한국수학사학회지 제22권 제4호(2009년 11월), 145 - 160

p-진 q-적분의 변천사에 대한 고찰

건국대학교 전산수학과 장이채
leechaejang@kku.ac.kr

한남대학교 수학교육과 서종진
sjj84@hanmail.net

광운대학교 교양학부 김태균
ttkim@kw.ac.kr

20세기말 p-진 공간에서 p-진 q-적분의 개념이 김태균에 의해서 처음 도입 되었다([11]). 이러한 적분은 복소수 공간에서 잭슨의 q-적분을 p-진 공간으로 확장시킨 것이며 또한 울트라 비 아르키메디언 적분[1)]의 존재성에 대한 질문의 답으로 볼 수 있다. 본 논문에서는 이러한 p-진 q-적분의 수학사적 배경을 살펴보고, 현재 어떠한 방향으로 연구가 진행되고 있는지를 고찰한다.

주제어: p-진 q-적분, 비 아르키메디언 적분

1. 서론

p-진 이론은 수학 및 수리물리 분야에서 최근에 활발히 연구되는 분야이고, 특히 p-진 물리학의 영역에서는 띠 이론과 연관시켜서 많은 물리학자들이 연구하고 있다. 이러한 이론들은 수학적 관점에서 접근한 매우 흥미로운 결과의 한 분야로 볼 수 있다. 특히 p-진 공간에서 적분을 취급하는 문제는 미세공간에서 일어나는 물리적, 공학적 현상을 해석하는데 중요한 역할을 할 뿐 아니라, 수학의 정수론을 p-진 양자역학과 관련시켜 연구하는데 중요한 도구가 된다. p-진 공간에서 리만적분 혹은 잭슨의

1) f가 강 미분 가능함수의 집합에 속할 때 f의 q-리만합

$$\frac{1}{[p^N]_q}\sum_{0\le j<p^N} q^j f(j)=\sum_{0\le j<p^N} f(j)\mu_q(j+p^N\mathbb{Z}_p)$$

를 생각하자. 이 극한이 존재할 때 이 합의 극한을 비아르키메디언 적분 혹은 p-진 불변 q-적분이라 한다.

q-적분과 관련된 적분의 존재성 문제와 p-진 공간에서 울트라 적분의 존재 여부에 관한 문제가 남겨져 있었다([5]). 이러한 문제의 답으로 1999년 김태균은 울트라적분의 개념으로 p-진 q-적분을 p-진 공간에서 구성하였다([11]). 김태균이 구성한 이러한 울트라 적분은 수학 및 물리의 영역에서 현재 다양하게 활용되고 있다. 본 논문에서는 이러한 p-진 q-적분의 수학사적 배경을 고찰하고, 현재의 연구 동향에 관해서 살펴보고자 한다.

이 논문에서 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$를 각각 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수의 집합을 나타낸다. p는 고정된 소수이고, p-진 노름[2]에 관한 $\mathbb{Q}$의 완비화(completion)를 $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p$의 대수적 폐포(algebraic closure)의 완비화를 $\mathbb{C}_p$로 표기하고, p-진 정수환을 $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \| x|_p \le 1\}$로 나타낸다. 그리고 v_p는 $\mathbb{C}_p$의 미지수에 대한 정규화된 지수값을 나타낸다. 즉, $|p|_p = p^{-v_p(p)} = p^{-1}$이다. 일반적으로 q-확장을 말할 때, q는 복소수나 p진수를 대상으로 한다. $q \in \mathbb{C}$ 이면 $|q| < 1$, $q \in \mathbb{C}_p$이면 $|q-1|_p < p^{-1/(p-1)}$로 가정한다. 그러면 $|x|_p \leqq 1$에 대하여 $q^x = \exp(x \log q)$이 된다. 또한 x의 q-수(number)는 다음과 같이 정의한다.

$$[x]_q = [x:q] = \frac{1-q^x}{1-q}.$$

그러면 $\lim_{q \to 1} [x]_q = x$임을 알 수 있다.

2절에서는 p-진 수 체(number field) $\mathbb{Q}_p$와 p-진 정수환 $\mathbb{Z}_p$가 어떻게 구성되었는지를 조사하고, 3절에서는 p-진 q-적분의 도입과정에 관한 수학사적 의미를 고찰하고, p-진 q-적분의 정의와 중요한 항등식을 소개한다. 4절에서는 p-진 q-적분의 페르미오닉 표현과 관련된 λ-오일러 수와 다항식에 관하여 알아본다.

2. p-진 수 체$\mathbb{Q}_p$와 p-진 정수환 $\mathbb{Z}_p$는 무엇인가?

2.1. p-진 수 체 $\mathbb{Q}_p$의 정의

먼저 n이 한없이 커질 때 $|p^n|_p = p^{-n} \to 0$이므로, p-진 노름의 성질에 의해 무

2) p-진 노름(p-adic norm)이란 다음과 같이 정의된 함수 $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0, \infty)$이다.

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & x = p^{rm/n} \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad (\text{단, } m, n, r \in \mathbb{Z}\text{이고, } m, n\text{은 } p\text{와 서로소}).$$

한등비급수의 합공식인 $1/(1-p)=\sum_{n=0}^{\infty}p^n=1+p+\cdots+p^n+\cdots$를 사용할 수 있다. 보다 일반적으로, 0 이 아닌 유리수는 p-진 전개 $\sum_{n=k}^{\infty}a_n p^n$ ($n\in\mathbb{Z}$, $0\le a_n\le p-1$)되어진다. 예를 들면, 정수가 아닌 양의 유리수 $x=b/a$, $((p,a)=(p,b)=1)$ 인 경우, $(p,a)=1$ 에 의해 $\{p\,|\,p \bmod a\}\in(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^{\times}$ 이다[3]. 따라서 만약 $\#\{(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^{\times}\}=n$ 이라 놓으면, $p^n\equiv 1\pmod a$ 이다. 따라서 $p^n-1=aa'$이 되는 $a'\in\mathbb{Z}$ 이 존재한다. 그리고
.

$$ba'=c(1-p^n)+d,\quad 0<d<p^n$$

이 되도록 $c,d\in\mathbb{Z}$ 를 잡으면 $d=d_0+d_1p+\cdots+d_{n-1}p^{n-1}$ $(0\le d_j\le p-1)$ 로 전개되고,

$$x=\frac{b}{a}=\frac{ba'}{aa'}=\frac{c(1-p^n)+d}{(1-p^n)}=c+d\sum_{m=0}^{\infty}(p^n)^m$$

이 된다. $x,d>0$ 이고 $1-p^n<0$ 이므로 $c\ge 0$, $c\in\mathbb{Z}$ 이다. 따라서

$$c=c_0+c_1p+\cdots+c_lp^l$$

로 표현될 수 있어, 결국

$$x=c_0+c_1p+\cdots+c_lp^l+(d_0+d_1p+\cdots+d_{n-1}p^{n-1})\sum_{m=0}^{\infty}(p^n)^m$$

으로 전개되고, 어떤 항 이후부터는 계수가 계속 같은 것으로 반복됨을 알 수 있다. 예를 들면, $p=5$, $x=\frac{2}{3}$이라면

$$\frac{2}{3}=1+\frac{8}{1-5^2}=1+(3+5)\sum_{m=0}^{\infty}5^{2m}=4+5+3\cdot 5^2+5^3+3\cdot 5^4+\cdots$$

로 전개된다. $x=\frac{b}{a}<0$ 일 때에도 자연수 l과 n 에 대하여

$$x=\left(p^l+\frac{b}{a}\right)+p^l\sum_{m=0}^{\infty}(p^n-1)(p^n)^m$$

인 것을 이용하여 위와 같은 모양으로 p-진 전개할 수 있고, 역시 어떤 항 이후부터

3) $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^{\times}$는 환 $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$의 단위원의 곱셈군이다.

는 계수가 같은 것으로 반복된다. 따라서, 유리수체 $\mathbb{Q}$에 p-진 절대값을 사용하면

$$\mathbb{Q}=\left\{\sum_{n=k}^{\infty}a_n p^n \mid k\in\mathbb{Z},\ 0\le a_k\le p-1,\ \{a_k\}\text{는 어떤 항 이후부터 반복됨}\right\}$$

이 된다. 만약 $\{a_k\}$가 어떤 항 이후부터 반복되지 않는다고 하자. $x_m=\sum_{n=k}^{m}a_n p^n\in\mathbb{Q}$ 이지만, m이 한없이 커지면 $\sum_{n=k}^{\infty}a_n p^n=a_k p^k+a_{k+1}p^{k+1}\cdots\not\in\mathbb{Q}$ 이다. 따라서 유리수체 $\mathbb{Q}$보다 더 크고, $\sum_{n=k}^{\infty}a_n p^n=a_k p^k+a_{k+1}p^{k+1}\cdots$을 포함하는 집합이 필요하다. 그러한 집합이 바로 $\mathbb{Q}_p$이다. 즉,

$$\mathbb{Q}_p=\left\{\sum_{n=k}^{\infty}a_n p^n \mid k\in\mathbb{Z},\ 0\le a_n\le p-1\right\}.$$

다른 예를 들자. 모든 정수 $n\ge 1$에 대하여 $\frac{p^n-1}{p-1}=1+p+p^2+\cdots+p^{n-1}$이기 때문에

$$-1=(p-1)+(p-1)p+\cdots+(p-1)p^{n-1}+p^n\times(-1)$$

이다. 따라서 $-1=(p-1)\sum_{n=0}^{\infty}p^n$을 얻는다.

집합 $\mathbb{Q}_p$가 덧셈의 교환법칙, 결합법칙, 항등원, 역원, 곱셈의 교환법칙, 결합법칙, 항등원, 역원 등을 만족하기 때문에 이 집합을 p-진 체(p-adic field)라 부른다. $x=\sum_{n=k}^{\infty}a_n p^n\in\mathbb{Q}_p$ $(0\le a_n\le p-1, a_k\ne 0)$에 대하여 $|x|_p=p^{-k}$라 하면 p-진 절대값은 $\mathbb{Q}_p$로 자연스럽게 확장될 수 있다([2] 참조).

2.2. p-진 정수환 $\mathbb{Z}_p$의 정의

집합 $\mathbb{Q}_p$의 가장 중요한 부분집합은

$$\mathbb{Z}_p=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n p^n \mid 0\le a_n\le p-1\right\}=\{x\in\mathbb{Q}_p \mid |x|_p\le 1\}$$

이다. 이것은 덧셈의 교환법칙, 결합법칙, 항등원, 역원, 곱셈의 교환법칙, 결합법칙, 항등원 등을 만족하기 때문에 가환환이고, p-진 정수환(the ring of p-adic integers)이라 부른다([2] 참조).

3. p-진 q-적분에 대한 고찰

3.1. 리만 적분의 정의

p-진 q-적분을 다루기 위해 먼저 잘 알려진 리만적분에 대해서 고찰해 보자. 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 리만적분가능일 때, 적분구간 $[a, b]$를 소구간 $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1,2,...,n)$로 분할하는 방법과 $x_{k-1} \le \epsilon_k \le x_k$인 ϵ_k를 택하는 방법에 관계없이 적분의 값이 정하여진다. 그러므로 리만적분의 값을 실제로 계산할 때는 편리하게 $[a, b]$를 n등분하여 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $\epsilon_k = x_k = a + k\Delta x$ $(k=1,2,...,n)$라고 두면, 함수 $f(x)$의 $[a, b]$에서의 리만적분은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\Delta x)\Delta x.$$

3.2. 잭슨의 q-미분과 q-적분의 정의

한편 $|q|<1$인 실수 q에 대하여 리만적분의 q-아날로그를 구성하기 위해 잭슨(Jackson)은 q-미분(q-derivative)을 다음과 같이 정의했다.

$$D_q f(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}, \quad x \ne 0;$$
$$D_q f(0) = f'(0).$$

q-미분은 $(\frac{\partial}{\partial x})_q f(x)$로도 표시되며 잭슨미분(Jackson derivative)이라고도 불린다([5]). 함수 $f(x)=x^n$의 q-미분은 $D_q x^n = [n]_q x^{n-1}$이 되고, q를 1로 접근시키면 일반적인 미분이 된다. 또 q-지수함수[4]의 정의로부터 다음 식이 도출된다.

$$D_q(e_q(\lambda x)) = \lambda e_q(\lambda x).$$

이는 q-미분의 정의로부터 다음 식이 성립하기 때문이다.

$$D_q\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n x^n}{[n]_q!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n x^{n-1}}{[n-1]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}x^n}{[n]_q!} = \lambda e_q(\lambda x).$$

4) q-지수함수(q-exponential) $e_q(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]_q!}.$$

여기서 $[n]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [n-1]_q[n]_q$이고, $[n]_q!$는 q-계승(q-factorial)이라고 불린다.

이것으로부터 q-적분(q-integral)은 다음과 같이 정의된다([15]).

$$\int_0^x f(t)\,d_q t = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} f(q^k x) q^k x,$$

$$\int_0^{\infty} f(t)\,d_q t = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} f(q^k) q^k.$$

여기서 x는 실수이고, 오른쪽 항은 절대수렴(absolute convergence)한다. q-적분은 잭슨적분(Jackson integral)이라고도 불린다. 특히, 함수 $f(x)=x^n$일 때, 다음 식을 얻게 된다.

$$\int_0^x t^n d_q t = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{(n+1)k} x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{[n+1]_q}.$$

위 적분으로부터 다음 식을 얻을 수 있다([4, 7] 참조).

$$\int_0^x D_q f(t)\,d_q t = \sum_{k=0}^{\infty} (f(q^k x) - f(q^{k+1} x)) = f(x).$$

3.3. 김의 p-진 q-적분의 정의

p-진 공간에서 리만적분 혹은 잭슨의 q-적분과 관련된 적분의 존재성 문제와 p-진 공간에서 울트라 적분의 존재 여부에 관한 문제가 남겨져 있었다. 지금부터 현재 다양하게 활용되고 있는 울트라개념의 p-진 q-적분을 소개하겠다.

p를 소수라 하고, 양의 정수 d가 p와 서로소라고 하자. 이 때 다음과 같이 몇몇 집합을 정의한다.

$$X = X_1 = \lim_{\overleftarrow{N}} \mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}, \; ,$$

$$X^* = \bigcup_{\substack{0<a<p \\ (a,p)=1}} a + p\mathbb{Z}_p,$$

$$a + p^N\mathbb{Z}_p = x \in X \mid x \equiv a \pmod{p^N}.$$

여기서 $a \in \mathbb{Z}$는 $0 \le a < p^N$이다. $\mathbb{C}_p$에서 p-진 절대값(p-adic absolute value)은 $|p|_p = \dfrac{1}{p}$에 의하여 정규화된다. $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$를 모든 연속함수 $f: \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$의 집합이라 하자. $U_1 \subseteq \mathbb{C}_p$을 중심이 1인 단위 개원반이라 하고

$$U_d = \{u \in \mathbb{C}_p \mid |u^d - 1|_p < 1\}, \quad U^m = U_d \times U_1^{m-1}$$

이라 두자. $C^{(1)}(\mathbb{Z}_p)$를 $\mathbb{Z}_p$ 위의 순 미분가능5) 함수의 집합이라고 할 때, $f \in C^{(1)}(\mathbb{Z}_p)$에 대하여 p-진 공간에서의 q-리만 합의 형태를 아래와 같이 생각할 수 있다.

$$\frac{1}{[p^N]_q}\sum_{j=0}^{p^N-1} q^j f(j) = \sum_{j-0}^{p^N-1} f(j)\,\mu_q(j+p^N\mathbb{Z}_p).$$

$\mathbb{Z}_p$ 위에서 함수 f의 적분이란, $N \to \infty$일 때 그 극한이 존재하면 이 합의 극한으로 정의한다. 다시 말하면, $f \in C^{(1)}(Z_p)$에서 p-진 q-적분은 다음과 같이 정의한다.

$$I_q(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_q(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{[p^N]_q}\sum_{0 \le j < p^N} f(j)q^j.$$

그러면 다음 식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\,d\mu_q(x)\right|_p \le p\|f\|_1.$$

여기서 $\|f\|_1 = \sup\{|f(0)|_p,\ \sup_{x\neq y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|_p\}$이다. 또한 $C^{(1)}(\mathbb{Z}_p)$에서 $f_n \to f$이면, 즉 $\| f_n - f \|_1 \to 0$이면

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f_n(x)\,d\mu_q(x) \to \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_q(x)$$

이다. 더욱이

$$\frac{1}{[p:q^{p^N}]}\sum_{i=0}^{p-1} q^{ip^N} = 1$$

이 된다. 임의의 $N > 0$에 대해 불변측도.

$$\mu_q(a+p^N\mathbb{Z}_p) = \frac{q^p}{[p^N]_q} = \frac{q^a}{[p^N:q]}$$

이라 두자. 이것은 다음과 같이 X 위의 초함수로 확장할 수 있다.

5) 함수 $f:\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$가 $x=a$에서 순 미분가능(strictly differentiable)이란 다음 극한이 존재할 때이다.

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}.$$

$$\mu_1(a+p^N\mathbb{Z}_p)=\frac{1}{p^N}$$

에 의해 정의된 통상의 p-진 초함수 μ_1에 대해

$$\lim_{q\to 1}\mu_q=\mu_1$$

이 성립한다. 뿐만 아니라 μ_q는 X 위의 초함수이다. 사실

$$\sum_{i=0}^{p-1}\mu_q(a+ip^N+p^{N+1}\mathbb{Z}_p)=\mu_q(a+p^N\mathbb{Z}_p)$$

을 보이면 된다. 한편

$$\sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{[p^{N+1}]_q}q^{a+ip^N}=\frac{1}{[p^{N+1}]_q}\sum_{i=0}^{p-1}q^{a+ip^N}=\frac{q^a}{[p^{N+1}]_q}\sum_{i=0}^{p-1}q^{ip^N}$$

이다. 또한

$$[p^{N+1}]_q=\frac{1-q^{p^{N+1}}}{1-q}=[p^N]_q[p:q^{p^N}]$$

이므로 이것을 직접 계산해 보면

$$\sum_{i=0}^{p-1}\mu_q(a+ip^N+p^{N+1}\mathbb{Z}_p)=\frac{q^a}{[p^{N+1}]_q}\sum_{i=0}^{p-1}q^{ip^N}=\frac{q^a}{[p^N]_q}=\mu_q(a+p^N\mathbb{Z}_p)$$

이 된다. $UD(\mathbb{Z}_p)$를 모든 평등 미분가능(uniformly differentiable) 함수의 집합이라 하면 $C^{(1)}(\mathbb{Z}_p)\subseteq UD(\mathbb{Z}_p)$이고 $UD(\mathbb{Z}_p)$에서 $f_n\to f$일 때

$$\int_{\mathbb{Z}_p}f_n(x)\,d\mu_q(x)\to\int_{\mathbb{Z}_p}f(x)d\mu_q(x)$$

이 된다. 더욱이 $f\in UD(\mathbb{Z}_p)$에 대하여 $f_1(x)=f(x+1)$이면, 다음과 같은 중요한 항등식이 성립한다.

$$I_1(f_1)=I_1(f)+f'(0).$$

$q=1$일 때 $f\in UD(\mathbb{Z}_p)$에 대해 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{\mathbb{Z}_p}f(x)\,d\mu_1(x)=\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\mathbb{Z}_p}f(j+mx)\mu_1(x).$$

이 초함수는 $d=1$인 경우에 음이 아닌 정수 m에 대해 다음 적분이 유도된다.

$$\int_{\mathbb{Z}_p}[a]^m d\mu_q(a)=\lim_{N\to\infty}\sum_{a=0}^{p^N-1}[a]^m\frac{q^a}{[p^N]}=I_q([a]^m).$$

$f\in UD(\mathbb{Z}_p,\ \mathbb{C}_p)$에 대하여

$$\int_{\mathbb{Z}_p}f(x)d\mu_1(x)=\int_{X_1}f(x)d\mu_1(x)$$

이다. 여기에서 귀납법에 의해 다음의 적분에 관한 항등식을 유도할 수 있다.

$$I_1(f_b)=I_1(f)+\sum_{j=0}^{b-1}f'(j).$$

여기서 $f_b(x)=f(x+b)$, $b\in\mathbb{Z}^{\times}$6)이다([10, 11, 12, 13] 참조).

4. $q=-1$에서 q-적분과 관련된 오일러수의 아날로그

4.1. p-진 q-적분의 페르미오닉 표현과 관련된 λ-오일러 수

p를 고정된 홀수인 소수라 하고 q-변형된(deformed) 페르마의 확실한 소멸연산자에 관해 $q\in(-1,0)$인 경우를 생각해 볼 수 있다. $I_q(f)$의 표현은 여전히 같고, 그래서 $q\to-1$일 때를 생각해 보게 한다. 대응되는 확실한 소멸 연산자가 불변형된 페르미 입자의 연산자이기 때문에 이 극한을 페르미오닉(fermionic)이라 부른다.

이제 q-변형된 페르미오닉 의미의 확실한 소멸 연산자에 관해 $q\in[-1,0]$인 경우를 생각해 보자. $I_q(f)$의 표현은 여전히 같고, 그래서 $q\to-1$일 때를 생각해 보자. 즉,

$$I_{q=-1}(f)=\lim_{q\to-1}I_q(f)=\int_{\mathbb{Z}_p}f(x)d\mu_{-1}(x).$$

따라서

$$\int_{\mathbb{Z}_p}e^{tx}\lambda^x d\mu_{q=-1}(x)=\frac{2}{\lambda e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(\lambda)\frac{t^n}{n!}$$

를 갖게 되고, 여기서 $E_n(\lambda)$는 λ-오일러수라 불린다. 이 수들은 수론에서 전통적이고 중요하다([14]참조).

4.2. p-진 q-적분의 페르미오닉 의미를 활용한 삼각함수의 적분

이 논문에서 우리는 p-진 q-적분의 페르미오닉 의미를 활용하면 λ-오일러 다항식과 수를 연구하는데 유용하다.

6) $\mathbb{Z}^{\times}$는 환 $\mathbb{Z}$에서의 영이 아닌 정수들의 곱셈군이다.

$f \in C^{(1)}(\mathbb{Z}_p)$라 하자. 이때 $\mathbb{Z}_p$ 상에서 다음과 같은 p-진 적분에 대한 페르미오닉 적분이 유도된다.

$$I_{-1}(f) = I_{q=-1}(f) = \lim_{q \to -1} I_q(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\mu_{-1}(x).$$

함수 $f_1(x)$를 $f_1(x) = f(x+1)$로 정의하면

$$I_{-1}(f_1) = -\lim_{N \to \infty} \sum_{x=0}^{p^N-1} f(x)(-1)^x + 2f(0) = -I_{-1}(f) + 2f(0)$$

이다. 따라서 $f \in C^{(1)}(\mathbb{Z}_p)$일 때, 다음 페르미오닉 적분방정식을 얻게 된다.

$$I_{-1}(f_1) + I_{-1}(f) = 2f(0)$$

이것으로부터 $f \in C^{(1)}(\mathbb{Z}_p)$이고 $n \in \mathbb{N}$일 때, $f_n(x) = f(x+n)$이라고 놓으면, 반복법에 의하여 아래 공식을 얻는다.

$$I_{-1}(f_n) + (-1)^{n-1} I_{-1}(f) = 2\sum_{x=0}^{n-1} (-1)^{n-1-x} f(x).$$

페르미오닉 적분에서 가장 흥미로운 결과는 아래 삼각함수의 적분들이다.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos ax d\mu_{-1}(x) = 1, \quad \int_{\mathbb{Z}_p} \sin ax d\mu_{-1}(x) = -\frac{\sin a}{\cos a + 1}.$$

즉,

$$\tan\frac{a}{2} = -\int_{\mathbb{Z}_p} \sin ax d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{2n+1}}{(2n+1)!} E_{2n+1}.$$

이다([14]참조).

4.3. p-진 q-이동 연산자

p-진 q-이동 연산자를 생각해보자. 기본적으로 q-수는 $[x]_q = \frac{1-q^x}{1-q}$ 와 $[x]_{-q} = \frac{1-(-q)^x}{1+q}$ 로 정의한다. p-진 q-적분에 의한 오일러 다항식의 q-확장을 다음과 같이 구성하였다.

$$E_n(x:q) = \int_{\mathbb{Z}_p} [t+x]_q^n d\mu_{-q}(t), \quad (x \in Z_+).$$

수학적으로, 이동 연산자[7]는 반복함수[8]에 대한 정보를 부호화한다. 그리고 다이나미

7) 이동 연산자는 때때로 David Ruelle 이후로 Ruelle 연산 또는 Ruelle-Perron-Frobenious 연산자라고도 한다.
8) 지금까지 연구해 온 반복함수는 임의의 집합 X에 대하여 함수 f가 X에서 X로의 함수이다.

컬 시스템의 가동연구, 통계역학, 퀀텀 카오스 그리고 프랙탈 연구등에 유용하게 쓰인다. 이동 연산자는 연산자 L이 함수 $\phi: X \to C$ 위로 다음과 같이 작용하는 것으로 정의한다.

$$(L\phi)(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} g(y)\phi(y)$$

여기서 $\phi: X \to C$ 는 보조치 함수이다. 함수 $g:[0,1] \to [0,1]$로 생각하자.

상기 오일러 다항식의 $q-$확장 $E_m(x:q)$으로부터, 다음을 유도할 수 있다.

$$E_m(x:q) = \frac{[d]_q^k}{[d]_{-q}} \sum_{i=0}^{d-1} (-q)^i \int_{\mathbb{Z}_p} [\frac{x+i}{d} + t]_{q^d}^k d\mu_{-q^d}(t).$$

이제, $p-$진 $q-$불변 연산자 $L_{p,q}f$를 다음과 같이 정의한다.

$$(L_{p,q}f)(x:q) = \frac{1}{[p]_{-q}} \sum_{k=0}^{p-1} (-q)^k f\left(\frac{x+i}{p} : q^p\right),$$

여기서 $f(x:q) = \int_{\mathbb{Z}_p} [t+x]_q^n d\mu_{-q}(t)$, $(x \in Z_+)$. 만약 $f(x:q) = E_n(x:q)$로 두면, 다음을 얻는다([6]참조).

$$(L_{p,q}E_n)(x:q) = \frac{1}{[p]_q^n} E_n(x:q).$$ [9]

4.4. $\mathbb{Z}_p$ 위에서의 페르미오닉 $p-$진 적분의 푸리에 변환

$f \in UD(\mathbb{Z}_p)$에 대하여, $\mathbb{Z}_p$ 위의 페르미오닉 $p-$진 불변적분은 다음과 같다.

$$I_{-1}(f) = \int_{Z_p} f(x) d\mu_{-1}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{[p^n]_q} \sum_{x=0}^{p^n-1} f(x)(-1)^x$$

$\mathbb{C}_{p^n}$을 임의의 $n \geq 0$에 대하여 $\mathbb{C}_p$상에서 단위원의 모든 p^n-번째 근호를 포함하는 순환군이라 하고 T_p는 자연사상에 의한 $\mathbb{C}_{p^n}$의 귀납적 극한이다. 따라서, T_p는 직 위

9) 이를 구체적으로 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(L_{p,q}E_n)(x:q) &= \frac{1}{[p]_{-q}} \sum_{k=0}^{p-1} (-q)^k E_n\left(\frac{x+k}{p} : q^p\right) \\ &= \frac{1}{[p]_q^n} \left(\frac{[p]_q^n}{[p]_{-q}} \sum_{k=0}^{p-1} (-q)^k E_n\left(\frac{x+k}{p} : q^p\right)\right) \\ &= \frac{1}{[p]_q^n} \left(\frac{[p]_q^n}{[p]_{-q}} \sum_{k=0}^{p-1} (-q)^k \int_{\mathbb{Z}_p} \left[\frac{x+k}{p} + t\right]_{q^p}^n d\mu_{-q^p}(t)\right).\end{aligned}$$

구해진 식을 다시 설명하면, $p-$진 $q-$불변 연산자의 고유벡터들은 $q-$오일러 다항식들이고, 이에 대한 고유값은 $\frac{1}{[p]_q^n}$ 임을 의미한다.

상(direct topology)을 포함하는 모든 $\mathbb{C}_p$의 합집합이다. U_p는 $\mathbb{C}_p$ 상의 모든 주 단위(principal units)의 군으로 표기한다[10]. 모든 $\alpha \in T_p$(또는 U_p)에 대하여 함수 $\phi_\alpha : Z_p \to (\mathbb{C}_p^\times, X)$, $\phi_\alpha(z) = \alpha^z$로 정의한다[11]. 만약 $\alpha \in T_p$이면 $\phi_\alpha(z)$는 국소 상수 함수이다. 만일 $\alpha \in U_p$이면, $\phi_\alpha(t)$는 $\mathbb{C}_p$상의 국소 해석 함수이다. 여기서 $\sum_\omega$는 $\lim_{n\to\infty} \sum_{\omega \in \mathbb{C}_{p^n}}$을 의미한다. $\mathbb{Z}_p$ 위의 페르미오닉 $p-$진 불변 적분의 푸리에 변환은 다음과 같다. 모든 $\omega \in T_p$에 대하여,

$$\widehat{f_{\omega_{-1}}} = I_{-1}(f\phi_\omega) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\omega^x d\mu_{-1}(x)$$

이다. $C(\mathbb{Z}_p)$와 $Lip(\mathbb{Z}_p)$을 각 각 $\mathbb{Z}_p$위에서의 연속함수들의 공간과 Lipschitz 함수의 공간이라 하자. 집합 U 을 U_p의 공집합이 아닌 열린 부분집합이라 하자.

한편, 다음 식이 성립한다. 그러면, $\{\phi_\alpha \mid \alpha \in U_p\}$은 $C(\mathbb{Z}_p)$과 $UD(\mathbb{Z}_p)$에서 조밀한 선형 부분공간을 생성한다. 그리고 , 다음을 알 수 있다.

$$\lim_{\beta\to\alpha} \frac{\phi_\beta(z) - \phi_\alpha(z)}{\beta - \alpha} = \frac{z}{\alpha}\phi_\alpha(z), \quad \alpha \in U.$$

$x \in \mathbb{Z}_p$에 대하여 $\chi_{x,n} = char(x + p^n\mathbb{Z}_p)$, $n \ge 0$[12]을 특성함수라 하자. 그러면

$$I_1(\,char(\mathbb{Z}_p)) = \int_{\mathbb{Z}_p} d\mu_{-1}(x) = 1$$

이고

$$I_{-1}(char(x + p^n\mathbb{Z}_n)) = I_{-1}(\chi_{x,n}) = \int_{a+p^n\mathbb{Z}_p} d\mu_{-1}(x) = (-1)^a$$

이다. 또한, 다음의 사실도 쉽게 보여 진다.

$$\sum_\omega \omega^{-x}\phi_\omega = \sum_{i=0}^{p^n-1} \omega^{-\xi}\omega^i = \sum_{i=0}^{p^n-1} \omega^{i(1-x)} = p^n\chi_{x,n}.$$

따라서, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\chi_{x,n} = \frac{1}{p^n}\sum_\omega \omega^{-x}\phi_{\omega^\cdot}\ ,$$

10) 여기서 $T_p \subset U_p$이다.

11) $\mathbb{C}_p^\times$는 $\mathbb{C}_p$에 속하는 p-진 수의 곱셈군이다.

12) $\chi_{x,n}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \in x + p^n\mathbb{Z}_p \\ 0 & \text{if } s \notin x + p^n\mathbb{Z}_p \end{cases}$

$$\begin{aligned} I_{-1}(f\chi_{x,n}) - \frac{f(x)}{p^n} &= I_{-1}\Big(f\frac{1}{p^n}\sum_{\omega}\omega^{-x}\phi_{\omega}\Big) - \frac{f(x)}{p^n} \\ &= \frac{1}{p^n}\sum_{\omega} I_{-1}(f\phi_{\omega})\phi_{\omega^{-1}}(x) - \frac{f(x)}{p^n} \\ &= \frac{1}{p^n}\Big(\sum_{\omega}(\widehat{f_{\omega}})_{-1}\phi_{\omega^{-1}}(x) - f\Big). \end{aligned}$$

이때, 다음 식을 유도할 수 있다. 임의의 상수 M에 대하여,

$$\Big|\sum_{\omega}(\widehat{f_{\omega}})_{-1}\phi_{\omega^{-1}}(x) - f\Big|_p \le M\frac{1}{p^n}.$$

따라서 다음을 보일 수 있다.

$$\sum_{\omega}(\widehat{f_{\omega}})_{-1}\phi_{\omega^{-1}}(x) = f\ .$$

$f, g \in UD(\mathbb{Z}_p)$라 하자. 그러면 우리는 다음 식에 의한 I_{-1}-적분과 결합된 합성곱을 다음과 같이 정의한다.

$$(f * g)_{-1} = \sum_{\omega}(\widehat{f_{\omega}})_{-1}(\widehat{g_{\omega}})_{-1}\phi_{\omega^{-1}}\ .$$

다음을 쉽게 보일 수 있다.

$$(f * g)_{-1} \in Lip(\mathbb{Z}_p)\ .$$

우리는 이항함수(연속계)를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$* : UD(\mathbb{Z}_p)\times UD(\mathbb{Z}_p), \qquad (f,g)\mapsto (f*g)_{-1}.$$

한편, $UD(\mathbb{Z}_p)$는 $Lip(\mathbb{Z}_p)$에서 닫혀있고 I_{-1}는 연속함수이다. $\{\phi_{\alpha} \mid \alpha \in U_p\}$는 $C(\mathbb{Z}_p), UD(\mathbb{Z}_p)$에서 조밀한 선형생성을 가진다. $\alpha, \beta \in U_p \setminus T_p$, $(\alpha \ne \beta)$에 대하여 $f = \phi_{\alpha}$, $g = \phi_{\beta}$라 하자. I_{-1}-적분 정의로부터, 다음을 유추할 수 있다.

$$I_{-1}(f_1) + I_{-1}(f) = 2f(0).$$

여기서 $f_1(x) = f(x+1)$이다. 이것을 이용하면 다음 식을 쉽게 얻을 수 있다.

$$(\widehat{f_{\omega}})_{-1} = I_{-1}(f\phi_{\omega}) = \frac{2}{\alpha\omega+1},\ (\widehat{g_{\omega}})_{-1} = I_{-1}(g\phi_{\omega}) = \frac{2}{\beta\omega+1},\quad \omega \in T_p.$$

이것으로부터 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} (f * g)_{-1} &= \sum_{\omega}(\widehat{f_{\omega}})_{-1}(\widehat{g_{\omega}})_{-1}\phi_{\omega^{-1}} \\ &= \sum_{\omega}\frac{4}{(\alpha\omega+1)(\beta\omega+1)}\phi_{\omega^{-1}} \\ &= \frac{2}{\beta-\alpha}(\alpha f - \beta g) \in UD(\mathbb{Z}_p). \end{aligned}$$

$((\widehat{f * g})_{\omega})_{-1} = I_{-1}((f*g)_{-1}\phi_{\omega^{-1}})$라 하자. 그러면, $\omega \in T_p$에 대하여, 다음이 성립한다([14] 참조).

$$((\widehat{f * g})_{\omega})_{-1} = -(\widehat{f_{\omega}})_{-1}(\widehat{g_{\omega}})_{-1}$$[13].

5. 결론

크레니코프([8, 9])는 p-진 수 상에서 정의된 함수의 연속성과 미적분을 구체적으로 계산하였으며, 블라디미로프([16])는 수리물리학에 응용되는 불변측도의 개념을 정의하고 p-진 노름에 의한 미적분의 성질들을 조사함으로서 p-진 해석학의 초석을 다졌다. 이를 토대로 p-진 양자역학으로의 응용을 개척할 수 있게 되었다.

최근에 많은 연구자들이 p-진 해석학 분야로서 보소닉 p-진 q-적분과 관련된 다양한 오일러 및 베르누이 정식 등의 q-아날로그에 관한 조사, 페르미온닉 p-진 q-적분의 관련된 변환 연산자, 전달 연산자, 푸리에변환 등 p-진 해석학적 의미와 성질들에 관한 연구가 진행되어 왔다([3, 4, 6, 15] 참조). 본 논문은 이와 관련된 p-진 q-적분의 변천사를 테마별로 고찰하였다.

특히, p-진 해석학적 성질과 밀접한 관련이 있는 다양한 변환, 연산자, 급수와 더불어 다양한 오일러 혹은 베르누이 정식의 q-아날로그 연구 및 와이어스트라스 정리의 q-아날로그 연구 등이 이 분야 미래 연구 주제가 될 것이다. 또한, 본 논문에서 소개된 p-진 해석학적 성질들의 q-아날로그 연구하는 국내 학자들에게 아이디어를 제공하고, p-진 q-양자역학 등과 관련된 과학 및 공학적인 분야에서 수학적 이론 연구를 활성화시킬 것으로 기대된다.

13) 구체적으로 계산하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
((\widehat{f \ast g})_{\omega})_{-1} &= I_{-1}\left(\frac{2}{\beta-\alpha}(\alpha f-\beta g)\phi_{\omega^{-1}}\right) \\
&= \frac{2}{\beta-\alpha}\left(\alpha(\widehat{f_{\omega}})_{-1}-\beta(\widehat{g_{\omega}})_{-1}\right) \\
&= \frac{2}{\beta-\alpha}\frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha\omega+1)(\beta\omega+1)} \\
&= -\left(\frac{2}{\alpha\omega+1}\right)\left(\frac{2}{\beta\omega+1}\right) \\
&= -(\widehat{f_{\omega}})_{-1}(\widehat{g_{\omega}})_{-1}.
\end{aligned}$$

참고문헌

1. 김태균, 박달원, 박홍경, 임석훈, 유천성, 장이채, 정인철, *비 아르키메디언 해석입문,* 교우사, 2004.
2. 김태균, 장이채, 임석훈, 박순철, 석정영, 최준용, 유천성, *비 아르키메디언 적분과 그 응용,* 교우사, 2007.
3. 김태균, 장이채, 임석훈, 박홍경, 유천성, 김영희, 김민수, 석정영, 김원주, 박경호, 황경원, *p-진 함수해석학과 그 응용,* 교우사, 2009.
4. A. Fitouhi and N. Bettaibi, *Applications of the Mellin transform in quantum calculus*, Journal of Math. Anal. and Appl. 328, pp. 518-532, 2007.
5. F.H. Jackson, *On q-definite integrals*, Quart. J. Pure and Appl. Math. 41, pp. 193-203, 1910.
6. L.C. jang, T. Kim and S.H. Kim, *A note on the p-adic q-transfer operator*, Journal of Comp. Anal. and Appl. 11(2),pp. 210-214, 2009.
7. V. Kac, P. Cheung, *Quantum calculus*, Universitext, Springer-Verlag, 2002.
8. A. Khrennikov, *Non-Archimedean Analysis : quantum paradoxes, dynamical systems and biological models*, Klumer, 1997.
9. A. Khrennikov, *p-adic valued distributions in mathematical physics*, Klumer, 1994.
10. T. Kim, *On explicit formulas of p-adic q-L-functions*, Kyushu J. Math., 48(1), pp. 78-86, 1994.
11. T. Kim, *On a q-analogue of the p-adic log gamma functions and related integrals*, J. Number Theory 76(2), pp. 320-329, 1999.
12. T. Kim, L.C. Jang and H.K. Pak, *A note on q-Euler numbers and Genocchi numbers*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 77, pp. 139-141, 2001.
13. T. Kim, *Sums of powers of consecutive q-integers*. Adv. Stud. Contemp. Math. 1, pp. 15-18, 2004.
14. T. Kim, *On the analogs of Euler numbers and polynomials associated with p-adic q-integral on $\mathbb{Z}_p$ at $q=-1$*, Journal of Math. Anal. and Appl., 331(2), pp.779-792, 2007.
15. T. Kim, *A note on the Fourier transform of p-adic q-integrals on $\mathbb{Z}_p$*, Journal of Comp. Anal. and Appl. 11(1), pp.81-85, 2009.
16. V.S. Vladimirov, I.V. Volovich and E.I. Zelonov, *p-adic analysis and mathematical physics*, River Edge: World Scientific, 1994.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 22 No. 4 (Nov. 2009), 145 -160

On the historical investigation of p-adic invariant q-integral on $\mathbb{Z}_p$

Dept. of Math. and Comp. Sci., Konkuk Universith, **LeeChae Jang**
Dept. of Math. Edu., Hannam University, **Jong-Jin Seo**
Division of Gen. Education-Math., Kwangwoon University, **Taekyun Kim**

In the end of 20th century, the concept of p-adic invariant q-integral was introduced by Taekyun Kim. The p-adic invariant q-integral is the extension of Jackson's q-integral on complex space. It is also considered as the answer of the question whether the ultra non-archimedian integral exists or not. In this paper, we investigate the background of historical mathematics for the p-adic invariant q-integral on Z_p and the trend of the research in this field at present.

Key words: p-adic invariant q-integral, Jackson's q-integral, non-archimedian integral
2000 Mathematics Subject Classification: 11B68, 11S80

ZDM Subject Classification: F1, F6

접수일: 2009년 8월 25일　　수정일 : 2009년 10월 25일　　게재확정일: 2009년 10월 25일