한 수학자들이 가지고 있는 수에 대한 논리-철학적 구성물을 구분하였다. 따라서 6단계는 이 둘의 간극을 줄이기 위해 초보적인 추상화로부터 고차적인 추상화로의 점진적인 이행을 돕도록 설계되었다.

구체적으로 6단계의 전반부(1-3단계)는 일상적인 경험이나 상황, 지각적으로 다양한 교구, 다양한 게임 등이 순차적으로 제시되고, 이로부터 비본질적 요소를 제거하고 본질이 되는 공통 요소를 찾아내도록 구성되어 있다. 결국 Dienes가 제안한 '지각적 다양성의 원리'와 '수학적 다양성의 원리'는 다양성 그 자체가 목적이 아니라, 다양성 가운데 변하지 않는 본질적 요소를 발견하는 경험을 통해 초보적인 추상화에 이르도록 돕는 것이 목적임을 알 수 있다. 6단계의 후반부(4-6단계)는 전반부에서 도출한 초보적인 추상을 정착시키기 위해 시각적인 표현이나 상징 언어가 이용되며, 최종 단계에서 공리, 정리, 증명 등을 이용한 엄밀한 형식화로 나가도록 구성되어 있다([1], p.350).

추상화에 이어 일반화 역시 Dienes의 주요 관심 분야였다. 그는 일반화도 추상화 못지않게 수학에서 중요한 사고 과정임을 강조하면서, 수학교육자들의 자각을 촉구했다.

> 수학은 추상화에 대한 학문일 뿐만 아니라 학습자가 특수한 것에서 일반적인 것으로, 혹은 일반적인 것에서 더 일반적인 것으로 연구 영역을 확장하여 도약하고자 하는 상황 안에 풍부하게 내재해 있다. 따라서 일반화의 심리학적 과정은 수학교육자들이 자각해야할

또 다른 과정이다([9], p.31).

일반화에 대한 관심은 수학의 구조에 대한 관심과 일맥상통한다. Dienes는 아동들이 10진법을 배우는 것으로는 위치기수법의 원리를 파악하지 못한다고 생각하였다. 그리하여 여러 가지 게임과 교구를 통해 밑(base)과 지수(exponent)에 다양한 변화를 줌으로써, 궁극적으로 아동의 입에서 '임의의(any)'라는 일반화에 대한 아이디어를 얻어내어야 한다고 생각했다. 그는 교사들이 흔히 'x를 임의의 수로 놓자.'라는 말을 하지만, 일반화에 대한 경험을 가지지 못한 학생들에게 이 말은 아무런 의미가 없음을 명확히 하였다([9], p.42). Dienes는 밑이 10인 특수한 진법에서 한 발 더 나아가 밑이 임의의 수인 보다 일반적인 상황으로 연구 영역을 확장하는 것과 같은 일반화의 사고 경험이 초등학교 학생들에게도 가능함을 실험을 통해 입증한 바 있다. 이와 같이 그가 일반화의 사고 과정에 집중한 이유는 그가 새수학 운동가였다는 점을 감안하면, 일반화 그 자체보다는 그것으로 인해 수학적 구조를 보는 것이 가능했기 때문이라 생각된다.

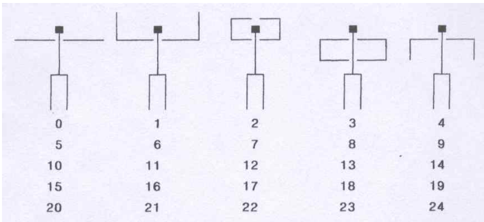
나. 학문의 제휴성(interdisciplinarity) 주장

Dienes는 통합 교과에 많은 관심을 보였으며, 그러한 관심과 구체적인 아이디어는 1973년에 출간된 저서 「Mathematics through the senses, games, dance and art」와 1987년에 발표된 논문 「Lessons involving music, language and mathematics」에 잘 나와 있다. 연구물의 제목에서 나타나듯이, 그는 수학을 특히 음악, 무용, 언어 분야와 관련짓는 것을 즐겼으며, 그러한 이면에는 무용교사였던 어머니의 영향과 자신의 외국어 구사 능력이 작용했을 것이다.

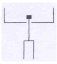
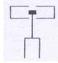
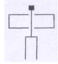
그가 수학 이외의 교과에 관심을 가진 이유는 추상화 과정의 학습을 위해 다양성의 범위가 수학 이외의 학문으로까지 확대되어야 한다고 생각했기 때문이다. 그러한 확장은 추상화의 과정을 이해하는데 도움이 될 뿐만 아니라 학생들이 수학을 예상치 못한 곳에서 발견하게 됨에 따라 수학을 공부하는 이유를 제공받을 수 있기 때문이다. 그는 여러 학문을 통합적으로 운영할 때 각 학문에 대한 중요도를 같은 수준으로 유지할 것을 제안하였다. 즉 어느 한 과목을 다른 과목에 종속되지 않게 함으로써, 각 학문이 균형을 이루는 것이 가장 좋은 방법이라 생각하였다([9], p.9). 이것은 그가 수학을 덜 중요하게 생각해서라기보다는 학생들에게 수학의 내용을 전달하는 것보다는 수학의 방법인 추상화를 이룩하는 것이 더 중요하다고 생각했기 때문일 것이다.

Dienes([9])가 제시한 보기는 수학, 무용, 음악, 작문 교육이 통합된 다음과 같은 7단계 과정으로, 10세의 아동을 대상으로 그의 조국인 헝가리에서 실험된 바 있다 (pp.10-12).

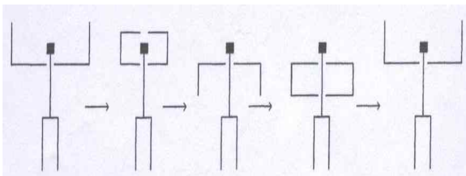
1단계 : 아동에게 [그림 2]와 같이 각 수에 하나의 팔동작이 대응되도록 수세기를 시킴으로써 법 5(modulo 5)를 학습시킨다. 학생들은 이를 통해 같은 위치에 있는 수들이 같은 팔동작에 대응됨을 배우게 된다.



[그림 2] 통합활동 1단계(팔동작과 수세기 대응)

2단계 : 덧셈(modulo 5)을 배우는데, 이 때 수를 더하는 대신 위치를 더한다는 사실을 알게 된다. 예를 들어  과 관련된 수에 과 관련된 수를 더하면, 항상  과 관련된 수가 나온다.

3단계 : 곱셈을 배우는데, 이것이 순환된다는 것을 알게 된다. 예를 들어 다음은 '곱하기 2'에 의한 결과이다. '곱하기 3'은 이와 반대순환이 나오며, '곱하기4'는 대칭적 순환이 나온다.



[그림 3] 통합활동 3단계(곱하기2)

4단계 : 각 팔동작에 다양한 음계를 대응시키도록 한다. 이 다섯 음계만 나오는 이미 알고 있는 노래를 부르게 하거나, 아니면 학생들이 노래를 만들어 부르도록 한다. 이 때 노래와 더불어 음계에 해당하는 팔동작을 하도록 한다.

5단계 : 4단계에서 선택된 곡의 음계에 곱셈을 수행하도록 한다. 그러면 전혀 다른 분위기의 새로운 곡이 만들어진다.

6단계 : 학급을 몇 부분으로 나누어 원곡과 변주곡을 동시에 부르게 한다. 그러면 매우 흥미로운 화음이 연출된다.

7단계 : 학생들에게 멜로디나 화음에 대해 느낀 바를 생각해 보게 하고, 각 음계에 적합한 단어로 표현해 보게 한다. 그러면 새로운 음과 새로운 가사로 이루어진 새로운 곡이 탄생하게 된다.

이 보기는 어린 학생들이 원소가 5인 체를 다룸으로써 수학적 경험을 하도록 고안되었다. 그러나 그 외에도 음악에 팔 동작을 맞춤으로써 운동조정능력이 향상되고, 음계의 변환과 음악적 메시지에 대한 느낌을 표현함으로써 음악적 경험을 하게 된다. 또한 가사를 쓰고 노래를 부름으로써 작문 연습과 발성 연습을 할 기회를 갖게 된다. 이것은 명백하게 하나의 과목이 다른 과목에 종속되지 않는 형태로서, 교사의 지도하에 아동의 발달 영역을 확장시킬 수 있는 통합적 활동이라 할 수 있을 것이다.

다. Piaget의 발달단계에 대한 새로운 시각

Dienes는 젊은 시절 아주 짧은 기간 동안 제네바의 Rousseau 연구소에서 Piaget 학파 그룹과 공동연구를 한 것을 계기로, Piaget의 이론에 대해 많은 관심을 가지게 되었다. 그는 특히 '조작적(operational)'이라는 용어의 의미에 대해 관심을 가지고 공동연구원들에게 질문을 하였지만, 질문할 때마다 다른 답변이 나와서 당혹스러웠다고 회고한다. 결국 그는 Piaget에게 자신이 부여한 '조작적'의 정의를 다음과 같이 설명하고, 그에 대한 합의를 이끌어 내었다.

> 피아제 박사님, 상태를 중재해야한다는 생각을 하지 않고도 조작자(operator)를 대상으로 조작(operate)할 수 있는 것이 조작기라면, 한 상태를 다른 상태로 조작(operate)하는 것은 가능하지만, 조작자(operator)를 다른 조작자로 변환할 수는 없는 것이 전조작기의 특징인가요?([9], p.15)

위의 인용문에서 Dienes가 언급한 조작자(operator)는 함수적 의미를 가지고 있다. 즉 조작자란 하나의 상태를 다른 상태로 변환시키는 일종의 함수이며, 계열을 예로 들면 주어진 계열에 대해 다음 원소가 무엇인지 정확하게 예측할 수 있게 하는 규칙인 것이다. Dienes의 관심분야는 초등수학교육이었기 때문에 Piaget의 발달 단계 가운데 특히 전조작기(pre-operational stage)와 조작기(operational stage)의 구별에 많은 관심을 보인 것은 당연하다. 그러나 Piaget가 나이를 발달단계를 구분하는 기준으로 제시한 반면, Dienes는 과제(topic)에 따라 한 아동이 전조작기에 있을 수도 있으며, 구체적 조작기에도 있을 수 있다고 생각했다. 예를 들면 덧셈에 대해서는 매우 조작적이지만, 곱셈에 대해서는 전조작적이라는 식으로 발달단계가 연령을 기준으로 편성되는 절대적 기준이 아니라고 생각했다.

한 아동이 조작적인가 혹은 아닌가에 대한 구분을 덧셈을 예로 들면 다음과 같다([9], pp.15-16). 노란색, 파란색, 붉은색 단추 파일이 있다. 아동에게 각 파일의 개수를 알려주지 말고, 한데 합친다. 그러나 노란 파일 보다 파란 파일이 두 개가 더 많으며, 파란 파일 보다 붉은 파일이 세 개 더 많다는 것을 여러 번 알려준다. 그리고 노란 파일에 있는 단추 보다 붉은 파일에 있는 단추가 몇 개 더 많은지를 물어 본다. 그러면 전조작기 아동은 각 파일의 개수를 세어보는 방법 이외의 것을 생각하지 못한다. 반면 조작기 아동은 추론을 통해 노란 단추 보다 붉은 단추가 다섯 개 더 많다고 대답할 수 있다. 완숙한 조작기에 있는 아동들은 파란색 파일이 노란색 파일 보다 두 개 많고, 파란색 파일 보다 붉은 색 파일이 두 개 적다면, 노란색 파일의 수와 붉은 색 파일의 수가 같다는 것을 안다. 이것은 두 번째 조작자인 “두 개 더 적다”가 첫 번째 조작자인 “두 개 더 많다”의 역으로, 두 조작자의 결합이 “두 개가 같다”라는 중성적 조작자와 같아진다는 것을 의미한다. 곱셈에 대해서도 유사하게 색 파일들의 총합을 구하는 활동을 통해, 직접 세기에 의존하면 전조작기로, 추론에 의해 해결하면 구체적 조작기로 구분하였다.

결국 Dienes는 성인들조차도 새로운 영역에 입문할 때는 전조작기의 단계에 머무르는 경우가 있을 수 있음을 주장함으로써, 조작이나 발달단계에 대한 Piaget의 입장과는 상반되는 견해를 피력하고 있다. 즉 그가 생각하는 조작성(operationality)은 하나의 상황을 다른 상황으로 변화시키는데 적용되는 규칙인 조작자(operators)가 존재할 때 성취될 수 있는 것으로, 조작자를 다룰 수 있는지의 여부는 과제의 난이도와 과제에 대한 사전 경험 등에 달려있다. 따라서 준비가 안 된 전조작기의 아동에게 무리하게 조작자를 대상으로 조작하는 법을 지도하는 것은 시간낭비일 뿐이라는 것이 그의 입장이다.

라. 성급한 기호 도입에 대한 경고

Dienes가 일관되게 강조한 것 중의 하나가 수학교실에서 기호화(symbolizm)가 너무 일찍 도입된다는 것이다([13]). 학생들이 기호가 의미하는 바가 무엇인지 이해하기 전에 기호 사용을 요구하면, 학습은 암기에 빠지기 쉬우며 금방 잊혀 진다는 것이 Dienes의 생각이었다.

그가 제안한 수학학습 6단계이론은 기호화 단계와 형식화 단계 이전에 자유놀이, 규칙놀이, 비교, 표현이라는 다소 구체적이고 비형식적인 여러 단계들을 설정하고 있다. 이것은 성급한 상징 언어의 도입에 반대했던 Dienes의 입장을 잘 반영하고 있다. 그는 대부분의 수학수업이 너무 이른 시기에 상징 언어를 도입함으로써, 수학에 재능 있는 소수의 학생을 제외한 대부분의 사람들을 좌절시키고 있다고 비판하였다. 재능 있는 학생들은 교사가 자각하지도 못한 사이 여러 단계들을 통과할지도 모른다. 그러나 그렇지 못한 학생들은 교사나 교과서에서 요구하는 답을 기계적으로 반복하는 것

이외에 선택의 여지가 없다. 이렇게 획득된 지식은 적응력이 없기 때문에 비표준적 상황을 만났을 때 소용이 없다([9], p.30).

물론 오늘날에는 많은 교사들이 유의미 학습을 위해 여러 가지 노력을 기울이고 있지만, 성급한 상징 언어의 도입과 같은 문제는 여전히 남아있다. 따라서 그 이전에 놀이나 게임을 충분하게 경험하게 하고, 그로부터 도출된 공통성을 다양한 시각적 방법으로 표현하게 하는 활동은 상징 언어의 도입을 지연시킬 수 있는 효과적인 대안이 될 수 있을 것으로 생각된다([1], p.353). 결국 기호화의 지연은 수학적 활동을 강조하는 것과 동치어로서, Dienes의 주장대로 학생들은 교과서 이외의 곳에서 수학적 활동에 참여하는 경험을 풍부하게 하는 것이 무엇보다도 중요하다.

> 차후에 어떤 특정 기호 체계에 대한 이해가 되고 연습이 이루어지면 일부 개념들은 수학적 용어를 이용해서 말로 설명할 수도 있을 것이다. 그러나 설명을 할 때는 한 귀로 듣고 한 귀로 흘릴 수 있으므로 매우 주의해야 한다. 대체로 수학을 실제로 해보는 것(doing mathematics)이외의 방법은 없다. 여러분은 교과서에 의해서가 아니라 수학적 활동에 의해서 수학을 배운다. 이것은 수영, 스케이트, 스키를 배울 때와 마찬가지이다. 나는 그러한 기술을 책에서 배운다는 것을 생각할 수 없다([9], p.17).

(2) 교육과정 개발

Dienes는 캐나다 및 이탈리아의 초등수학교육과정 개발에 참여한 바 있다. 두 과제 모두 새수학 운동의 정신을 구현하기 위한 것이었지만, 특히 캐나다의 교육과정은 '고급 교육과정(advanced curriculum)'이라 불릴 정도로, 어린 학생들에게 군, 환, 체, 벡터공간, 행렬, 유한 기하, 변환기하, 미적분 등과 같은 어렵고 추상적이라 간주되었던 수학을 제공하였다. 이 교육과정은 후에 Mathématique Vivante라 불리게 되었으며, 교사들을 위한 세부적인 사용안내서와 더불어 Hurtubise(출판사)에서 출간되었다. 이 교육과정의 일부는 Dienes의 연구협력 학교였던 École Eymard에서 실험되었는데, 학생들이 수학을 매일 3시간씩 하자는 제안을 할 정도로 인기가 있었으며, 11세의 한 학생은 정삼각형의 isometries 사이의 관계를 통해 공리체계의 완비성에 대한 올바른 증명 방법을 만들어 내기도 했다고 한다([10], p.404). Dienes가 유럽으로 귀환한 이후에는 1978년부터 1986년까지 이탈리아의 출판사 Giunti-Marzocco와 계약을 맺고 초등학교 교육과정을 개발하는 작업에 참여했다. 이 작업 역시 이전에 시도해 보지 않은 많은 새로운 아이디어들이 시도되었으며, 부분적으로 통합 교육이 채택되기도 했다([10], pp.510-511).

(3) 교사 교육

Dienes는 수학교육 이론의 개발뿐만 아니라 그러한 내용을 교사들에게 지도하는데도 매우 열정적이었다. 그는 호주와 캐나다 대학에서 재직했던 기간 동안 줄곧 학교

현장을 찾아다니며 아동들을 대상으로 직접 수학 수업을 하는 수고를 마다하지 않았는데, 이것은 자신의 이론이 실제로 교실에서 어떻게 적용되는지를 보기 위한 목적뿐만 아니라 새수학의 내용이 어떤 식으로 아동에게 지도될 수 있는지를 현장교사들에게 보여주기 위함이었다. 뿐만 아니라 대학에서는 워크샵이나 정규강좌를 통해 예비교사들을 위한 교육에 힘썼다. 일례로 캐나다 체류 기간 동안 몬트리올 대학(Université de Montreal)에서 '부진아 지도' 강좌를 개설하고, 부진아들의 단점에도 불구하고 그들이 얼마나 많은 것들을 성취할 수 있는지를 보여 주었음을 회고한 바 있다([10], p.405).

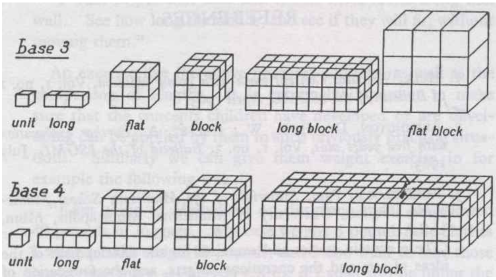
(4) 교구 및 게임 개발

디엔에스는 대학과정에서 지도되는 군, 환, 체 등의 어려운 수학 내용을 초등학생들에게 구조적으로 이해시키기 위해, 구체적인 수학적 활동을 도입하였으며 교구와 게임은 수학적 활동을 위한 건전하고 효과적인 수단이 되었다. 그러나 실제로 다진수 블록 이외에 그가 어떤 게임과 교구를 개발하였는지 거의 알려진 바가 없기 때문에, 이 절에서는 그의 발명품으로 어떤 것이 있는지 간략히 살펴보고자 한다.

가. 교구

수학 수업에서 조작 교구(manipulatives)를 사용하려는 아이디어는 대략 50년대부터 싹트기 시작하였다. 이 시기의 수학교육자들은 수학의 구조를 아동에게 쉽게 지도하기 위한 방법을 모색하였으며, 그 결과 수학 교구에 대한 관심을 가지게 되었다. 일례로 Gattegno는 교사인 Cuisenaire가 발명한 색막대의 매력에 빠져 그것을 학교 현장에 보급하고자 많은 노력을 기울였다. Dienes는 그의 자서전에서 50년대 말 영국 Leicester 대학 교수임용 면접 장소에서 Gattegno를 만났다는 점과 이 시기에 다진수 블록을 만들었다는 점을 간략하게 언급하고 있다. 이러한 점으로 미루어 보아, 그가 다진수 블록을 포함하여 수학교구를 만드는데 이들의 영향을 어느 정도 받았음을 짐작할 수 있다.

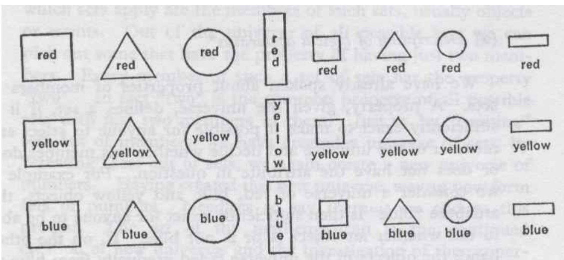
Dienes는 다진수 블록이외에도, 속성 블록과 대수자료를 개발한 것으로 알려져 있다. 특히 Dienes라는 이름은 다진수 블록(Multibase Blocks 혹은 Multibase Arithmetic Block, MAB)과 동의어로 불릴 정도로([14]), 그의 대표적인 연구 성과이다. 다진수 블록은 10진법 뿐만 아니라, 2진법, 3진법, 5진법 등 다양한 밑을 기반으로 일정한 크기로 증가하는 자리값에 대한 구체적인 표상을 제공한다. 여기서 중요한 점은 밑이 무엇이든 근간이 되는 원리는 일정하다는 사실이다. 즉 밑이 n인 경우, Unit이 n개 모이면 Long이 되며, Long이 n개 모이면 다시 Flat이 되고, Flat이 n개 모이면 Cube가 된다. 그리하여 다진수 블록에서는 밑에 상관없이 각 자리값에 해당하는 모델의 이름은 공통적으로 Unit, Long, Flat, Cube로 불린다([그림 4]).



[그림 4] 다진수 블록

다진수 블록은 기수법 체계에 대한 원리뿐만 아니라 수에 대한 연산이 어떻게 수행되는지를 탐구하게 한다. 이것을 이용하면, 사칙연산에 대한 알고리즘은 표준적 절차를 이용하던 대안적 절차[2)]를 사용하던 간에 자세하게 설명되어질 수 있다. 학생들은 자신만의 알고리즘을 개발할 수 있으며, 그들이 무엇을 하는지를 이해할 수 있게 된다.

속성 블록(attribute block)은 논리 블록(Logic Blocks)이라 불렀던 것으로 1974년도에 발행된 Dienes의 저서 「Learning Logic and Logical Games」에 소개되어 있다. 논리 블록은 모양, 색, 크기, 두께 등 4개의 속성을 지닌 나무 블록 세트이다. 예를 들어 붉은 조각, 붉지 않은 조각, 원 모양 조각, 붉거나 원인 조각 등으로 구분할 수 있다([그림 5]) .



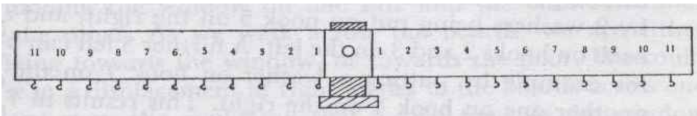
[그림 5] 속성블록

여기서 중요한 것은 조각들 사이의 관계를 규정할 수 있는 능력이다. 예를 들면 같은 모양의 블록으로 하나의 속성이 다른 것, 두 개의 속성이 다른 블록을 찾는 것이다. 두 개의 조각은 "어떤 점이 같은가?", 혹은 "어떤 점이 다른가?" 등의 질문에 의

2) 표준 절차란 학교에서 지도되고 있는 알고리즘을 뜻하는 것으로, 세로로 하는 사칙연산이 한 예이다. 그리고 표준 절차 이외의 방법을 대안 절차라 한다. 예를 들면 98+13을 세로열로 자리를 맞추어 쓴 후 각 자리의 합을 적는 방식이 표준 절차라면, 98을 100으로 보고 합을 한 후 2를 빼는 방식이 대안 절차에 해당된다.

해 비교될 수 있다. 또한 학생들은 “이 집합에 속한 조각이 정사각형이 아니라면 그것은 파란색이 틀림없다.” 와 같이 잘 정의된 방식으로 논리적인 결론을 탐구할 수 있다([13]).

Dienes는 1963년도에 출판된 「An Experimental Study of Mathematics-Learning」에서 다진수 블록(MAB)과 대수적 경험 자료(Algebraic Experience Material, AEM)을 소개하고 있다([16]). 이 책은 하버드 대학 인지과학연구소에서 Bruner와 공동연구 하던 시기 Dienes에 의해 수행된 프로젝트의 결과 보고서에 해당된다. 그러나 아쉽게도 이 책을 입수하지 못했기에 AEM의 실체를 확인할 수는 없었으나, Dienes([5])가 다음과 같은 양팔 저울([그림 6])을 정수의 연산 및 2차방정식의 풀이에 사용했다는 점으로 미루어 볼 때, 이것이 대수적 경험 자료이거나 혹은 그 일부일 것이라 추측할 수 있다.



[그림 6] 양팔저울

나. 게임

Dienes는 아동의 수학지도를 위해 놀이나 게임을 도입할 것을 주장하였으나, 그가 생각하는 게임의 의미는 일반적인 게임과 다소 거리가 있다. 일반적인 게임에서는 어떤 기준을 정하고, 그것에 도달하는 사람이 이기거나 지게 되면서 게임이 종료된다. 그러나 Dienes가 제작한 대부분의 게임은 승자도 패자도 없다([10], [11], [12]). 대신 그의 게임에 참여하는 사람들은 교사나 게임 운영자가 제기하는 몇 개의 질문에 답해야 한다. 또한 하나의 게임에서 끝나는 것이 아니라 유사한 몇 개의 게임을 연이어 수행한 후, 게임 들 간의 공통점을 찾는 활동을 하게 되고, 이를 통해 수학적 구조들 간의 ‘동형(isomorphism)’을 간접적으로 경험하게 된다[3]. 결국 Dienes는 수학은 단지 구조 그 자체일 뿐만 아니라 구조와 구조 간의 동형, 준동형, 그리고 더욱 일반적 대응(mappings)이라는 점을 인식하고 있었던 것이다. 구조와 구조 사이의 관계에 대한 관심은 Dienes를 당시 구조에 관심을 가졌던 다른 많은 학자들과 구분하게 만드는 주요한 특징이다. 이에 대해 Sriraman과 Lesh([14])는 ’Piaget는 하지 못했으나, 디엔에스가 해냈다‘라고까지 평하고 있다(p.73).

예를 들어 Dienes가 1966년 캐나다 Sherbrooke 대학 초청 강연에서 선보인 두 개의 비동형 게임을 살펴보자. 이것은 초등학교 4학년생들을 염두에 두고 제작되었으나 실제 강연에서는 2학년 학생들을 대상으로 수행되었다고 한다. 그 강연에서 수행된 활

3) Dienes의 수학학습6단계에서 비교단계인 3단계가 isomorphism을 최초로 경험하는 시점이 된다.

동을 분석해 보면, 두 개의 게임을 연달아 수행하게 하고(규칙놀이), 한 게임에서 발생하는 법칙이 다음 게임의 법칙과 대응되는 것이 있는지 찾아보게 함으로써 동형에 대한 아이디어를 이끌어 내도록 하고 있다. 다음은 그 강연에서 소개된 게임의 내용과 학생들의 반응을 정리한 것이다([10], pp.358-361).

학생들이 짝을 지어 마주보고 손을 잡은 뒤, 시계방향 1/4회전(X), 반시계방향 1/4회전(Y), 1/2회전(D), 1회전(C)을 하게 되면 다음과 같이 네 가지 위치가 나온다.

AB	A B	BA	B A

먼저 학생들로 하여금 네 가지 변환의 합성에 대해 수행해 보게 하고, 그 결과를 칠판 위에 표로 정리하게 했다. 예를 들면 X를 수행한 후, D를 수행하면 Y가 된다. 학생들은 한 쌍이 한 번 이동해서 얻은 결과를 어떻게 하면 다른 쌍이 두 번 이동해서 같은 결과를 얻을지를 쉽게 말할 수 있었다(게임 1).

다음은 두 사람의 위치 관계에 의해 생성되는 네 가지 변환으로 구성된 군을 생각해 볼 수 있다. 먼저 학생들이 '팔아래(under the arms)'라고 부른 변환(S)은 두 사람이 마주보고 손을 잡은 상태에서 각각 1/2회전하면, 팔이 꼬인 상태에서 등을 맞대고 서게 되며, 그 상태에서 다시 1/2회전하면 꼬였던 팔이 풀리면서 얼굴을 마주 보고 서게 된다. 나머지는 두 사람이 마주보고 손을 잡은 채 1회전(C), 1/2회전(D)하는 것과 S와 D를 합성한 변환(T)을 생각해 볼 수 있다. 그러면 두 사람의 위치는 다음과 같이 네 가지가 된다(상자안의 ':'는 학생들의 팔이 놓인 방향을 의미한다).

:AB:	:BA:	A::B	B::A

이 게임을 제시하자마자, 한 학생이 D, S, T 중 어느 두 개를 합성하면 다른 하나가 된다는 것을 발견하고 소리쳤으며, 나머지 학생들은 이것을 직접 실험해 보고 싶어 했다. 그래서 이전 게임의 합성 규칙을 정리한 표 옆에 이번 게임의 합성 규칙을 표로 정리하게 했다(게임 2).

끝으로 처음 게임에서 만족하는 'D 다음에 X를 시행하면 Y를 시행한 것과 같다.'와 같은 문장을 두 번째 게임에서 만족하는 문장으로 변환시킬 수 있는지를 물어 보았다. 학생들은 이에 대해 한참 동안 시도를 했으나 변형된 형태가 오류로 입증되는 문장이 항상 있는 것처럼 보였다. 그 순간 이전에 발표했던 그 학생이 일어나 첫 번째 게임에서는 두 개의 다른 변환이 1회전과 같게 되는 것(즉 X・Y=C)이 존재하나, 두 번째 게임에서는 그러한 서로 다른 변환이 존재하지 않기 때문에 Dienes가 제시한 활동을 하는 것은 시간낭비일 뿐임을 명확히 이야기 했다. 이것으로 이 수업을 참관했던 사람들을 박수를 치고, 크게 기뻐하면서 강연이 마무리 되었다.

위의 강연의 흐름을 살펴보면, 수학학습 6단계 가운데 규칙놀이인 2단계와 비교를 하는 3단계에 해당하는 활동들로 구성되어 있음을 알 수 있다. Dienes가 고안한 대부분의 보기들은 동형인 게임들로 구성되어 있지만, 이 강연의 보기들을 통해 비동형인

게임들을 통해서도 수학적 구조간의 동형성을 파악할 수 있음을 알 수 있다.

4. 마치며

지금까지 살펴본 Dienes의 연구 업적은 실로 방대하고 다양하다. 그럼에도 불구하고 50여 년 간 끊임없이 진행되어온 그의 연구 메시지는 매우 일관되어 있다. 그는 세계적으로 새수학 운동이 싹틀 무렵 수학교육 분야에 관심을 가지기 시작하였으며, 사람들이 그것에 더 이상 관심을 기울이지 않게 된 이후에도 변함없이 새수학의 기본 정신을 구현하기 위한 연구 활동에 전념하여 왔다. Dienes는 Piaget와 마찬가지로 수학을 구조에 대한 학문이라고 생각했으며, Bruner와 마찬가지로 구조가 잘 드러나는 방식으로 지도하면 어린 학생들도 고급수학의 내용을 학습할 수 있다고 믿었다. 그리하여 실제로 군, 체, 환, 변환기하, 미적분 등의 수준 높은 아이디어가 내포된 놀이와 게임을 개발하고, 그것을 초등학생들에게 직접 가르치는 실천적 노력을 평생 게을리하지 않았다. 그가 새수학 운동의 변함없는 지지자라는 사실은 그가 노년기에 관여했던 이탈리아 초등수학 교육과정 개발 프로젝트 및 2000년 이후 국제저널에 실린 연구의 내용들이 입증해 준다. 오늘날 미국의 수학교육 연구계가 다시금 그의 연구 성과에 주목하게 된 것도 새수학 운동의 기본 정신에 대한 노장의 확고한 믿음과 끈질긴 연구 노력 덕분일지 모른다.

어떻게 하면 수학을 잘 가르칠 것인가에 대한 문제 의식은 그가 수학으로 박사학위를 받고, 중등학교를 거쳐 대학에서 수학을 가르치면서 싹이 트기 시작했다. 그러나 이 문제에 대한 해법을 찾는 과정에서 그의 성장배경은 지대한 영향을 미친 듯하다. 그는 유년시절 유럽의 여러 나라를 옮겨 다니며 성장하였는데, 이로 인해 여러 나라의 언어를 자연스럽게 습득할 수 있었다. 뿐만 아니라 유년시절에는 무용교사였던 어머니와 생활하면서 음악과 무용에 대한 소양을 익혔으며, 청소년기에는 수학교수였던 아버지와 생활하면서 수학자로서 입문할 수 있었다. 이처럼 복잡하고 다양한 성장 환경은 수학교육자로서의 Dienes의 삶에 잘 반영되어 있다. 그가 추상화를 성취하기 위한 수단으로 '다양성'을 강조하였던 점이나 그 다양성을 타교과로 확장하기 위해 제안했던 통합교육의 보기가 음악, 무용, 언어 등과 관련되어 있는 것을 과연 우연이라 할 수 있겠는가? 이러한 관점에서 보면 그의 수학교육 이론은 자신의 삶을 정제된 언어로 다듬어 놓은 Dienes 개인의 역사인 것이다.

이 연구에서는 국내에서 미처 소개되지 않은 내용을 중심으로 Dienes의 생애와 그의 수학교육 연구 업적을 정리하고자 하였다. 그러나 반세기에 걸친 그의 연구 성과를 한 편의 논문에 모두 옮긴다는 것은 역부족임을 느끼며, 이 연구를 시발점으로 하여, 그가 개발한 놀이나 게임, 교구 등에 대한 후속 연구가 나오길 기대한다. 이 글에서 소개된 바와 같이 음악과 율동이 결합된 수학교육은 초등학교 교실에서 환영받을

수 있는 여지가 있으며, 군이나 체 등 고급 수학과 관련된 활동은 영재교육 및 고등 교육에서도 활용가치가 충분하다고 생각된다.

참 고 문 헌

1. 김수미, Zoltan Dienes의 수학학습 6단계 이론의 재음미, 대한수학교육학회지 <학교수학> 10권 3호 (2008) 339-355.
2. Dienes, Z. P., Concept formation and personality. Leicester, 1959.
3. Dienes, Z. P., Building up Mathematics. London: Hutchinson Educational, 1960.
4. Dienes, Z. P., An Experimental Study of Mathematics-Learning. London: Hutchinson Educational, 1963.
5. Dienes, Z. P., Mathematics in the Primary School. Toronto: Macmillan and Co., 1964.
6. Dienes, Z. P., Mathematics through the senses, games, dance and art. Windsor, England: NFER Pub Co. [distributed in USA by Fernhil House, NewYork: Humanities Press], 1973.
7. Dienes, Z. P. Learning Logic and Logical Games, 1974.
8. Dienes, Z. P., Lessons involving music, language and mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 6 (1987) 171-181.
9. Dienes, Z. P., Some thoughts on the dynamics of learning mathematics(unpublished), 1995, In Montana Council of Teachers of Mathematics(2007), The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph 2(2007 Sep).
10. Dienes, Z. P., Memoirs of a Maverick Mathematician. Atlanda, London, Sydney: Minerva Press, 1999.
11. Dienes, Z. P., The theory of the six stages of learning with integers, Mathematics in Schools, Vol 29, No 2, March (2000) 27-32.
12. Dienes, Z. P., Six stages with Rational numbers, Mathematics in Schools, Vol 30, No 1, Jan (2001) 41-45.
13. Hirstein, J., The impact of Zoltan Dienes on Mathematics Teaching in the United States, *The Montana Mathematics Enthusiast*, ISSN 1551-3440, Monograph2, (2007) 169-172, Montana Council of Teachers of Mathematics.
14. Sriraman B., Editorial : The Legacy of Zoltan Paul Dienes, The Montana Mathematics Enthusiast, ISSN 1551-3440, Monograph 2, .i-ii. 2007.
15. Sriraman, B., & Lesh, R., Leaders in mathematical thinking and learning:A

Conversation with Zoltan P. Dienes. Mathematical thinking and learning 9(1), (2007) 59-75. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
16. Storer, W. O., The Mathematical Gazette, Vol.50, No. 372. (May, 1966), 194-197.

The life and scholastic career of a New Math campaigner, Zoltan P. Dienes

Department of mathematics education, Gyeongin National University of Education,
Soo Mi Kim

Zoltan, P. Dienes is a famous researcher and practitioner who has tried to teach mathematical structures to children for about 50 years. Even though his ideas of teaching mathematics and materials including MAB have been well known in Korea, they are only a part of his achievement he has developed for his whole life. So this article is designed for taking an overview of his whole life and achievement and getting some implications for today's mathematics education. In this article, his life story could be divided by five periods in terms of a scholastic career and his research achievement could be reorganized with respect to five theses: psychology of learning mathematics, mathematical curriculum, teacher education, games and material for mathematical learning. As a result, it is found that there is a deep connection between his personal life and his scholastic career.

Key Words : Dienes, New Math, psychology of learning mathematics, games, materials

2000 Mathematics Subject Classification: 97-03

ZDM Subject Classification: A32

접수일 : 2009년 5월 28일 수정일 : 2009년 8월 18일 게재확정일 : 2009년 8월 20일