韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2009. 11. 제 12권, 제 2호, 81-97

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Nov. 2009, Vol. 12, No. 2, 81-97

수학 문제 해결과정에서 초등학교 6학년 학생들의 시각적 표현에 관한 연구

황 현 미 (서울용답초등학교)
방 정 숙 (한국교원대학교)

수학 문제를 해결하는 과정에서 시각적 표현을 적절히 활용하면 문제의 의미를 보다 확실히 이해할 수 있고 궁극적으로 문제를 해결할 가능성을 높인다. 본 연구는 6학년 학생들을 대상으로 수학 문제를 해결할 때 시각적 표현을 얼마나 사용하는지, 어떤 유형을 어떻게 활용하는지, 그리고 이런 시각적 표현의 사용 및 유형과 문제해결과의 관계는 어떠한지 분석하였다. 연구 결과, 많은 학생들이 시각적 표현보다는 수식을 사용하는 경우가 많았던 반면에, 시각적 표현을 사용한 경우가 그렇지 않은 경우보다 성공률이 높게 나타났다. 시각적 표현 중에서도 도식 표현을 사용한 학생들이 성공적인 문제 해결에 도달할 수 있었다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 본 논문은 수학 문제 해결에서의 시각적 표현의 중요성과 그에 대한 지도 방향에 시사점을 제공한다.

Ⅰ. 서 론

1980년대 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 한다는 미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM])의 권고 이후, 문제 해결은 모든 수학 학습의 통합적인 부분으로서 수학 교육의 기본적인 목표 중의 하나로 인식되고 있다. 우리나라에서도 문제해결은 제4차 수학과 교육과정 이래로 수학 교육의 목표로 강조해 온 사항이며, 개정 교육과정에서도 지속적으로 강조하고 있다(교육과학기술부, 2007).

이러한 문제해결의 중요성이 꾸준히 제기되면서, 많은 연구자들은 문제 해결에서 시각화 및 시각적 표현의 중요성에 대해 언급하고 있다(Arcavi, 2003; Elia, Gagatsis, & Demetriou, 2007; Elia & Philippou, 2004; Fan & Zhu, 2007; Nunokawa, 2006; Stylianou, 2001; Stylianou, 2002; Stylianou & Silver, 2004; van Garderen, 2006; van Garderen & Montague, 2003). 문제 해결에서 가장 중요한 첫 단계는 문제를 이해하는 것으로, 성공적인 문제 해결자는 문제에 대한 이해를 촉진하기 위해 문제를 표현하려고 한다. 시각화는 바로 강력한 문제 표현 과정인 것이다. 즉, 문제 해결에서 시각화란 내적 이미지 또는 외적 이미지를 형성하는 것과 이러한 이미지를 수학적인 발견과 이해를 위해 효과적으로 사용하는 것을 의미한다(Zimmerman & Cunningham, 1991). Polya(1957)는 기하와 관련된 문제뿐만 아니라 모든 영역의 문제에서 시각화가 중요한 도움이 된다고 하였다. 시각화를 통한 시각적 표현의 사용은 문제의 의미를 확실하게 하고, 문제를 해결하기 위한 접근을 가능하게 하며, 학생의 인지적 구성에 영향을 주어 성공적인 문제 해결로 이끌 수 있기 때문이다(van Garderen, 2006).

그러나 몇몇 선행연구들은 시각화와 문제 해결 간에 별로 관계가 없다는 주장을 하기도 하였다(예, Campbell, Collis, & Watson, 1995). 이러한 모순된 결과는 연구자에 따라 시각적 이미지에 대한 정의가 다르기 때문이다. 즉, 시각적 이미지를 시각적 · 공간적 정보를 나타내는 도식으로 정의하느냐 단순한 그림으로 정의하느냐에 따라 다른 결과가 나타난다는 것이다. 전자는 시각화의 사용에 대한 문제 해결자의 선호도에 초점을 맞추는 반면, 후자는 이미지의 생생함에 초점을 맞추기 때문에 문제 해결의 성공적인 수행과는 별로 관계가 없다는 결과를 얻을 수 있다(van Garderen & Montague, 2003). 이러한 연구 결과들은 시각화의 사용에 있어 학생들이 나타내는 이미지의 유형이 문제

* 접수일(2009년 9월 3일), 게재확정일(2009년 10월 22일)
* ZDM분류 : C33
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 시각적 표현, 문제해결, 그림표현, 도식표현

해결에 매우 중요한 영향을 미치며, 문제에 포함된 수학적 관계를 이미지로 구성하는 능력이 강조되어야 함을 나타낸다.

한편 문제 해결에서 학생들의 시각적 표현의 사용에 관한 선행연구들을 살펴보면, 10여 년 전에는 상위 학생들은 시각적 표현의 사용을 꺼려하며 가능하다면 상징적 기호를 선택한다고 나타난다(예, Eisenberg & Dreyfus, 1991; Vinner, 1989). 이는 시험에서 높은 점수를 얻기 위해 대수적 기술과 공식을 암기하는 것을 선호하던 당시의 수학학습 상황을 반영한 것이다. 따라서 시대가 달라지고 교육과정의 경향이 달라지면서, 좀 더 최근의 연구에서는 학생들은 문제 해결에서 시각적 표현의 사용에 흥미를 보이며 학생들뿐만 아니라 전문 수학자들도 시각적 표현의 사용을 선호한다고 제안한다(George, 1999; Stylianou & Silver, 2004). 그러나 여전히 문제 해결에서의 시각적 가치에 대한 인정에도 불구하고, 많은 학생들이 '그림 그리기'를 꺼려하며(Diezmann, 2002), 초등학교 학생들은 효과적인 시각적 표현을 구성하는 데에 종종 어려움을 겪는다는 지적이 일고 있다(Diezmann & English, 2001).

이와 같은 상황에서, 우리나라 학생들이 수학 문장제를 해결할 때 시각적 표현의 사용에 대한 중요성을 인식하고 있는지, 학생들의 시각적 표현이 문제 해결에 긍정적인 영향을 주고 있는지를 조사하는 것은 의미있는 일일 것이다. 따라서 본 연구의 목적은 문장제 해결에서 시각적 표현의 이용에 대한 학생들의 선호도와 학생들이 구성한 시각적 표현의 특징을 분석하여 문제 해결에 관한 교수·학습 방향에 시사점을 제공하는 데 있다. 이를 위해 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다. 첫째, 수학 문장제 해결에서 학생들의 시각적 표현의 사용 빈도는 어떠한가? 둘째, 학생들이 사용한 시각적 표현의 유형은 어떻게 나타나는가? 셋째, 문제 해결과 시각적 표현 사이의 관계는 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 시각화와 시각적 표현

'시각화'의 사전적 의미는 '눈에 보이지 않는 것을 일정한 형태로 만들어 보여주는 것'이다(국립국어원, 1999). 다시 말해서 시각화는 전달하고자 하는 내용을 우리 눈으로 인식할 수 있는 모든 방법, 예컨대 문자, 도형, 그림, 모형, 영상 등을 이용하여 나타내는 것이라고 할 수 있다. 특히 수학에서의 시각화와 관련하여 Zimmerman과 Cunningham(1991)은 손으로 직접 그리거나 컴퓨터를 이용하여 수학적 개념·원리·문제 등을 기하학적으로 또는 그래프로 표현하는 것, 그리고 그렇게 표현된 것을 이용하는 것이라고 정의하였으며, Aracavi(2003)는 이미 알고 있는 개념에 대해 사고하거나 개념을 발달시키기 위해 그리고 이해를 확장시키기 위해 그림, 이미지, 벤다이어그램을 해석하고 이용하는 능력, 또는 이들을 창조하는 과정이나 창조의 결과라고 하였다. 이를 문제 해결에 초점을 맞추어 설명하면, 문제 상황에 대한 내적 이미지 또는 외적 이미지를 형성하는 것과 이러한 이미지를 수학적인 발견과 이해를 위해 효과적으로 사용하는 것을 의미한다고 할 수 있다(Zimmerman & Cunningham, 1991). 이와 같이 시각화의 의미에는 시각적 표현을 구성하는 활동 과정과 그 결과로서의 시각적 표현이 모두 포함될 수 있으나, 본 연구에서는 활동 과정으로서의 시각화와 그림, 이미지, 다이어그램과 같은 결과로서의 시각적 표현을 구분하여 사용하도록 한다.

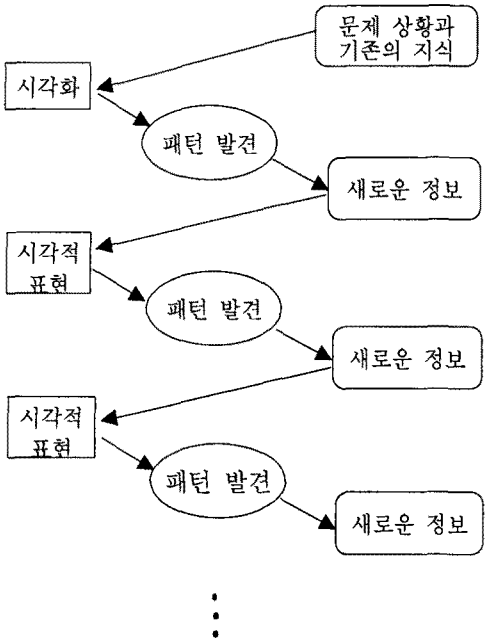
많은 연구자들은 시각적 표현의 유형을 분류하려고 시도하였다. 일찍이 Presmeg(1986)는 시각적 이미지를 5가지로 분류하였는데, 구체적 이미지(concrete imagery), 순수한 관계를 보여주는 패턴 이미지(pattern imagery), 움직임이 포함된 운동 이미지(kinesthetic imagery), 기하학적 도형의 역동적인 변환이 포함된 역동적 이미지(dynamic imagery), 문제 해결자가 수학 공식을 시각적으로 회상하도록 하는 공식의 기억 이미지(memory imagery)가 그것이다. Presmeg는 모든 유형의 이미지가 문제 해결에 중요한 역할을 수행하지만 패턴 이미지가 문제 해결에서 가장 기본적이라고 보았다. 왜냐하면 그것은 문제 내의 관계를 나타내며 추상화와 일반화를 하기에 더 적합하기 때문이다. 또한 구체적 이미지는 가장 덜 효과적인 유형이라고 보았는데, 그것은 비생산적이며 조작하기도 어렵기 때문이다. Presmeg의 연구 결과는 수학에 관한 관계적 이해를 잘 갖춘 학생은 종종 패턴 이미지와 역동적 이미지를 사용하며, 반면 이해가 부족한 학생은 비효과적인 해법으로 이끄는 구체적 이미지 또는 암기 이미지를 사용한다고 제안한다.

또한 Hegarty와 Kozhevnikov(1999)는 6학년 남학생들의 시각적 표현을 그림 이미지(pictorial image)와 도식 이미지(schematic image)로 분류하였다. 그림 이미지는 대상의 시각적 외관 또는 문제에 제시된 대상을 나타내는 것이며, 도식 이미지는 문제의 부분들 사이의 공간적 관계를 나타내는 것이다. 이와 비슷한 분류로 Kozhevnikov, Hegarty, Mayer(2002)는 시각적 이미지(visual imagery)와 공간적 이미지(spatial imagery)라는 용어를 사용하였다. 시각적 이미지는 대상의 시각적 외관(모양, 색깔, 밝기)을 표현하는 것이며, 공간적 이미지는 대상의 부분과 공간에서의 대상의 위치 또는 움직임 사이의 공간적 관계를 표현하는 것이다. 이러한 분류를 사용하여 문제 해결에서의 학생들의 시각적 표현을 분석한 연구자들은 도식적 이미지는 문제 해결에서의 성공과 긍정적인 관계가 있는 반면, 그림 이미지는 부정적인 관계가 있다는 것을 발견하였다(van Garderen & Montague, 2003). 본 연구에서도 Hegarty와 Kozhevnikov(1999)의 분류 및 용어를 사용하여 시각적 표현을 그림 표현과 도식 표현으로 구분하여 학생들의 시각적 표현을 분석하는 데에 사용하도록 한다.

2. 문제해결에서 시각적 표현의 역할

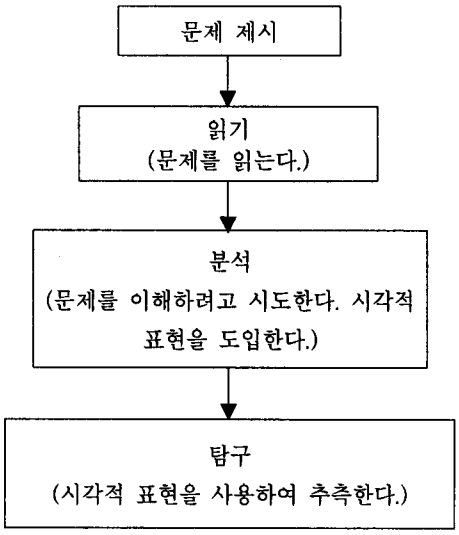
앞에서 언급했듯이, 시각화는 문제 해결의 가장 중요한 첫 번째 단계로 문제의 의미를 이해하여 해결 방법에 접근할 수 있게 해 주는 유용한 도구이다. Diezmann(2002)은 시각적 표현이 문제 해결에 유용한 이유로 다음 세 가지를 제시하고 있다. 첫째, 시각적 표현은 학생들이 각각의 정보를 표현하고 연결할 수 있도록 사고를 위한 외부의 스케치북을 제공한다. 둘째, 정보의 재조직화를 촉진함으로써 내포되어 있던 문제의 정보가 시각적 표현을 통해 명확해질 수 있다. 마지막으로 시각적 표현은 학생들이 문제의 구조를 개념화하여 해법의 기초를 형성하도록 도와준다.

시각화를 통한 시각적 표현이 문제 해결 과정에서 구체적으로 어떠한 역할을 하는지에 대한 여러 연구들이 있어 왔다. 먼저 시각적 표현을 사용함으로써 새로운 정보를 얻게 된다는 견해를 살펴보도록 한다. 학생이 문제를 읽고 주어진 상황에 대해 이해한 것을 시각적 표현으로 나타냄으로써 일단 문제 요소들의 결합 또는 구성이 나타나게 된다(우정호, 2002; Nunokawa, 2006). 즉, 시각적 표현은 문제의 모든 요소를 함께 모아 나타낼 뿐만 아니라 각 요소들 사이의 특정한 결합 또는 배열을 만들고, 필요한 요소를 찾기 위해 많은 시간을 소비하는 것을 피하게 할 뿐만 아니라 기대하지 않던 패턴을 발견하게 한다. 이러한 결합은 시각적 표현의 중요한 공헌으로 볼 수 있는데 자신이 알고 있던 것과 알지 못했던 것을 연결해 줌으로써 학생의 사고의 창의적인 측면을 도와줄 수 있기 때문이다. 또한 이러한 결합은 학생의 직관을 넘어서 문제 상황에 대한 새로운 정보를 얻을 수 있게 해 준다. 비록 학생이 적절한 패턴을 발견할 수 있다 하더라도 이러한 정보가 문제의 해법을 직접적으로 내포하고 있지 않을 수도 있다. 그러나 이것은 학생들의 이해를 더 깊게 해 줄 수 있는 새로운 정보이다. 따라서 시각적 표현의 사용은 순환적이라고 할 수 있다. 문제 상황에 대한 학생들의 이해를 깊게 하는 새로운 정보를 발견해 가다보면 쉽게 문제 해법에 다다를 수 있을 것이다. 이와 같은 과정을 Nunokawa (2006)는 <그림 1>과 같이 요약하고 있다.



<그림 1> 문제 해결 과정에서 시각적 표현 사용의 순환적 특성

다음으로 시각적 표현이 탐구를 위한 도구가 된다는 견해를 살펴보도록 한다. Stylianou와 Silver(2004)는 전문 수학자와 대학생을 대상으로 문제 해결에서의 시각적 표현을 분석함으로써, 성공적인 문제 해결에서 시각적 표현은 탐구 도구로서의 기능을 하고 있음을 발견하였다. 즉 전문수학자들은 시각적 표현을 구성한 후 이를 사용하여 문제 공간을 탐구하는 과정을 나타냈다. 다시 말해, 문제를 이해하기 위해 분석 단계에서 시각적 표현을 도입한 이후, 시각적 표현이 중요한 역할을 하게 되는 탐구 단계가 일관되게 따라오는 것이다. 전문가들은 그림의 각 요소의 역할에 대해 계속적으로 질문하면서 문제에 내포된 패턴을 확인할 때까지 점진적으로 각 요소를 검토해 나간다. 이와 같은 과정을 요약하면 <그림 2>와 같다.



<그림 2> 탐구 도구로서의 시각적 표현

한편, 이와 같은 시각적 표현을 문제 해결에서의 기능에 따라 분류할 수 있다. 먼저 Carney와 Levin(2002)은 제시된 그림의 사용과 자신의 그림 구성 측면에서, 그림의 기능을 장식적인 그림(decorative pictures), 표현적 그림(representational pictures), 조직적 그림(organizational pictures), 해석적 그림(interpretational pictures), 변형적 그림(transformational pictures)의 5가지로 제시하였다. 장식적 그림은 문제의 내용과 거의 관련이 없거나 아예 관련이 없이 단순히 여백을 장식하는 기능을 한다. 표현적 그림은 문제 내용의 일부분 또는 전체를 묘사한다. 조직적 그림은 문제 내용에 대한 유용한 구조적 틀을 제공한다. 해석적 그림은 어려운 맥락을 명확히 하는 것을 도와준다. 마지막으로 변형적 그림은 정보의 회상을 향상시키도록 기억을 돕는 요소를 포함한다.

Elia와 Philippou(2004)는 위의 5가지 분류를 조금 변형하여 장식적인 그림, 표현적 그림, 조직적 그림, 정보적 그림(informational pictures)으로 분류하고 이를 사용하여 학생들의 시각적 표현의 역할에 대해 분석하였다. 장식적인 그림은 말 그대로 문제의 해법에 관한 어떠한 정보도 제공하지 못할 뿐만 아니라 오히려 그림의 각 요소들의 배열이 문제 해결을 어렵게 만들기까지 한다. 표현적 그림은 문제의 전체적인 내용 또는 부분적인 내용을 표현하는 것으로, 문제에 대한 이해와 해법에 기본이 되는 공간적 관계에 기여한다. 학생들은 문제에 내포된 공간적 배열을 시각화함으로써 시각화하기 전의 초기 직관에 의한 생각과 내적 갈등을 일으키며 올바른 해법으로 접근할 수 있다. 다음으로 조직적 그림은 문제 해결 절차를 위한 방향을 제시한다. 시각적 표현을 통한 내적 갈등을 경험한 학생은 문제의 요소들을 재조직함으로써 적절한 해결 방안을 선택하게 된다. 마지막으로 정보적 그림은 문제 해결의 기초가 되는 정보를 제공하는 그림으로 이는 제시된 시각적 표현을 이용하는 경우에만 해당된다. 따라서 정보적 그림은 문제를 해결하기 위해 필요한 모든 자료로 구성되기 때문에 문제 해결의 가장 기본적인 역할을 한다고 볼 수 있다. 그러나 이러한 그림의 이용이 단순히 문제의 정보 제공에만 있는 것이 아니라 학생들이 제기한 답과 정답 사이의 갈등을 형성하도록 도와줄 수 있다. 이와 같은 4가지 시각적 표현의 역할에 대한 고려를 통해, 표현적 그림, 정보적 그림, 조직적 그림이 문제 해결에서 중요한 효과를 나타냄을 알 수 있다. 즉, 시각적 표현을 사용함으로써 학생들은 내적 갈등을 일으키며 이것이 문제에 대한 올바른 해법을 찾아가도록 도와주는 것이다.

이와 같이 다양한 관점으로 문제해결에서의 시각적 표현의 역할을 살펴본 결과, 시각적 표현의 사용이 직접적인 문제 해결로 이어지기도 하지만 대부분 시각적 표현을 통한 분석적 사고 과정이 수반되어야 한다는 것을 알 수 있다. 따라서 학생들이 시각적 표현을 구

성했다 하더라도 그것이 자동적으로 성공적인 문제 해결로 이어지는 것이 아니므로 시각적 표현을 사용한 문제 해결 과정에 관심을 기울일 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구에서는 초등수학교육을 통해 다양한 문제 해결 경험을 가지고 있어 문제 해결 과정에서의 시각적 표현의 선호도와 그 특징을 분석할 수 있는 6학년을 연구 대상으로 선정하였다. 이를 위해 서울시 중랑구, 성동구, 강동구에 소재한 초등학교 중 4개교를 선정하여 6학년 학생 194명을 연구 대상으로 하였다. 연구 대상으로 선정된 학교는 학생들의 학력 수준과 사회경제적 수준이 중간 정도에 속하는 곳이다. 분석 과정에서 전혀 문제를 풀지 않았거나 한 문제 정도를 푼 학생 9명은 제외하고 총 185명의 학생을 분석 대상으로 하였다.

2. 연구 방법 및 검사 도구

본 연구를 수행하기 위해서 검사 도구를 통한 조사 연구 방법을 적용하였다. 검사 도구는 초등학교 5, 6학년 수학교과서 및 익힘책과 김유정(2004)의 논문에서 제시된 문제 유형을 참고·수정하여 <그림 3>과 같이 총 5문제로 구성하였다. 특히, 문제 해결 과정에서 시각적 표현에 대한 학생들의 선호도와 그 특징을 파악할 수 있도록 시각적 표현을 사용하여 직접적으로 해결할 수 있거나 시각적 표현을 이용하여 식을 세움으로써 보다 쉽게 해결할 수 있는 문제를 선정하였다.

3. 검사 실시 및 자료 분석

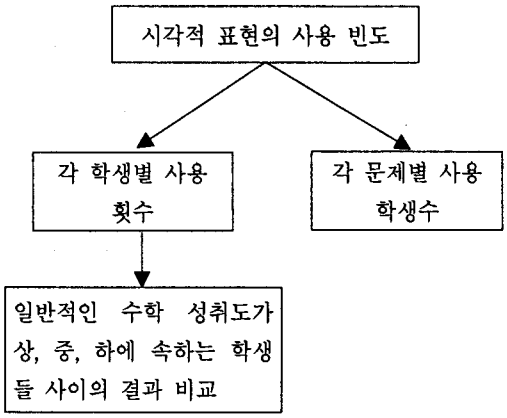
6학년 학생들을 대상으로 문제 해결 검사지에 대한 제반 정보(검사 시간, 검사 문항의 진술 형태와 난이도, 검사 문항 수와 구성, 검사 실시 상의 유의점 등)를 얻기 위해 다른 학급을 대상으로 먼저 예비 검사를 실시하였다. 예비 검사를 통해 문제점을 수정한 후, 연구 대상 학생들에게 본 검사를 실시하였다. 검사는 담임교사가 직접 실시하였으며 검사 시간은 40분을 배당하였다. 검사를 실시하기 전 학생들에게 각각의 문제에 대한 자신의 풀이 과정을 최대한 자세히 기록

번 호	문 제	참 고
1	신지는 쇼핑을 하러 백화점에 갔다. 청바지를 사고 엘리베이터를 탄 후 다섯 층을 올라가서 운동화를 샀다. 다시 여섯 층을 내려와 화장품을 산 후 네 층 올라가 엄마 생일 선물을 샀다. 그리고 세 층 내려왔더니 2층이었다. 신지는 몇 층에서 청바지를 샀을까?	김유정(2004)
2	소희는 가지고 있던 리본의 $\frac{3}{5}$을 언니에게 주었고, 나머지 리본의 $\frac{3}{4}$을 동생에게 주었다. 지금 소희가 가지고 있는 리본의 길이가 1m라면, 처음에 소희는 몇 m의 리본을 가지고 있었겠는가?	수학익힘책 6-가 김유정(2004)
3	300cm의 철사가 있다. 이 철사를 네 도막으로 나누려고 한다. 철사 두 도막의 길이는 같고, 한 도막은 이것들보다 24cm 길고 한 도막은 16cm 짧다. 각각의 도막은 몇 cm인가?	수학 5-나
4	진수는 선희보다 10cm 크고, 성진이는 진수보다 6cm 작으며, 호영이는 성진이보다 5cm 작다. 네 사람 중 키가 가장 큰 사람과 가장 작은 사람의 키의 차이는 얼마인가?	김유정(2004)
5	직사각형 모양의 화단의 둘레의 길이는 70m이다. 화단의 가로의 길이가 세로의 길이의 4배라면 가로의 길이는 몇 m인가?	수학익힘책 5-나 수학익힘책 6-가

<그림 3> 문제 해결을 위한 검사 도구

하도록 안내하였으며, 한 가지 방법으로 문제를 해결한 후에 다른 방법으로 문제를 해결해 볼 수 있도록 공간을 따로 제시하였다. 이는 문제에 대한 시각화를 내적 이미지로 형성한 경우 외부적으로 드러나는 형태는 수식이기 때문에 자신의 내적 이미지를 시각적 표현으로 나타내 보이도록 하기 위함이었다.

자료 분석은 다음과 같은 과정으로 이루어졌다. 먼저 문제 해결에서 6학년 학생들의 시각적 표현의 사용 빈도를 알아보기 위해, 각 학생별로 총 5문제에서의 시각적 표현의 사용 횟수를 조사하였고 일반적인 수학 성취도가 상, 중, 하에 해당하는 학생들 사이에 어떠한 차이가 있는지 알아보았다. 또한 각 문항별로 시각적 표현을 사용한 학생 수를 조사하였다. 이를 통해 학생별 시각적 표현의 사용 빈도와 문제별 시각적 표현의 사용 정도를 분석하였다. 이 과정을 요약하면 <그림 4>와 같다.



<그림 4> 자료 분석 과정

두 번째로 학생들이 사용한 시각적 표현의 유형을 알아보기 위해, 시각적 표현을 사용한 학생들의 반응을 그림 표현과 도식 표현으로 분류하였다. 그림 표현은 학생들이 구성한 시각적 표현이 문제에 언급된 대상이나 사람의 이미지를 그린 것이고, 도식 표현은 문제에 있는 대상들 사이의 공간적 관계를 보여주거나 문제에 표현된 관계의 공간적 이미지를 기록한 것이다. 이렇게 얻은 자료를 바탕으로 시각적 표현의 사용과 문제 해결과의 관계, 시각적 표현의 유형과 문제 해결과의 관계를 분석하고 대표적인 사례를 통해 설명하도록 하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 시각적 표현의 사용과 문제 해결과의 관계

가. 시각적 표현의 사용 빈도

문제 해결 과정에서 학생들의 시각적 표현의 사용에 대한 선호도를 알아보기 위해, 6학년 학생들에게 시각적 표현을 사용하여 해결할 수도 있고 곧바로 수식을 이용하여 해결할 수도 있는 5개의 문제를 제시하여 풀도록 하였다. 학생들의 지필 결과는 시각적 표현의 사용에 따라 0점에서 5점까지 점수가 부여되었다. 즉, 학생들의 해법에 시각적 표현을 사용한 증거가 전혀 없으면 0점, 시각적 표현이 나타난 경우는 1점씩 배당하였다. 따라서 0점은 5문제를 해결하는 동안 시각적 표현을 전혀 사용하지 않았음을 뜻하고, 5점은 각 문제를 해결하는 과정에서 시각적 표현을 모두 사용하였음을 나타낸다. 각 학생별로 5문제에 대한 점수를 모두 합한 후, 점수별 학생들의 분포를 알아본 결과는 <표 1>과 같다.

<표 1> 학생별 시각적 표현의 사용 점수 분포

시각적 표현 사용점수	0	1	2	3	4	5
학생 수 (%)	57 (30.8)	52 (28.1)	28 (15.1)	29 (15.7)	14 (7.6)	5 (2.7)

학생들의 점수를 모두 모아 평균 점수를 구해본 결과 총 5점 중 1.5점을 나타냈다. 즉 5개의 문제 중에서 1~2개 정도에서만 시각적 표현을 사용했다는 것이다. 이는 학생들이 시각적 표현의 사용을 별로 선호하지 않는다는 것을 나타낸다. 구체적으로 <표 1>에서 보듯이, 30.8%에 해당하는 57명의 학생들은 시각적 표현을 전혀 사용하지 않는 것으로 나타났다. 여기에 5개의 문제 중 하나의 문제에서만 시각적 표현을 사용한 학생들의 수를 합하면 거의 60%에 이르는 학생이 거의 시각적 표현을 사용하지 않는다고 볼 수 있다. 반면에 4문제 이상에서 시각적 표현을 이용하여 해결한 학생들은 겨우 19명(약 10%)밖에 되지 않는다.

제시된 5개의 문제 중 3개의 문제는 이미 수학 교

과서와 익힘책에서 식을 세워 풀어보고 동시에 그림을 그려 풀어보았던 문제와 비슷한 유형이었음에도 불구하고 많은 학생들이 시각적 표현을 거치지 않고 바로 식을 세워 문제를 풀려고 시도했다는 점은 학생들이 문제를 해결할 때 시각적 표현의 중요성에 대해 별로 인식하지 못하고 있음을 나타낸다. 제시된 5개의 문제들이 모두 시각적 표현을 사용하여 문제를 해결할 수도 있고 수식을 사용하여 문제를 해결할 수도 있지만 문제에 제시된 정보를 시각적 표현으로 나타냄으로써 더 쉽게 해결 방법을 찾을 수 있다는 점에서 보면 이는 결코 무시할 수 없는 결과라 할 수 있다. 즉, 5학년과 6학년에서의 문제 해결 지도의 목적이 여러 가지 방법으로 문제를 해결하고 서로 비교하여 더 편리한 방법을 찾는 것에 있다는 것을 고려해 보면 많은 학생들이 일관되게 수식만을 사용하여 문제를 해결하려 한다는 것은 교육과정의 취지에도 맞지 않는 결과라 할 수 있다.

이와 더불어, 학생들의 시각적 표현의 사용이 수학 성취 수준에 따라 어떻게 다르게 나타나는지를 알아보기 위해 대상 학생들을 수학 성취도에 따라 상, 중, 하로 분류하고 각 그룹별 시각적 표현 사용 점수 분포를 알아보았다. 여기서 수학 성취도는 전국적으로 실시한 평가 결과를 바탕으로 상 62명, 중 62명, 하 61명으로 나누었다. 결과는 <표 2>와 같다.

<표 2> 수학 성취도별 시각적 표현의 사용 점수 분포

시각적 표현 사용 점수	0	1	2	3	4	5
상위학생	11	12	11	15	9	4
중간학생	21	20	9	8	4	0
하위학생	25	20	9	5	1	1

<표 2>를 보면 앞에서 언급했듯이 학생들의 시각적 표현의 사용이 매우 저조하기 때문에 0~1점에 해당하는 학생 수가 세 그룹에서 모두 많은 편이지만, 전체적인 분포를 살펴보았을 때 상위 그룹에서 시각적 표현을 사용하는 학생들이 상대적으로 많은 반면, 하위 그룹에서는 시각적 표현을 사용한 학생이 매우 적은 것으로 나타났다. 구체적으로, 시각적 표현의 사용 점수가 중간 이상인 3~5점에 해당하는 학생들이 상위 그룹에서는 28명, 중간 그룹에서는 12명, 하위 그룹에서는 7명이었다. 상위 그룹 학생들 중에서도 시각적 표현을 거의 사용하지 않는 학생들이 있지만 상대적으로 보았을 때 중간 그룹이나 하위 그룹의 학생들보다 시각적 표현의 사용을 선호하는 학생들이 더 많다는 것이다. 게다가 하위 그룹의 학생들은 총 61명 중 25명의 학생들이 전혀 시각적 표현을 사용하지 않았다. 이러한 결과는 상위 학생일수록 문제 해결에서 시각적 표현을 더 자주 사용한다는 주장을 뒷받침한다.

다음으로, 학생들의 시각적 표현의 사용 결과와 관련하여 각 문제별 시각적 표현의 사용 경향을 살펴보면 <표 3>과 같다. 시각적 표현의 사용은 학생들에 따라 동일하게 나타나지 않는다. 따라서 각 문제별로 시각적 표현의 사용 경향을 살펴보았을 때 많은 변동이 존재할 수 있을 것이다.

<표 3> 각 문제별 시각적 표현의 사용 경향

문 제	1	2	3	4	5
시각적 표현을 사용한 학생 수(%)	54 (29.2)	68 (36.7)	41 (22.2)	38 (20.5)	75 (40.5)

<표 3>에서 보듯이 각 문제별로 20.5% ~ 40.5%의 학생이 시각적 표현을 사용한 것으로 나타났다. 대부분의 문제에서 시각적 표현의 사용이 적은 편인데, 특히 3번과 4번 문제의 경우 더욱 적음을 알 수 있다. 이는 3번과 4번 문제에 다음과 같이 계산과 직접적인 연관이 있는 용어들이 상대적으로 많이 포함되어 있기 때문으로 보인다. 학생들은 이 문제를 읽고, 문제 상황을 시각적으로 표현하는 단계를 거치기보다는 바로 식을 세우고 계산을 하는 전략을 선택한 것이다.

"300cm의 철사가 있다. 이 철사를 네 도막으로 나누려고 한다. 철사 두 도막의 길이는 같고, 한 도막은 이것들보다 24cm 길고 한 도막은 16cm 짧다. 각각의 도막은 몇 cm인가?"

"진수는 선희보다 10cm 크고, 성진이는 진수보다 6cm 작으며, 호영이는 성진이보다 5cm 작다. 네 사람 중 키가 가장 큰 사람과 가장 작은 사람의 키의 차이는 얼마인가?"

한편, 문제 5의 경우는 다른 문제들에 비해서 시각적 표현의 사용이 다소 많이 나타났는데 이는 문제에 '직사각형'이라는 용어가 등장하기 때문으로 유추된다. 즉, 여러 연구자들이 문제 해결에서 시각적 표현은 기하 문제에서뿐만 아니라 모든 영역의 문제에서 도움이 된다고 주장하였지만 학생들은 일반적으로 기하 문제에서만 시각적 표현을 사용하려고 하며, 만약 문제에 연산과 관련된 용어가 나오면 바로 식을 세우려는 경향이 있는 것으로 해석할 수 있다.

나. 문제 해결과의 관계

시각적 표현의 사용과 문제 해결과의 관계를 알아보기 위해 각 문제별로 시각적 표현을 사용한 경우와 수식을 이용한 경우에 대한 문제 해결 성공률을 알아보았다. 그에 앞서 각 문제에 대한 전체적인 정답률을 살펴보면 <표 4>와 같다.

<표 4> 각 문제별 정답자 수

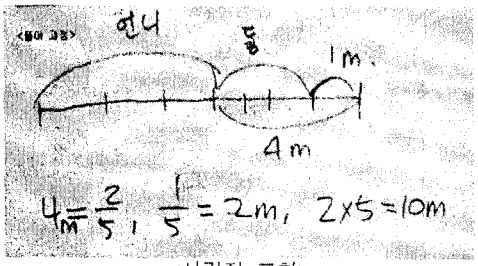
문 제	1	2	3	4	5
정답자수	144	102	78	104	98
(%)	(77.8)	(55.1)	(42.2)	(56.2)	(53.0)

<표 4>를 보면 총 5 문제에서의 문제 해결 성공률은 42.2%에서 77.8%까지 분포되어 있다. 1번 문제를 제외하고는 50% 전후의 성공률을 보여, 대체적으로 정답률이 높지 않음을 알 수 있다. 1학년부터 6학년까지 '문제 푸는 방법 찾기' 단원을 통해 문제 해결에 대한 경험을 가지고 있음에도 불구하고 여전히 문제 해결은 초등학교 학생들에게 어려운 것으로 보인다. 특히 3번 문제의 경우는 수학 교과서(5-나)에 제시된 문제와 가장 유사한 문제였음에도 불구하고 가장 낮은 정답률을 나타냈다. 수학 교과서에서는 이 문제를 다양한 방법으로 문제 풀기 중, 식을 세워 풀어보기와 그림을 그려 풀어보기의 익히기 문제로 제시하고 있다. 아마도 학생들은 이 문제도 식을 세워 풀거나 그림을 그려서 풀어봤을 것이다. 그럼에도 불구하고 이와 같이 매우 낮은 정답률을 나타낸 것은 앞에서 살펴보았듯이 이 문제에서 시각적 표현의 사용이 매우 적은 것과 관련이 있을 것으로 예상된다. 이에 대한 명확한 분석을 위해 각 문제별로 시각적 표현을 사용한 경우와 수식을 사용한 경우의 문제 해결 과정을 자세히 분석할 필요가 있다. 일단, 각 경우에 대한 문제 해결 성공률을 제시하면 <표 5>와 같다.

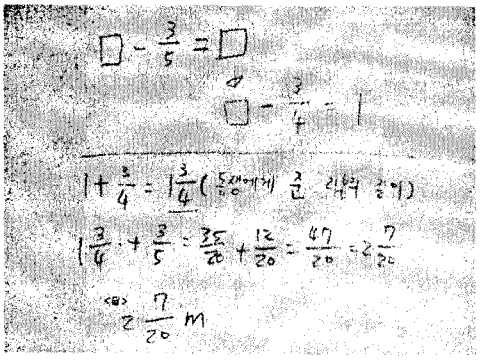
<표 5>에서 나타나듯이, 문제 1번을 제외하고는 각 문제별로 약간의 변동이 있긴 하지만 시각적 표현을 사용한 학생들의 정답률이 수식을 이용한 학생들의 정답률보다 높은 것을 알 수 있다. 즉, 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하였을 때 성공적인 해법에 도달할 확률이 높다는 것이다. 이는 시각적 표현이 문제에 대한 이해를 확실하게 해 주고 문제에 제시된 정보를 통합함으로써 문제의 해법을 쉽게 찾을 수 있게 해 준다는 것을 보여주는 결과라 할 수 있다. 대표적으로 가장 큰 차이를 나타낸 2번 문제에 대해, 모든 문제에 걸쳐 일관되게 시각적 표현을 이용함으로써 성공적인 문제 해결을 보여준 학생과 수식만을 이용함으로써 올바른 해법에 도달하지 못한 학생의 해법을 비교하여 제시하면 <그림 5>와 같다.

<표 5> 시각적 표현을 사용한 경우와 수식을 사용한 경우의 문제 해결 성공률

문 제		1	2	3	4	5
시각적 표현	이용한 학생 수	54	68	41	38	75
	정답 학생 수(%)	40(74.1)	59(86.8)	23(56.1)	28(73.7)	59(76.1)
수식	이용한 학생 수	128	110	123	122	88
	정답 학생 수(%)	104(81.3)	43(39.1)	55(44.7)	76(62.3)	39(44.3)
무응답		3	7	21	25	22



<시각적 표현>

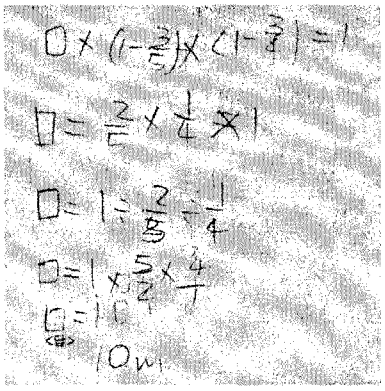


<수식>

<그림 5> 시각적 표현을 사용한 학생과 수식을 사용한 학생의 비교

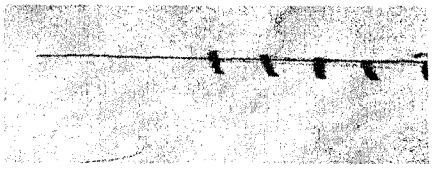
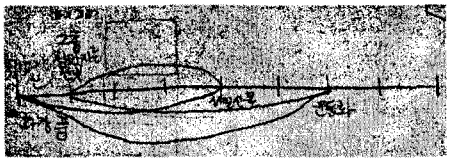
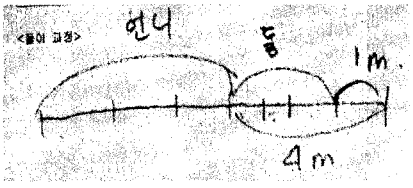
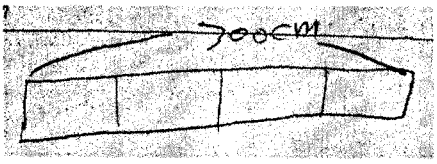
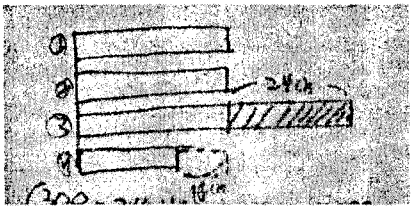
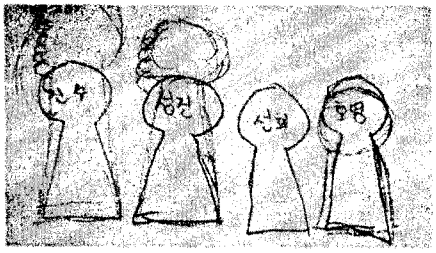
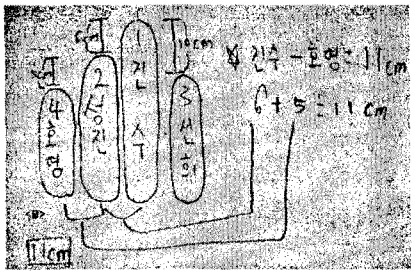
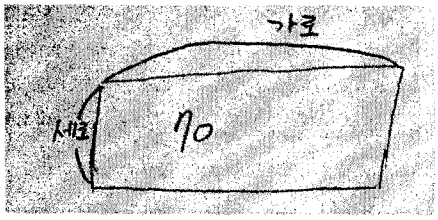
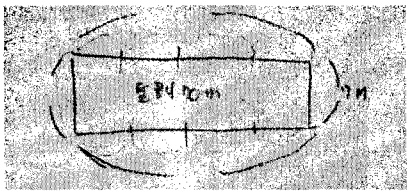
<그림 5>에서 시각적 표현을 사용한 학생의 해법을 보면, 문제의 상황을 그림으로 표현함으로써 전체의 $\frac{2}{5}$가 4m가 된다는 것을 발견하고 따라서 전체가 10m가 됨을 쉽게 알 수 있었다. 그러나 수식을 이용하여 문제를 해결한 학생은 문제의 의미를 생각하지 않고 문제의 진술에서 연산과 관련된 용어만을 보고 바로 식을 세웠기 때문에 '$\square - \frac{3}{5} - \frac{3}{4} = 1$'이라는 잘못된 식을 세우게 되었다. 이 학생은 일반적인 수학 성취도가 중간에 해당하는 학생이었기 때문에 이러한 잘못된 식의 원인을 분수의 개념에 대한 이해가 부족하기 때문이라고 보기는 어렵고, 문제 상황에 대한 이해가 명확하게 이루어지지 않은 것으로 보아야 한다.

반면 수식을 사용한 많은 학생들이 이와 같은 잘못된 식을 세웠지만 일부 학생들의 경우는 <그림 6>에서와 같이 대수적으로 정확하게 풀기도 하였다. 이러한 학생들은 외부적으로 문제에 대한 시각적 표현이 나타나지는 않았지만 학생의 머릿속에 문제 상황에 대한 내적 이미지가 형성되어 정확한 식을 세울 수 있었던 것으로 보인다.



<그림 6> 성공적으로 수식을 이용한 사례

한편, 예외적으로 1번 문제의 경우에서 시각적 표현을 사용한 학생들보다 수식을 사용한 학생들의 문제 해결 성공률이 더 높은 것은 주목할 만한 결과이다. 이는 시각적 표현을 사용한다고 해서 수식을 사용할 때보다 무조건 문제를 성공적으로 해결할 수 있다는 것은 아니라는 것을 의미한다. 또한 다른 문제의 경우, 수식을 사용한 학생들보다 시각적 표현을 사용한 학생들의 정답률이 높은 것은 사실이나 시각적 표현을 사용하고서도 성공적인 문제 해결로 이어지지 못한 많은 경우들이 존재한다. 특히, 3번 문제의 경우 시각적 표현을 사용한 41명의 학생 중 절반 남짓에 해당하는 23명의 학생만이 정답을 구한 것으로 나타났다. 이는 학생들이 구성한 시각적 표현의 특성에 따라 문제 해결에 대한 기여도가 결정된다는 것을 의미한다. 따라서 학생들이 구성한 시각적 표현의 특성에 대한 자세한 분석이 필요하다.

문제	그림 표현	도식 표현
1		
2		
3		
4		
5		

<그림 7> 각 문제별 그림 표현과 도식 표현의 대표적인 사례

2. 시각적 표현의 유형과 문제 해결과의 관계

가. 시각적 표현의 유형: 그림 표현과 도식 표현

학생들이 구성한 시각적 표현의 특징을 알아보기 위해, Hegarty와 Kozhevnikov(1999)의 분류 및 용어를 사용하여 시각적 표현을 도식 표현과 그림 표현으로 나누어 분석하였다. 각 문제별 대표적인 표현 유형의 사례를 제시하면 <그림 7>과 같다.

<그림 7>에서 보는 바와 같이 그림 표현을 사용한 학생들은 문제에 제시된 대상이나 사람을 그대로 나타내었고, 도식 표현을 사용한 학생들은 문제에 제시된 대상들 사이의 공간적 관계를 나타내었다. 예를 들면, 5번 문제의 경우 그림 표현에서는 문제에 언급된 직사각형과 둘레의 길이가 70이라는 개별적인 정보가 담겨 있는 반면, 도식 표현에서는 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이의 4배가 됨을 눈금으로 나타내고 이 전체가 70이라는 것을 표현하고 있다. 4번 문제의 경우에도 그림 표현에서는 문제에 제시된 학생 하나하나를 자세한 그림으로 나타낸 반면, 도식 표현에서는 학생들의 키 사이의 관계에 초점을 맞추어 나타냈음을 알 수 있다. 이러한 분류 기준을 바탕으로 각 문제별 학생들이 구성한 시각적 표현을 분석한 결과는 <표 6>과 같다.

<표 6>에서 보면, 시각적 표현을 사용한 학생들 중 그림 표현을 사용한 학생들보다 도식 표현을 사용한 학생들이 더 많음을 알 수 있다. 즉, 시각적 표현이 나타난 총 276개의 사례 중 그림 표현은 53개, 도식 표현은 223개로 나타났다. 이는 시각적 표현을 이용하는 학생들은 문제에 제시된 대상이나 사람을 그리는 데에서 그치는 것이 아니라 대상들 사이의 시각적 · 공간적 관계를 나타내려고 시도한다는 것을 의미한다. 각 문제별로 비교해 보면, 3번 문제에서 다른 문제에 비해서 도식 표현을 사용한 학생들이 적고 상대적으로 그림 표현을 사용한 학생들의 비율이 많은 편인데 이는 앞에서 살펴본 바와 같이 3번 문제에서 시각적 표현을 이용한 학생들의 정답률이 매우 낮았던 데 대한 하나의 설명을 제공해 줄 수 있을 것으로 보인다. 따라서 그림 표현과 도식 표현이 어떻게 문제 해결과 연결되고 있는지에 대한 자세한 분석이 필요하다.

나. 문제 해결과의 관계

학생들이 사용한 시각적 표현을 그림 표현과 도식 표현으로 분류해 보았을 때 이것이 성공적인 문제 해결과 어떠한 관계가 있는지를 알아보기 위해, 각각의 표현에 대한 정답자과 오답자를 분석해 보았다. 결과는 <표 7>과 같다.

<표 6> 각 문제별 그림 표현과 도식 표현을 사용한 학생 수(%)

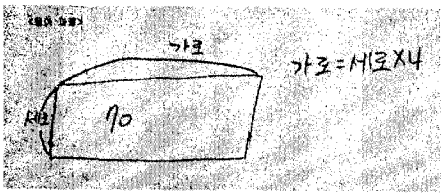
문 제	1	2	3	4	5	합계
시각적 표현	54	68	41	38	75	276
그림 표현	12	3	15	6	17	53
(%)	(22.2)	(4.4)	(36.6)	(15.8)	(22.7)	(19.2)
도식 표현	42	65	26	32	58	223
(%)	(77.8)	(95.6)	(63.4)	(84.2)	(77.3)	(80.8)

<표 7> 시각적 표현의 유형에 따른 정답자와 오답자 수

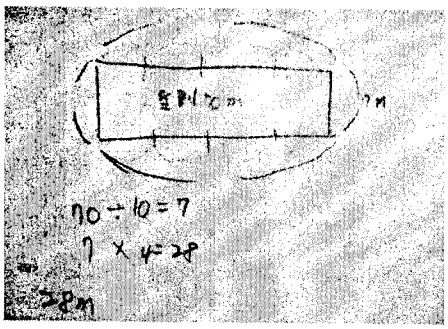
문 제	1		2		3		4		5		합계	
	정답	오답	정답	오답	정답	오답	정답	오답	정답	오답	정답	오답
그림 표현	3	9	0	3	3	12	1	5	3	14	10	43
도식 표현	37	5	59	6	20	6	27	5	56	2	199	24

<표 7>은 그림 표현을 사용한 53개의 사례 중 10개를 제외하고는 모두 문제 해결에 실패했음을 보여준다. 반면 도식 표현을 사용한 학생은 총 223개의 사례 중 199개의 사례에서 문제 해결에 성공하여 89.2%의 다소 높은 정답률을 나타냈다. 그림 표현과 도식 표현이 어떻게 문제 해결을 이끌었는지에 대해 대표적인 사례를 통해 자세히 살펴보도록 한다.

먼저 <그림 8>과 <그림 9>는 5번 문제에 대한 학생들의 문제 해결 과정을 나타낸다. 그림 표현을 사용한 <그림 8>의 경우는 문제에서 제시한 직사각형의 모습만을 표현했을 뿐 가로의 길이가 세로의 길이의 4배가 된다는 것을 나타내지 못하여 이후의 문제 해결 과정이 전혀 이루어지지 못했다. 반면 도식 표현을 사용한 <그림 9>의 경우는 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이의 4배가 됨을 눈금으로 표시함으로써 전체 둘레의 길이를 10으로 나누면 된다는 새로운 정보를 얻을 수 있었기에 정확하게 문제를 해결할 수 있었다.

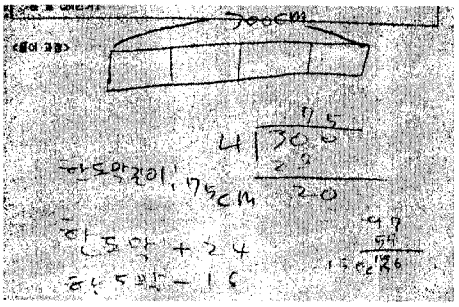


<그림 8> 문제 5에서 그림 표현을 이용한 문제 해결 과정

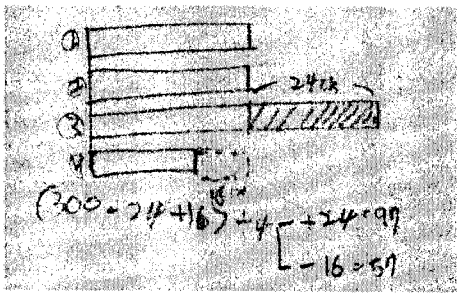


<그림 9> 문제 5에서 도식 표현을 이용한 문제 해결 과정

또한, 시각적 표현을 사용한 학생들 중 정답률이 가장 낮았던 문제 3의 경우는 그림 표현을 이용한 학생들이 어떻게 잘못된 문제 해결 과정으로 나아갈 수 있는지를 보여준다. <그림 10>과 <그림 11>은 문제 3에서 대표적으로 그림 표현을 이용한 문제 해결 과정과 도식 표현을 이용한 문제 해결 과정을 제시한 것이다. <그림 10>에서 보는 바와 같이 그림 표현을 이용한 학생은 네 도막으로 나누어진 철사만을 나타내었을 뿐 각 도막 사이의 관계를 표현하지 못하여 먼저 한 도막의 길이를 구하기 위해 300cm를 4로 나누게 된다.



<그림 10> 문제 3에서 그림 표현을 이용한 문제 해결 과정

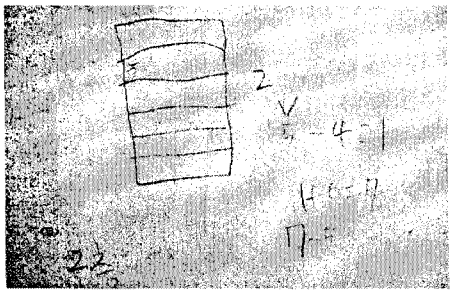


<그림 11> 문제 3에서 도식 표현을 이용한 문제 해결 과정

반면 <그림 11>에서 도식 표현을 이용한 학생은 각 도막들 사이의 관계를 시각적으로 나타냄으로써 300cm에서 24를 빼고 16을 더한 후에 4로 나누어야 길이가 같은 두 도막의 길이를 구할 수 있다는 것을 알게 된다. 따라서 <그림 10>에 나타난 학생은 300을 4로 나눈 후 한 도막의 길이를 75cm로 구하고 이후 다른 한 도막은 24cm 길기 때문에 97cm(99cm가 되어야 하는 데 잘못 구한 것)가 되고 또 다른 한 도막은 16cm 짧기 때문에 59cm가 된다고 구하였다. 이 때 이 학생은 97cm와 59cm를 더하면 156이 되어 75cm 두 도막과 합하면 300이 넘기 때문에, 남는 6을 75cm 두

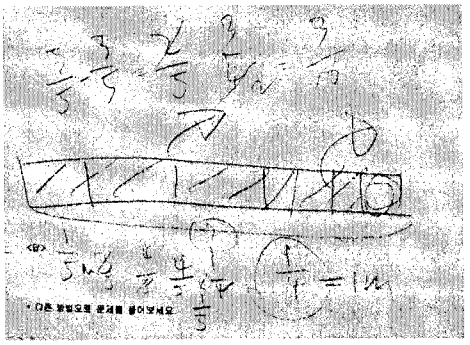
개에서 각각 3씩 빼어 최종 답으로 72cm, 72cm, 97cm, 59cm를 제시하였다. 물론 이렇게 되면 72cm와 97cm의 차이가 24cm가 되지 않으며, 72cm와 59cm의 차이가 16cm가 되지 않는다. 즉, 그림 표현은 문제에 제시된 대상들의 관계를 명확히 나타내지 못하기 때문에 이를 이용하여 얻은 답은 문제의 조건에 맞지 않는 경우가 많은 것이다.

한편, 예외적으로 그림 표현을 사용하여 문제를 성공적으로 해결한 사례와 도식 표현을 사용했지만 문제를 성공적으로 해결하지 못한 사례들을 살펴보도록 한다. 먼저 <그림 12>는 그림 표현을 사용하여 문제의 정답을 제시한 사례를 보여준다. 이 학생은 단지 백화점 건물의 층수만을 나타낸 그림 표현을 이용하였다. 그러나 학생의 기록에서 볼 수 있듯이 이후의 문제 해결 과정은 그림 표현과 상관없이 거꾸로 풀기 전략을 이용한 것이다. 즉 최종적으로 현재 있는 곳이 2층이기 때문에 문제의 진술을 거꾸로 따라 올라가 3을 더하고 4를 빼고 6을 더하고 7을 빼는 과정으로 정답인 2층을 구하게 된 것이다. 즉 이는 시각적 표현의 사용이 직접적으로 문제 해결에 연결되지 못한 사례라고 할 수 있다. 이와 유사한 다른 경우에도 그림 표현을 나타낸 학생은 이를 이용하기 보다는 예상과 확인 전략이나 표 만들기 전략을 이용하여 문제를 성공적으로 해결하였음을 보여준다. 이를 다르게 해석하면 그림 표현은 문제 해결에 큰 도움을 주지 못한다는 것으로도 볼 수 있을 것이다.



<그림 12> 문제 1에서 그림 표현을 이용하여 문제를 성공적으로 해결한 사례

다음으로 도식 표현을 사용했지만 문제를 성공적으로 해결하지 못한 사례들을 살펴보도록 한다. 앞에서 제시한 바와 같이 도식 표현을 사용한 총 223개의 사례 중 24개의 경우 문제를 성공적으로 해결하지 못한 것으로 나타났다. 이는 매우 큰 수치는 아니지만, 문제에 제시된 대상들 사이의 공간적 관계를 표현하려 했음에도 불구하고 문제를 성공적으로 해결하지 못했던 이유를 살펴보는 것은 매우 의미 있는 일일 것이다. 일부 학생들은 도식 표현을 함에 있어 문제에 제시된 대상들 사이의 관계를 잘못 표현하거나 일부만 표시하여, 전체적인 문제 해결 과정이 문제에 제시된 조건을 모두 만족시키지 못하는 경우를 보여주었다. 이는 문제에 제시된 대상들 사이의 공간적 관계를 정확히 표현하는 과정에서 오류를 일으킨 것이다.



<그림 13> 문제 2에서 도식 표현을 이용하여 성공적으로 문제를 해결하지 못한 사례

이와 달리 정확한 도식 표현을 했음에도 불구하고 문제 해결에 실패한 경우도 있다. 대표적인 사례를 제시하면 <그림 13>과 같다. <그림 13>을 살펴보면 이 학생은 전체의 $\frac{3}{5}$을 언니에게 주고 남은 부분의 $\frac{3}{4}$을 동생에게 주었다는 것을 명확하게 그림으로 표현하였고 남은 부분이 1m가 된다는 것까지 시각적으로 이해할 수 있었다. 학생이 기록한 식을 보면 동생에게 준 '남은 부분의 $\frac{3}{4}$'은 전체의 $\frac{3}{10}$이 된다는 것까지 구할 수 있었다. 그러나 전체의 길이를 구하는 과정에서 $\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$이라는 잘못된 식을 세워 $\frac{1}{5}$m라는 답을 얻게 되었다. 이는 이론적 배경에서 살펴보았듯이 학생들의 시각적 표현의 이용에 있어서 탐구의 과정이 얼마나 중요한지를 보여준다. 학생들은 탐구의

과정을 통해 새로운 정보를 얻을 수 있으며 이에 대한 통찰을 거쳐 정확한 해법에 다다를 수 있는 것이다. 즉, 성공적인 문제 해결을 위해서는 시각적 표현 능력뿐만 아니라 이를 통한 분석적 사고 능력이 요구된다.

V. 논의

본 연구는 특정 지역에 속한 학생들을 대상으로 5개의 문항만을 사용하였으므로 대상이나 문항과 관련된 지나친 일반화는 지양되어야 할 것이다. 그러나 이러한 제한점에도 불구하고 본 연구는 문제 해결에서 학생들의 시각적 표현의 이용에 대한 선호도와 그 특징을 상세하게 조사 · 분석하여 문제 해결 지도에 대한 시사점을 얻고자 하였다. 일찍이 Polya(1957)는 시각적 표현을 사용하는 것이 문제 해결의 가장 기본적인 요소라고 주장하였고, 기하 문제에서뿐만 아니라 모든 영역의 문제에서 시각적 표현을 이용할 수 있다고 언급하였다. 이에 본 연구의 주된 결과를 바탕으로 다음과 같은 논의를 해 볼 수 있다.

첫째, 초등학교 학생들에게 문제 해결 과정에서 시각적 표현이 매우 중요함을 인식시켜 줄 필요가 있다. 본 연구는 많은 학생들이 문제를 해결할 때 시각적 표현보다는 바로 수식을 사용한다는 결과를 드러낸다. 이는 많은 학생들이 '그림 그리기'를 꺼려 한다는 Diezmann(2002)의 주장과 일관된 결과이다. 또한 시각적 표현을 사용한 학생들이 수식만을 사용한 학생들보다 정답률이 더 높은 것으로 나타나, 시각적 표현과 문제 해결 능력 사이에 긍정적인 관계가 있다는 van Garderen(2006)과 van Garderen과 Montague (2003)의 연구를 뒷받침하고 있다.

현행 교육과정이 문제 해결을 매우 강조하며 결과뿐만 아니라 과정을 중요시하고 다양한 전략으로 문제를 해결하여 비교 · 분석할 수 있도록 하고 있지만, 문제 해결에 대한 지도는 일반적으로 교과서에 제시된 일련의 전략들(그림 그리기, 예상하고 확인하기, 표 만들기, 식 세우기, 거꾸로 풀기 등)을 제공하는 것으로 그치고 있다(방정숙 · 김상화, 2006; van Garderen, 2006). 그러나 이러한 지도는 어떤 전략을 사용해야 하는지, 어떻게 선택한 전략을 실행할 수 있는지에 어려움을 갖는 학생들에게는 별 도움이 되지 못한다(Fuchs & Fuchs, 2001; Woodward & Montague, 2002). 일반적으로 많은 학생들은 문제에서 나타나는 연산과 관련된 용어들을 이용하여 바로 식을 세우고 계산을 하려는 경향이 있다. 따라서 학생들이 문제 상황을 시각적 표현으로 나타냄으로써 어떤 해결 방법을 사용할 것인지를 스스로 탐구할 수 있도록 지도할 필요가 있다. 즉, Polya가 제시한 문제 해결의 4단계 중 어떤 전략을 사용할 것인지에 관한 '계획 수립' 단계의 지도에 앞서, '문제 이해' 단계에서부터 확실한 지도가 이루어져야 한다는 것이다. 많은 연구자들이 지적했듯이 시각적 표현은 문제 이해를 위한 강력한 도구가 될 수 있다(Hegarty & Koshevnikov, 1999; Polya, 1957; Stylianou & Silver, 2004; van Garderen & Montague, 2003).

둘째, 문제 해결에 어려움을 나타내는 하위 학생의 경우 특히 시각적 표현에 대한 지도가 이루어져야 한다. 본 연구에서 대체적으로 많은 학생들이 시각적 표현을 사용하지 않았으나, 수학 성취도에 따라 상, 중, 하로 나누어 보았을 때 하위 학생의 경우에 더욱 시각적 표현을 사용하지 않는 것으로 나타났다. 이는 학습 부진아일수록 표현 전략의 사용이 적고 대신 시행착오 전략이나 계산을 사용한다고 주장하는 van Garderen과 Montague(2003)의 연구와 일맥상통한다. 이는 그동안의 학습 부진아에 대한 지도가 문제 해결 기술과 관련된 계산 능력의 향상에만 초점을 맞추어왔기 때문이기도 하다(Gallagher Landi, 2001).

한때 상위 학생들은 시각화의 과정을 꺼려하며 기호를 선호한다는 연구들이 있어왔으나(Eisenberg & Dreyfus, 1991; Vinner, 1989), 시대가 달라지고 교육과정의 경향이 달라짐에 따라 시각적 표현에 대한 인식이 달라지고 이에 대한 학생들의 경험이 풍부해진 것이 사실이다(Stylianou, 2001, Stylianou, 2002). 이로 인해 최근의 연구들은 상위 학생들뿐만 아니라 수학자들까지도 시각적 표현의 사용을 선호한다고 주장한다. 따라서 시각적 표현이 단지 기하 문제에서만 유용하다고 인식하는 하위 학생들에게 시각적 표현은 다양한 문제에 적용이 가능하며 문제 상황에 대한 이해를 쉽게 해 주어 해결 계획을 수립하고 이를 수행하는 데에 유용한 도구가 될 수 있음을 알려줄 필요가 있다.

셋째, 학생들이 문제에 제시된 상황을 시각적으로 표현할 때 단순한 그림 표현이 아니라 도식 표현을 할 수 있도록 지도해야 한다. 여러 선행 연구들은 도식

표현이 성공적인 문제 해결과 긍정적 관련이 있는 반면 그림 표현은 부정적 관련이 있다고 보았다(Hegarty & Kozhevnikov, 1999; van Garderen, 2006; van Gardren & Montague, 2003). 즉, 문제를 성공적으로 해결하는 상위 학생일수록 도식 표현을 주로 사용한다는 것이다.

본 연구에서도 시각적 표현의 사용이 반드시 성공적인 문제 해결로 이어지지 않는다는 것을 발견하고 학생들이 구성한 시각적 표현을 그림 표현과 도식 표현으로 나누어 분석한 결과 문제를 성공적으로 해결한 학생들은 대부분 도식 표현을 사용했다는 것을 알게 되었다. 따라서 시각적 표현을 사용했는지의 여부뿐만 아니라 어떠한 시각적 표현을 사용했는지가 문제 해결에 있어서 매우 중요하다. Stylianou와 Silver(2004)는 시각적 표현에서 문제 상황에 대한 세련된 그림을 그리기보다는 문제에서의 특정한 관계 및 특성들을 강조해야 성공적인 문제 해결의 열쇠가 될 수 있다고 하였다. 이에 문제 해결에서의 시각화에 대한 지도는 문제에 제시된 대상들 사이의 시각적·공간적 관계를 나타낼 수 있도록 이루어져야 한다.

넷째, 성공적인 문제 해결을 위해서는 시각적 표현을 이용함에 있어 반드시 올바른 탐구의 과정을 거쳐야 한다. 앞에서 언급했듯이 문제를 성공적으로 해결한 학생들은 대부분 도식 표현을 사용했다. 그러나 여전히 도식 표현을 사용한 학생들 중에도 문제를 성공적으로 해결하지 못한 학생들이 나타났다. 이는 시각적 표현을 구성하였으나 이를 문제 해결 과정에 사용하지 않고 계산과 같은 다른 전략으로 바로 넘어갔거나, 시각적 표현을 효과적으로 사용할 수 있는 절차적 지식이 부족했기 때문으로 분석되었다. 이는 시각적 표현이 자동적으로 문제 해결에 유용하게 이용되지는 않는다고 제언한 Nunokawa(2006)의 연구와 관련이 된다. 즉, 시각적 표현을 문제 해결에 효율적으로 이용하려면 반드시 올바른 탐구의 과정이 필요하다는 것이다. Stylianou와 Silver(2004)는 시각적 표현에 대한 탐구가 문제해결 전문가에게는 자동적으로 나타나는 반응 또는 절차라고 하였다. 따라서 시각적 표현에 대한 질적 탐구의 기회를 충분히 제공할 필요가 있다 하겠다.

강조하건대 시각적 표현은 문제 해결의 중요한 요소로 성공적인 문제 해결을 위해서는 단순히 수학 문제를 시각화하는 것에 그치지 않고 수학적으로 관련된 요소를 이해하고 표현하는 방법을 지도해야 하며, 문제 해결에서 시각적 표현의 효과적인 지도에 관한 지속적인 연구가 필요함을 제안해 본다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2007). 초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과. 교육과학기술부.

국립국어원 (1999). 표준국어대사전. 서울: 두산동아.

김유정 (2004). 초등 수학 문제 해결 과정에 사용되는 표현방법에 대한 연구. 서울교육대학교 석사학위논문.

방정숙·김상화 (2006). 문제해결과 관련된 제7차 초등학교 수학과 교육과정 및 교과용 도서 분석. 학교수학 **8(3)**, pp.341-364.

우정호 (2002). 수학교육학의 지평. 서울: 경문사.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* **52(3)**, pp.215-241.

Campbell, K. J.; Collis, K. F. & Watson, J. M. (1995). Visual processing during mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics* **28(2)**, pp.177-194.

Carney, N. R. & Levin, R. J. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review* **14(1)**, pp.5-26.

Diezmann, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom* **7(3)**, pp.4-8.

Diezmann, C. M. & English, L. D. (2001). Developing young children's multidigit number sense. *Roeper Review* **24(1)**, pp.11-13.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 26-37). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Elia, I.; Gagatsis, A. & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on

the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction* **17(6)**, pp.658-672.

Elia, I. & Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.327-334). Bergen, Norway: PME.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-sloving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics* **66(1)**, pp.61-75.

Fuchs, L. S. & Fuchs, D. (2001). Principles for the prevention and intervention of mathematics difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice* **16(2)**, pp.85-95.

Gallagher Landi, M. A. (2001). Helping students with learning disabilities make sense of word problems. *Intervention in School and Clinic* **37(1)**, pp.13-18.

George, E. A. (1999). Male and female calculus students' use of visual representations. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* **1**, pp.17-25. Haifa, Israel: PME.

Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology* **91(4)**, pp.684-689.

Kozhevnikov, M.; Hegarty, M. & Mayer, R. E. (2002). Revising the visualizer-verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruction* **20(1)**, pp.47-77.

Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving processes. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* **2(3)**, pp.33-54.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method (2nd Ed.)*. Princeton, NJ: Princeton University Press. 우정호 역(1994). 어떻게 문제를 풀 것인가: 수학적 사고 방법. 서울: 천재교육.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics* **17(3)**, pp.297-311.

Stylianou, D. A. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* **4**, pp.225-232. Utrecht, The Netherlands: PME.

Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: The negotiation of a visual representation in expert problem solving. *Journal of Mathematical Behavior* **21(3)**, pp.303-317.

Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: an examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning* **6(4)**, pp.353-387.

van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities* **39(6)**, pp.496-506.

van Garderen, D. & Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice* **18(4)**, pp.246-254.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual consideration in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics* **11(1-2)**, pp.149-155.

Woodward, J. & Montague, M. (2002). Meeting the challenge of mathematics reform for students with LD. *The Journal of Special Education* **36(2)**, pp.89-101.

Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991). Editors'

introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* pp.1-7. Washington, DC: Mathematical Association of America.

A Study on the 6th Graders' Use of Visual Representations in Mathematical Problem Solving

Hwang, HyunMi
Seoul YongDap Elementary School
Yongdap-dong 29, Seongdong-gu, Seoul 133-847, Korea
E-mail: cromity@hanmail.net

Pang, JeongSuk
Korea National University of Education
Gangnae-myeon, Cheongwon-gun, Chung-buk 363-791, Korea
E-mail: jeongsuk@knue.ac.kr

Visual representations play an important role for students to understand the meaning of a given problem, devise problem-solving approaches, and implement them successfully. The purpose of this study was to investigate how 6th graders would use visual representations in solving mathematical problems and in what ways such use might affect successful problem solving. The results showed that many students preferred numerical expressions to visual representations. However, students who used visual representations, specifically schematic representations, performed better than those who employed numerical representations. Given this, this paper includes instructional implications to nurture students' use of visual representations in a way to increase their problem solving ability.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Visual Representation, Problem Solving, Pictorial Representation, Schematic Representation