한국수학사학회지 제22권 제4호(2009년 11월), 129 – 144

19세기 대수학 및 논리학 발달에서의 드모르간의 위상

중흥중학교 **최지선***
everii@hanmail.net

한국교육과정평가원 **박선용**
polya@kice.re.kr

서울대학교 대학원 **김재홍**
masshong@hanmail.net

경인교육대학교 **권석일**
steinein@ginue.ac.kr

경인교육대학교 **박교식**
pkspark@ginue.ac.kr

이 연구의 목적은 19세기 대수와 논리 분야에서 드모르간이 구체적으로 어떻게 기여했는지를 살펴보는 것이다. 19세기 대수 분야 발달과정에서 드모르간은, 산술에서 단순히 유추한 형태의 기호대수를 넘어서, 형식으로부터 구성하는 수학의 가능성을 인식하고 이를 명시적으로 나타내어 추상대수학으로 나아갈 수 있는 기초를 닦았다. 드모르간은 19세기 논리학 분야 발달과정에서 아리스토텔레스 논리학의 재구성자인 동시에 수학적 논리학의 창시자로 간주할 수 있다. 그의 연구로 논리학이 철학에서 분리되어 나와 수학과 더욱 긴밀하게 결합하게 되어 수학적 논리학이 하나의 독립적 학문으로 자리 잡게 되었다. 그의 연구 활동을 통하여 우리는 19세기 수학의 발달에서 대수학과 논리학이 현재의 상태로 진화하여 가는 모습을 좀 더 명확하게 알 수 있다.

주제어: 드모르간, 대수학, 논리학, 추상대수학

* 교신저자

0. 서론

영국의 수학자 드모르간(Augustus De Morgan, 1806-1871)은 오늘날 그의 이름이 들어가 있는 '드모르간의 법칙'으로 잘 알려져 있는 바, 그것은 집합론과 논리학의 기본법칙이다. 그는 '수학적 귀납법'이라는 용어를 만들고 정의했을 뿐만 아니라, 그 방법을 명료화하는데도 기여하였다([30]). 그의 이름은 4색문제*와 관련해서도 등장한다. 1852년에 드모르간의 학생이었던 거스리(Francis Guthrie, 1831-1899)가 그에게 처음으로 4색 문제를 거론함으로써, 수학계에서 4색문제에 관한 논의가 본격적으로 이루어지게 되었다([31]). 그러나 수학계에서 드모르간의 기여가 이런 정도에 그치는 것은 아니다.

드모르간은 16세에 케임브리지의 트리니티 대학에 입학하여 당대의 유명한 수학자 피콕(George Peacock, 1791-1858)과 논리학자 휴웰(William Whewell, 1794-1866)로부터 각각 대수학과 논리학을 배우게 된다([13], [18], [25]). 드모르간은 피콕이 촉발한 기호대수학을 발전시켰다. 기호대수에 대한 해밀턴 경(Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865)과 휴웰의 비판에 영향을 받은 드모르간은 대수를 이중대수로 즉, 복소수로 확장하는 것을 시도하였다. 또, 이중대수를 삼차원 즉, 삼중대수로 확장하는 것을 시도하였다. 드모르간의 이러한 연구는 해밀턴 경의 4원수 발견에 영향을 미쳤다([10, pp.112-113], [21], [24], [27], [30]).

'술어의 양화**'에 대한 해밀턴(William Stirling Hamilton, 1788-1856)***과의 논쟁은 드모르간에게 형식논리를 개발할 기회를 제공하였고([2], [4, p.331], [21]), 그 결과 드모르간은 형식논리의 의미를 명확히 하게 되었다. 드모르간은 이러한 연구를 바탕으로 아리스토텔레스 논리학을 개혁하여 순수하고 형식적인 관계논리를 명시적으로 도입하였다. 그의 연구는 불(George Boole, 1815-1864) 대수의 발달에도 영향을 미쳤다([10], [16], [21], [30]).

드모르간은 해밀턴 경, 휴웰, 해밀턴뿐만 아니라, 프렌드(William Frend, 1757-1841), 불 등과의 교류를 통해 대수학과 논리학을 깊이 연구하여 대수학이 현대적인 체계를 갖추고, 논리학과 수학이 통합되는 과정에서 큰 역할을 하였다. 이런 업적으로 드모르간은 오늘날 기호대수학의 창시자 중의 한 사람으로 간주되고 있고([18], [24], [26],

---

* 4색 문제는 지도를 인접한 영역들이 구별되도록 서로 다른 색으로 칠하기 위한 색깔의 수가 4개로 충분한가에 관한 문제이다. 이 문제는 1976년 Kenneth Appel(1932-현재)과 Wolfgang Haken(1928-현재)에 의해서 증명되었으므로 지금은 "4색정리"라고 불린다([32]).

** 술어((述語, predicate)를 기호로 나타냄으로써 명제를 술어와 주어 사이의 식으로 표현하는 것으로 본고의 '3절'에서 자세히 기술한다.

*** 이 논문에서는 두 명의 해밀턴이 등장한다. 한 명은 4원수를 발견한 해밀턴(Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865)이고, 다른 한 명은 '술어의 양화'를 두고 드모르간과 논쟁한 해밀턴(William Stirling Hamilton, 1788-1856)이다. 공교롭게도 두 해밀턴이 동시대 사람이고, 더욱이 중간 이름을 무시하면 William Hamilton으로 같은 이름을 가지고 있다. 이 연구에서는 전자는 해밀턴 경으로, 후자는 해밀턴으로 구분한다.

[27]), 또한 현대논리학의 창시자로도 간주되고 있다([25]). 이 연구의 목적은 바로 이 두 분야에서 드모르간이 구체적으로 어떻게 기여했는지 그 족적을 추적하는 것이다. 그의 연구 활동을 좇아가다보면 대수학과 논리학이 현재의 상태로 진화하여 가는 모습을 살펴볼 수 있다.

1. 드모르간의 연구 연대기

드모르간의 학문적 터전은 그가 1828년에 수학과 창립 교수로 임용되었던 런던대학이다. 그는 1831년에 어떤 해부학 교수의 부당한 해고에 항의하여 사임하였지만, 자신의 후임자가 갑작스런 사고로 사망하는 바람에 복귀하여 1866년까지 30년간 재직하였다([13], [25]). 드모르간은 수학뿐 아니라 수학교육에도 관심을 갖고 일찍부터 산술과 기하, 대수, 미적분 등의 교재를 집필하였다([21]). 그가 집필한 교재로 백과사전식 전개를 탈피하여 이론적으로 산술을 다룬 《Elements of arithmetic》(1830), 산술, 대수, 기하에서의 초보 학습자들을 위한 《On the study and difficulties of mathematics》(1831), 《Elements of algebra》(1835), 극한 개념을 사용하여 함수 $f(x)$의 연속성을 현대적 관점에서 정의한 《Elements of algebra: preliminary to the differential calculus》(1835/1837) 등이 있다([5, p.213], [7], [8], [13]). 값싼 가격의 쉬운 교재를 통해 일반인의 교육을 장려하는 것을 목적으로 한 단체인 SDUK(Society for the Diffusion of Useful Knowledge)의 회원이었던 드모르간은 이 단체의 저널 《The Quarterly Journal of Education》에 수학교육과 관련된 30여 편의 글을 실었다([21], [27]).

드모르간은 수학교육에 대한 관심을 유지하면서 동시에 대수학과 논리학 연구를 진행하였다. 특히 대수학 연구의 결과는 그의 저작에 충실히 반영되어 있다([1]). 그의 대수학 연구는 당대의 수학자들과의 교류를 통하여 이루어졌다. 음수와 복소수에 대한 연구는 그가 대학에서의 수학교육에 대해 숙고하는 과정에서 이루어진 것이기도 하지만, 한편으로는 1828년 이후 그와 교류했던 프렌드에 의해 자극을 받은 결과이기도 했다. 드모르간과 프렌드는 음수와 대수의 본질에 대해 1820년대 후반부터 1830년대 초반까지 논쟁하였다([23], [24]). 대수학 연구에서 드모르간에게 결정적인 영향을 미친 수학자는 드모르간과 함께 영국의 기호대수학을 대표하는 수학자로 평가받는 피콕이다. 그레고리(Duncan Farquharson Gregory, 1813-1844)도 드모르간에게 많은 영향을 미쳤다. 드모르간, 피콕, 그리고 그레고리는 공동연구를 통해 1830년대부터 1850년대까지 대수에서의 기호적 접근에 대한 그들의 아이디어를 발표하였다([2], [23]).

피콕이 대수에서의 기호적 접근을 위해 《Treatise of algebra》(1830)를 집필하였을 때, 드모르간은 기호대수를 의미가 없는 대수로 여겨 처음에는 그것을 받아들이지 않았지만, 대수학에서 의미와 내용보다 수학적 방법으로서의 연역을 중시하게 되면서 그것을 점차적으로 수용하였다([24]). 드모르간은 1830년대 후반에 해밀턴 경과 휴웰

이 철학적, 교육적 관점에서 기호대수를 비판하는 것에 영향을 받아 기호대수에 의미를 부여하는 방법으로 기호대수를 구성하게 되었다. 그 결과는 1839년부터 1844년 사이에 네 편의 논문으로 나온 〈On the foundations of algebra〉이다. 《Trigonometry and double algebra》(1849)(이하 간단히 TDA)는 이 논문들을 바탕으로 집필되었다. 드모르간은 TDA에서 대수를 이중대수로 형식화하였다. 또한 그는 해밀턴 경과 휴웰과의 교류를 통해 이중대수를 삼차원으로 즉, 삼중대수로 확장하는 것을 시도하였으며, 그 결과로 〈On triple algebra〉(1849)를 출판하였다. 이러한 연구들은 해밀턴 경의 4원수 발견에 영향을 미치기도 하였다([10, pp.112-113], [21], [24], [27], [30]).

수학교육에 대한 드모르간의 관심은 논리학 연구에도 영향을 미쳤다. 드모르간은 《On the study and difficulties of mathematics》에서 논리를 기하 학습의 기본 도구로 간주하였고, 1835년에 《The Quarterly Journal of Education》에 투고한 〈A treatise on algebra〉에서 피콕의 《Treatise of algebra》를 개관하며 기하뿐만 아니라 대수학과 논리학 사이의 관계를 언급하였다. 드모르간은 수학교육 측면에서 논리학에 관심을 가지면서 1839년에 기하를 공부하는 학생들을 위한 논리학 교재인 《First notion of logic》을 집필하였다([21]). 이후 드모르간은 아리스토텔레스식의 삼단 논법 체계를 확장한 〈On the syllogism I〉(1846), 〈On the syllogism II〉(1850), 〈On the syllogism III〉(1858), 〈On the syllogism IV〉(1860) 및 대수적 논리학 발전에 신기원을 연 《Formal logic》(1847)을 집필하였다.

드모르간은 술어의 양화에 대하여 그와 유사한 생각을 하고 있던 해밀턴과 서신으로 교류하였는데, 그와의 논쟁이 드모르간에게 형식논리를 개발할 기회를 제공하였다([2], [4, p.331], [21]). 1858년의 논문 〈On the syllogism III〉에서는 계사(繫辭, copula)*가 추상화, 일반화되었으며, 1847년에 집필한 《Formal logic》의 명칭이었던 '형식논리'의 의미가 명확해졌다. 그는 이러한 연구를 바탕으로 〈On the syllogism IV〉에서 자신의 중요 업적이라고 할 수 있는 순수하고 형식적인 관계논리를 다루었다([21]).

드모르간의 연구는 불 대수의 발달에도 영향을 미쳤다. 논리학자이자 수학자인 불과의 교류는 불이 미적분에 관한 자신의 생각을 담은 편지를 1842년에 드모르간에게 보냄으로써 시작되었다. 불은 드모르간의 〈On the syllogism I〉의 영향을 받아 1847년에 《The mathematical analysis of logic》을 집필하였고, 1848년에는 〈Calculus of Logic〉을 《Cambridge and Dublin Mathematical Journal》에 투고하였다. 이후 불은 이 논문에 담긴 원리를 발전시켜 오늘날 불 대수라고 일컫는 논리 체계가 담긴 《An investigation into the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities》(1854)를 집필하였다([10, pp.165-168], [16], [29], [30]).

---

* 계사는 문장의 주어와 술어를 연결해주는 단어이다([33]).

2. 대수학 분야에서의 드모르간의 업적

드모르간은 추상대수학 발달의 초기창시자 중의 한 사람으로([24]), 기호의 의미를 제거하고 형식을 기반으로 구성되는 대수의 원형을 제시하였다([17]). 드모르간은 TDA에서 기호대수를 소개하면서 "기호의 의미를 버리면서, 그 기호를 묘사하는 단어의 의미도 버린다. 이제 덧셈은 의미 없는 어음(語音)이 된다([9, p.101])."고 말하였다. 또, 기호대수에서 A, B, C와 같은 문자가 미덕과 악덕을 의미할 수 있다고 하여, 기호의 의미와 형식을 분리할 수 있음을 분명히 하였다. 의미와 형식을 분리함으로써, 드모르간은 산술에서 성립하는 연산 규칙이 대수에서 그대로 성립할 필요가 없고 오히려 잘 구성된 공리 집합에 근거해서 대수를 구성할 수 있음을 인식하였다([27]). 드모르간은 1842년 〈On the foundations of algebra, No.Ⅱ〉에서 기본 대수 기호의 목록과 대수 법칙의 목록을 제시하였다([11, 재인용]). 이 목록을 간략히 제시하면 다음과 같다.*

1. 대수의 기본 기호는 0, 1, +, −, ×, ÷, $(\ )^{(\ )}$, 그리고 문자(letters)이다.
2. +, −는 항-기호(term-signs)이고, ×, ÷는 인수-기호(factor-signs)이다.
3. 앞에 + 또는 −가 있는 기호는 항(term), 앞에 × 또는 ÷가 있는 기호는 인수(factor), A^B에서 A는 밑, B는 지수, 항들로만 구성된 표현은 co-terms, 인수로만 구성된 표현은 co-factors이다.
4. 0은 모든 기호의 co-term이고, 1은 모든 기호의 co-factor이다.
   $A = \times A = 1 \times A, \quad A = +A = 0 + A$
5. 기호만 다른 co-term은 0과 같고, 기호만 다른 co-factor는 1과 같다.
   $+A - A = 0, \quad \times A \div A = 1$
6. 항이나 인수 기호를 어떻게 조합하든지 어떤 기호가 동일하게 적용될 때, 그 기호는 항이나 인수에 분배된다.
7. $+(+A-B) = +(+A)+(-B), \quad \div(\times A \div B) = \div(\times A)\div(\div B)$
8. $-A \times -B = -(-A \times B) = -(-)(A \times B)$
9. $+(-A) = -A, \quad -(-A) = +A, \quad \times(\div A) = \div A, \quad \div(\div A) = \times A$
10. $+A - B = -B + A, \quad \times A \div B = \div B \times A$
11. $(+A)\times(+B-C) = (+A)\times(+B)+(+A)\times(-C) = +A\times B - A\times C$
    $\times(B-C)\div A = B\div A - C\div A$
12. $A^0 = 1, \quad A^1 = A$
13. $(\times A \times B)^C = \times A^C \times B^C$
14. $A^B \times A^C = A^{B+C}, \quad (A^B)^C = A^{B\times C}$

---

* TDA는 <*On the foundations of algebra, No. I*> – <*On the foundations of algebra, No.IV*>를 바탕으로 쓰여진 저서이다([27]). 이 논문에서는 원문 대신에 TDA를 참조하였다.

이 목록에서 몇 가지는 단순한 정의이고 몇 가지는 중복되지만, 그것들은 결합법칙을 제외하고는 순서체의 기본 공리와 거의 동형이다([17]). 드모르간은 "이러한 규칙에만 복종하고(규칙의 조합으로 형성되는 것을 제외하고), 이러한 기호만 사용하는(기호의 조합을 축약하여 만든 새로운 기호를 제외하고) 기호 체계가 기호대수([9, p.104])"라고 정의하였다. 여기서 말하는 기호대수는 그의 관점에서 바라본 단일대수*로, 오늘날의 순서체에 해당한다. 단일대수를 만들어 내는 과정에서 드모르간이 사용한 방식은 대상의 내적 성질을 정교하게 탐구하고 묘사함으로써 특정한 수학을 만드는 것이 아니라, 대상의 외부에서 규정한 규칙의 목록을 통하여 특정한 수학을 하는 것이다. 이러한 의미에서 드모르간은 공준적 대수의 초기 목록을 형식적으로 작성한 최초의 사람이라고 볼 수 있다([11]).

기호대수를 구성하는 드모르간의 관점에는 당대의 학자들의 관점을 뛰어넘는 부분이 있다. 대수학 발달의 역사에서 큰 역할을 한 것으로 평가받고 있는 피콕의 관점은 드모르간의 관점에 비하여 제한된 측면을 가지고 있다. 피콕은 산술대수**와 기호대수***를 구분하고, 산술대수로부터 기호대수를 유추할 수 있는 '형식불역(形式不易)의 원리'를 제시하였다. 예를 들어, 형식불역의 원리에 의해서 산술식 $(4^2-2^2)=(4+2)(4-2)$는 대수식 $(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$를 제안한다. 그런데 피콕은 형식불역의 원리가 대수의 기초를 제공하는 영원불멸의 원리라고 생각하여([17], [27]), 제안된 대수식이 논리적으로 모순은 없는지에 대한 사후 논증 과정을 고려하지 못하였다. 예를 들어 n이 자연수일 때 성립하는 식

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$$

이 n이 양의 유리수인 경우에도 성립할 것이라고 생각하였다([17]). 자연수 n에서 성립하던 식이 유리수에 대해서도 성립하기 위해서는 기존 연산의 의미가 그대로 성립하는지 아니면 식의 일부가 수정되어야 하는지를 검증해야 한다.**** 하지만 피콕은 "산술대수에서 제안하는 역할을 하는 것으로 생각되는 동등한 형식이 발견될 때마다, 기호가 그 형식에서 일반적일 때, 그것이 특정 값에서 성립할지라도, 그 기호가 그 형

* 드모르간은 대수를 발달 과정에 따라 4단계 즉, 산술, 보편산술, 단일대수, 이중대수로 구분하였다. 단일대수는 불가능한 뺄셈을 가능하게 만들어 의미를 제공하는 대수를 의미한다. 원문에서 드모르간은 이것을 보통 대수(ordinary algebra)라고 하였다. 그는 보통대수를 단일대수로 보았다([8]).

** 산술대수는 통상적인 양의 십진수를 표기하는 기호와 그와 같은 수에 적용할 수 있는 덧셈 및 곱셈과 같은 연산에 대한 기호의 사용으로부터 얻어진 결과를 연구하는 학문이다. 산술대수에서는 어떤 연산을 적용하는데 있어서 제한을 둔다. 예를 들어, 뺄셈 $a-b$에서 a는 b보다 항상 커야 한다.

*** 기호대수에서는 산술대수의 연산을 적용하지만 그것에 대한 제한이 무시된다. 따라서 기호대수에서 뺄셈은 항상 적용가능한 것으로 간주된다.

**** 예를 들어 $a=1$, $b=x$, $n=\frac{1}{2}$이라고 하면, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$이 되는데 이 식의 다항근사식은 x의 범위에 따라 수렴하기도 하고 발산하기도 한다.

식뿐만 아니라 그 본질에서도 일반적인 경우에 그 동등한 형식이 유지될 것이다([22]).”라고 생각하였다. 이는 현대적인 추상대수로 나아가는데 있어서 어떤 한계를 가지고 있는 관점이다.

기호대수의 관점을 정립하는 것은 드모르간에게도 쉬운 일이 아니었다. 그는 1828년에 부르동(Bourdon Marie, 1779-1854)의 《Elements of algebra》를 영어로 번역하면서, 대수는 “수와 관련하여 발생한 추론을 단축하고 일반화하는데 기호를 사용하는 수학 분야”라고 정의함으로써([27, p.12, 재인용]), 대수를 일반화된 산술로 간주하였다. 그가 1830년에 피콕이 《Treatise on Algebra》에서 제시한 산술대수와 기호대수의 구분을 받아들이는데 5년의 시간이 걸렸다([24]). 드모르간은 형식불역의 원리를 수정하여, 산술에서 성립하는 연산 규칙을 바탕으로 대수에서 성립하는 연산 규칙을 유추할 수 있지만 반드시 성립할 필요는 없으며, 모아진 연산 규칙 사이에 모순은 없는지에 대한 논리적인 검증 절차를 거쳐서 대수를 구성해야 한다는 관점을 정립하였다. 대수를 과학이 아니라 기술이라고 본 피콕([17])과 달리 드모르간은 대수가 단순히 산술 계산에 대한 기예(art)가 아니라 과학임을 증명하고자 하였다. 그는 대수를 과학으로 만들기 위하여 대수의 형식과 의미 중에서 형식 체계를 먼저 구성하고, 논리적으로 검증한 다음, 그것에 의미 체계를 부여함으로써 대수 법칙의 목록을 구성하는 방법([9, pp.97-98])을 제안하였다.

기호의 의미와 형식을 분리하여 형식 체계를 구성한 이후에 의미 체계를 부여하여 통합하는 드모르간의 관점은, 한편으로는 현대적인 추상대수로의 발달에 있어서 하나의 제약으로 작용하기도 하였다. 그는 추상대수의 발달단계를 산술, 보편산술, 단일대수, 이중대수로 제시하였다. 산술 규칙이 문자로 일반화된 보편산술에서 뺄셈($a-b$)의 의미를 버린 후에, 기호와 조작 규칙의 집합을 구성하고, 수직선의 단위선분을 이용하여 덧셈과 뺄셈의 의미를 부여함으로써, 단일대수를 구성한다([1]). 또, $\sqrt{-1}$의 의미를 버리고 단일대수에서 성립하는 (앞서 목록화한) 14개의 대수 법칙을 모은다. 여기에서 14번째 대수 법칙 즉, $A^{B}\times A^{C}=A^{B+C}$, $(A^{B})^{C}=A^{B\times C}$을 만족한다면, $(-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}}=-1$이 성립한다는 규칙을 수용하고, 이것이 성립하도록 하는 의미 체계를 선분의 길이와 선분의 방향이라는 두 가지 기하학적 의미에서 찾음으로써 이중대수에 이른다([9, pp.117-137]). 드모르간은 이러한 이중대수에 이르는 과정을 고수한 나머지, 삼중대수*의 구성 가능성에 매이게 되면서 사원수 발견에 이르지는 못하였다. 결국 자연수, 유리수, 실수와 같이 익숙하게 사용하던 수체계의 형식을 제공하는 대수를 넘어서는 추상대수의 구성에 이르지 못하였다([17], [18]).

드모르간이 구성한 대수의 한계는 수학의 발달에 관한 그의 견해에 기인하는 것으로 볼 수 있다. 드모르간은 수학이 이전에 축적된 지식이 일반화되면서 연속적으로

* 드모르간은 $a+b\sqrt{-1}$ 모양을 가지는 이중대수의 대상이 평면에서 선분으로 나타내어지기 때문에 공간에서 선분을 나타내는 $a+b\sqrt{-1}+c\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ 모양의 삼중대수를 구성할 수 있는 가능성을 생각하였다([18]).

발전한다고 생각하였다([27]). 그는 특정한 사실이 성립하는 지식을 더 넓은 범위로 확대하면서 지대한 발전이 이루어진다고 보았기 때문에, 기존의 지식을 비워버리는 새로운 발전의 가능성은 생각하지 못하였다. 드모르간에 따르면, $\sqrt{-1}$과 관련해서 의미대수를 구성하기 위해서 의미 체계를 주는 방식은 다양할 수 있지만, "일반적인 합의가 필요([9, p.109])"하고, "완전한 의미대수는 우리가 사용하는 부족한 체계를 확장해야([9, p.109])" 한다. 즉, 기존의 의미 체계는 더 확장된 의미 체계의 일부로 포함되어야 한다. 그렇게 해서 그는 복소수까지 포함하는 체의 공리를 얻을 수 있었지만 새로운 대수로 나아가지는 못하였다. 이것은 이후에 해밀턴 경과 불에 의해서 이루어졌다([3], [27]). 1833년에 해밀턴 경은 $(a,b)(c,d)=(ac-bd\ ,\ ad+bc)$와 같이 실수의 쌍으로 나타내는 형식적 대수를 도입하고, 삼원수 대신에 사원수의 가능성을 생각하여 10년 후에 사원수 $a+bi+cj+dk$를 정의하였다([27]). 또, 불은 양과 상관없이 성립하는 불 대수를 구성하였다. 이렇게 해서 수학은 의미가 주는 제약에서 벗어나 추상적인 대수학을 구성할 수 있는 엄청난 자유를 누리게 되었다([3]).

이상에서 살펴본 바와 같이 드모르간은 산술에서 단순히 유추한 형태의 기호대수를 넘어서, 형식으로부터 구성하는 수학의 가능성을 인식하고 이를 명시적으로 나타내어 추상대수학으로 나아갈 수 있는 기초를 닦았다.

3. 논리학 분야에서의 드모르간의 업적

드모르간은 논리학을 철학과 분리시켜 수학과 연결시키고자 노력하였다. 그가 아리스토텔레스 논리학을 개혁하고 관계논리를 명시적으로 도입한 것은 바로 수학과 논리학을 긴밀하게 연결시키려는 노력의 산물이다. 즉, "그의 주요한 과학적 기여는 논리학을 수학적으로 구성([15, p.10])"한 것이다. 그는 당시의 수학자와 논리학자 모두 상대방의 학문에 관심을 기울이지 않는다고 비판하면서, 정밀과학*에는 수학적 눈과 논리적 눈이 모두 필요하다고 역설하였다([6]).

수학과 논리를 결합하려는 드모르간의 관점은 당대의 학자들의 관점을 뛰어넘는 것이었다. '술어의 양화' 도입의 우선권에 대해 드모르간과 논쟁을 벌였던 해밀턴은 당대의 논리학자들이 수학에 대해 가졌던 편향된 시각의 일면을 잘 보여준다. 해밀턴은 논리학을 사고의 법칙을 분석하는 이론적 논리학과 사건을 다루는 실제적 논리학으로 분류하고, 후자를 다시 필연적 문제를 다루는 수학과 우연적 문제를 다루는 철학, 언어학 등과 같은 여타의 학문으로 나누었다. 해밀턴은 수학에 대하여 오늘날과는 상당히 다른 관점을 가지고 있었다. 그는 수학의 원리나 근원을 수학 내에서 찾는 것은 불가능하고, 수학이 필연적 진리를 다루는 것이 아니라 필연적 추론을 다룰 뿐이며,

* 정밀과학(exact science)은 수학, 물리학 등의 학문을 의미한다.

정신 도야에는 수학이 아닌 다른 교과가 더 나을 수 있다고 주장하면서, 수학을 철학뿐만 아니라 논리학과도 분리시켰다([14, p.1191], [16]).

드모르간이 논리학을 수학과 긴밀히 연결시키려 했던 것은 논리학을 우리 사고의 정확한 표현 수단으로 발전시키고자 했기 때문이다. 즉, 그는 논리학에서 애매하고 이론적으로 불완전한 것들을 체계적으로 정비하고자 하였다. 19세기 초의 논리학에서 여전히 불명확하게 다루어지던 대표적 예가 '부정' 개념*이었는데, 드모르간은 이 부정 개념을 다루는 방식을 획기적으로 바꿈으로써 술어의 양화를 도입하고 논리학을 수학과 긴밀히 연결시킬 수 있었다.

드모르간 당시, X에 대한 부정은 '그 X를 제외한 어떤 것이라도 될 수 있는 불명확한 무엇'으로 간주되었는데, 이와 관련해서, 드모르간은 반대어(contrary terms)를 명확하게 하기 위해 탐색의 대상을 전체 또는 세계(universe)라고 부르면서 논의세계(universe of discourse) 개념을 도입해, 'non-X'를 '논의세계에서 X가 아닌 모든 것'으로 규정하였다**. 이 과정에서 그는 전통적인 논리학과 다르게 X와 non-X를 동등하게 취급할 수 있다는 것을 자각하였다([15, pp.10-11]). 아리스토텔레스 논리학에서는 'no-man'을 이름으로 간주하지 않았지만 드모르간은 논의세계에서 'man'과 'no-man'을 동등하게 취급할 수 있기 때문에 둘 다 어떤 것의 이름이 된다고 보았다.

해밀턴도 술어를 양화하는 것이 필요하며 명제를 적절하게 양화하면 그 명제는 술어와 주어 사이의 방정식이 되고, 삼단논법의 논리 법칙을 더욱 단순화시킬 수 있다고 주장하였다. 하지만 해밀턴이 실제로 제시한 기호 체계는 수학적 방정식을 구성하는데 적절하지 않았고 일상 언어의 사용 방식과도 다른 규칙을 지니고 있었다([16, pp.55-59]). 이에 비해, 드모르간은 논의세계와 부정 개념에 기초해 술어의 양화를 도입함으로써 일관성 있는 기호 체계를 제시하였다. 또한, 어떤 것과 그것의 부정에 대한 동등한 취급이 논리학을 언어 사용 방식에 부합하도록 변모시킬 뿐만 아니라 논리학 자체를 진일보시킬 수 있는 첩경임을 드러내었다.

드모르간은 논의세계와 부정 개념에 기초해, 어떠한 이름 표현(name expression)이라도 그것의 부정을 동등하게 취급할 수 있다는 점에서 술어도 주어와 마찬가지로 양화할 수 있게 되고 주어와 술어의 관계를 방정식과 같은 표현으로 전환할 수 있게 되어 논리학을 수학화할 수 있었다. 예를 들어, 드모르간은 '논의세계에서 X가 아닌 것'을 x로 나타내고 4가지 전칭 긍정(A), 전칭 부정(E), 특칭 긍정(I), 특칭 부정 명제(O)를 다음과 같이 8가지 형태***로 제시하면서 $X)Y = X \cdot y = y)x$와 같은 방식으로 명제 사이의 동치관계를 나타내고, '+'를 연언(conjunction)을 나타내는 기호로 사용하여 $X)Y+x)y$와 같은 방식으로 복합명제를 나타내었다([15, p.12]).

* 이와 관련해 드모르간은 '긍정과 부정', '가능과 불가능', '보편과 특징'과 같은 서로 대비되는 관계를 규명하려 노력하였고, 특히 역설에 많은 관심을 가졌다.

** 드모르간은 한 쌍의 상반되는 용어를 명확하게 규정하기 위해 그 용어가 지칭될 수 있는 세계를 개념화한 것이라 할 수 있다.

*** 16가지로 제시가능하지만 서로 구별되는 것은 8가지라 할 수 있다.

Every X is a Y	$X)Y$;	Every x is a y	$x)y$;
No X is a Y	$X \cdot Y$;	No x is a y	$x \cdot y$;
Some X's are Y's	XY ;	Some x's are y's	xy ;
Some X's are not Y's	$X : Y$;	Some x's are not y's	$x : y$

드모르간은 어떤 항과 그것의 부정어를 명확하게 규정하기 위해 논의세계라는 개념을 도입하였다. 그 개념을 바탕으로 술어 Y와 not Y를 동등하게 취급하고, 주어뿐만 아니라 술어도 양화할 수 있다는 점을 알게 되었고, 주어와 술어의 관계 관점에서 논리 명제를 다루게 되었다. 이러한 술어의 양화는 일상어나 논리기호로 표현한 명제를 류(class)를 활용한 표현 즉, 방정식화된 표현으로 전환할 수 있게 함으로써 수학적 논리학을 발전시키는 계기로 작용하였다.

드모르간의 법칙은 이러한 맥락에서 재해석할 수 있다. 드모르간의 법칙은 19세기 이전에도 많은 학자에 의하여 다루어졌다. 중세유럽에서도 아벨라르(Pierre Abelard, 1079-1142), 히스파누스(Petrus Hispanus, 1215-1277), 스코투스(John Duns Scotus, 1270-1308), 옥캄(William Occam, 1300-1350) 등이 드모르간의 법칙을 포함한 명제 계산의 많은 법칙과 논의세계의 전조가 되는 개념을 사용하였다([15, p.2]). 그러나 이러한 학자들과 드모르간은 어떤 대상과 그 대상의 부정을 동등하게 취급한다는 아이디어를 드모르간의 법칙에도 적용하여 형식화하였다는 점에서 구분된다. 예를 들어, 공식에서 P와 Q를 각각 P^c와 Q^c로 치환하게 되면 $(P^c \cap Q^c)^c = P \cup Q$ 공식을 얻게 되는데 이것은 어떤 X와 그것의 부정인 non-X의 논리학적 위상이 동일함을 보여준다. 이 동등한 취급이 그의 논리학의 핵심적 가정이라는 점에서, 드모르간의 법칙은 이름 그대로 그의 논리학을 대표하는 법칙이라 할 수 있다.

드모르간은 관계와 그 관계에 대한 연산 개념을 도입함으로써 현대적인 관계 이론의 초석을 닦아 놓았다. 이러한 업적도 논리학을 수학과 관련시키려는 그의 노력이라는 관점에서 해석할 수 있다. 고대 그리스 이래 2000년 이상, 유클리드 기하학은 논증과학의 전형으로 간주되었지만, 드모르간 당시 전통적인 삼단논법에 의해서는 기하학에서 흔히 사용하는 "보다 크다"는 관계의 추이율조차 체계적으로 설명할 수 없었다. 드모르간은 이러한 수학과 논리학의 단절을 극복하고자 관계논리에 관심을 기울였던 것이다([20]). 드모르간은 논리학의 명제를 등식화시켜 마치 대수에서와 같이 계산이 가능하도록 하기 위해서는 주어와 술어 사이의 동치 관계 뿐만 아니라 다양한 관계를 표현할 수 있어야 한다고 보았다.

드모르간은 이를 위하여 여러 가지 방법을 고안하였다. 우선 전통적인 삼단논법의 논증을 류 사이의 관계와 이중계사 삼단논법(bicopular syllogism)을 도입하여 다루었고, 계사 자체도 일반화하였다. 이중계사 삼단논법은 예를 들어 '～의 형이다', '～의 부모이다'는 두 관계를 합성하여 '～의 큰 아버지이다'와 같은 관계를 만드는 것을 의

미한다. “A는 B의 형이다.”와 “B는 C의 부모이다.”로부터 “A는 C의 큰 아버지이다.”를 추론하는 것이 그 예가 될 수 있다. 또, 드모르간은 여러 관계를 대수적으로 다루기 위해 두 관계 M과 N의 논리합, 논리곱, 상대적 합, 상대적 곱을 각각 MN', MN, $M \between N$, $M(N)$ 으로 나타내고 관계 M의 보관계(complementary relation to M)와 역관계를 각각 n , M^{-1}로 표현하는 기호 체계를 도입하였다([28, p.165]).

드모르간은 논리학 연구를 계속하면서 관계의 형식적 성질에 주목하였다. 드모르간은, 《*Formal Logic*》(1847)을 집필하던 당시에 추이성, 치환성(convertibility)과 같은 형식적 성질을 만족하는 관계 용어는 모두 삼단논법의 규칙을 만족시킬 수 있음을 자각하였다. 형식적 성질을 연구의 대상으로 삼게 된 드모르간은 추이성만을 따를 때와 치환성을 덧붙였을 때로 나누어 삼단논법의 규칙을 연구하였다. 이렇게 해서 관계의 형식적 성질을 다루는 논리학을 태동시키게 되었다([20, pp.48-88]). 관계 논리는 퍼스(Charles Sanders Peirce, 1839-1914), 슈뢰더(Ernst Schröder 1841-1902), 페아노(Giuseppe Peano, 1858-1932), 칸토어(Georg Cantor, 1845-1918), 프레게(Friedrich Frege, 1848-1925), 러셀(Bertrand Russell, 1872-1970), 타스키(Alfred Tarski, 1901-1983)등을 거치며 더욱 발전하게 되어 수학의 기초로 자리 잡게 된다([12], [19]). 이렇게 해서 논리학과 수학을 긴밀히 연결시키려는 드모르간의 노력이 역사적 결실을 맺게 된 것이다.

드모르간은 아리스토텔레스 논리학의 재구성자인 동시에 수학적 논리학의 창시자로 간주할 수 있다. 그의 연구로 논리학이 철학에서 분리되어 나와 수학과 더욱 긴밀하게 결합하게 되어 수학적 논리학이 하나의 독립적 학문으로 자리 잡게 되었다.

4. 요약 및 결론

드모르간은 피콕과 휴웰 등을 스승으로 하여 대륙수학의 양분을 흡수하면서 학문적으로 성장하였다. 그는 30여 년간 재직한 런던대학을 중심으로 수많은 수학자 및 논리학자들과 교류를 통해 연구 활동을 하는 한편, 대중교육을 목적으로 하는 SDUK의 회원으로 수학교육 분야에서도 많은 활동을 하였다. 그는 19세기 초, 근대 수학이 급속도로 발달하는 시기에 대수학과 논리학에서 중요한 역할을 수행하였다.

드모르간은 대수학에서 기호의 의미를 제거하고 형식을 기반으로 하여 구성하는 대수의 원형을 제시하였다. 그는 의미와 형식을 분리함으로써, 산술에서 성립하는 연산 규칙이 대수에서 그대로 성립한다고 가정하기보다는 연산 규칙을 먼저 제시한 다음 이 각각이 성립하는지를 논리적으로 검토하는 방식으로 논의를 진행시킴으로써, 잘 구성된 공리 집합에 근거해서 대수를 구성할 수 있는 가능성을 열었다. 이러한 의미에서 드모르간은 공준적 대수의 초기 목록을 형식적으로 작성한 최초의 사람이라고 볼 수 있다. 드모르간은 기호의 의미와 형식을 분리하여 형식 체계를 구성한 이후에 다시 형식 체계에 의미 체계를 부여하여 통합하는 방식을 고수함으로써 현대적인 추

상대수학으로 나아가지 못하였다는 한계를 가지고 있었지만, 19세기 대수학 발달 과정에서 남긴 그의 업적은 결코 가볍지 않다. 드모르간은 산술에서 단순하게 유추된 형태의 기호대수를 넘어서, 형식으로부터 구성되는 수학의 가능성을 인식하고 이를 명시적으로 나타내어 추상대수학으로 나아갈 수 있는 기초를 닦았다.

논리학에서 드모르간이 19세기 학문 발달에 남긴 가장 중요한 업적은 논리학을 수학적으로 구성한 것이라고 할 수 있다. 그가 논리학을 수학과 긴밀히 연결시키려 했던 것은 논리학을 사고의 정확한 표현 수단으로 발전시키고자 했기 때문이다. 특히, 그는 어떤 것과 그것의 부정에 대한 동등한 취급이 논리학을 일상적 언어 사용방식에 부합하도록 만들 뿐만 아니라 논리학 자체를 발전시킬 수 있는 방법임을 보였다. 그는 당시 애매하게 다루어지던 부정 개념을 논의세계 개념을 통해 명확히 하였고, 논의 세계와 부정 개념에 기초하여 술어의 양화를 도입함으로써 일관성 있는 기호 체계를 제시하였다. 드모르간은 X와 non-X를, 술어 Y와 not Y를 각각 동등하게 취급하여, 주어와 술어의 관계라는 관점에서 논리 명제를 취급함으로써 현대적 의미의 관계논리의 태동에 기여할 수 있었다. 드모르간은 관계를 대수적으로 다루기 위해 여러 가지 방법을 고안하였으며, 논리학을 연구하는 가운데 추이성, 치환성과 같은 형식적 성질 자체로 관심을 돌려 논리학 연구의 새로운 지평을 열었다. 즉, 현대적인 논리학은 드모르간으로부터 출발하였다고 할 수 있다.

대수학과 논리학에서의 드모르간의 업적은 몇 가지 점에서 유사성을 가지고 있다. 첫째로 드모르간은 당대의 다른 학자들과 달리 대수와 논리를 학문의 위치로 끌어올리려고 하였다. 드모르간은 대수를 기예로 본 피콕의 견해에 반하여 대수를 학문으로 만들고자 하였으며, 논리학과 수학을 분리하여 생각하였던 해밀턴과 달리 논리학을 수학과 결합하여 다루고자 하였다. 둘째로, 드모르간은 대수학과 논리학에서 모두 일관성 있는 기호 체계를 제시하였다. 셋째로 음수와 부정과 같이 이전에는 학문적 대상으로서 체계적으로 다루어지지 않던 것을 학문적 대상으로 삼아 체계적으로 연구하고, 그 각각에 대한 교육적인 조처를 고민하였다. 드모르간은 음수의 인식론적 지위에 대하여 끊임없이 고민하였을 뿐만 아니라([13]), 교육적인 견지에서 음수 개념을 논리학에서의 부정 개념과 함께 묶어 고민하였다. 드모르간은 “대수를 가르칠 때 학생들이 a가 음수가 되고 $-a$가 양수가 될 수 있다는 것을 이해하는 데 인식상의 어려움이 있듯이 어떤 것과 그것의 부정에 관해서도 이와 유사한 어려움이 존재할 수 있다([16, 재인용]).”고 하였다. 드모르간은 부정과 음수에 대한 인식론적 장애가 유사한 것이라고 보면서, 음수를 포함하는 대수 체계를 구성함으로써 양수와 음수를 동일하게 취급하게 하고, 논의세계 개념을 구성하여 X와 non-X, 술어 Y와 not Y를 동등하게 취급하게 하는 방식으로 자신이 고민하였던 문제를 해결하고자 하였다.

드모르간은 비록 완전한 형태의 추상대수학과 완전한 형태의 현대적 논리학을 구축하는데 이르지는 못하였지만, 나름대로 그 각각으로 나아가는데 매우 중요한 역할을 하였다. 음수와 부정을 다른 수학적 대상과 동등한 위치에서 다루도록 하는 관점의

전환과, 대수적 성질과 논리 규칙을 명시적으로 체계화하여 제시함으로써, 후일 그것을 더 발전적으로 연구할 수 있게 한 것은 모두 높이 평가되어야 할 업적이다.

참고문헌

1. 유미경, 김재홍, 권석일, 박선용, 최지선, 박교식, 대수 발달의 단계에 관한 드모르간의 관점 연구. **한국수학사학회지,** 21 (2008) No. 4, 61-78.
2. Bashmakova, I. G., & Rudakov, A. N., Algebra and algebraic number theory. In A. N. Kolmogorov & A. P. Yushkevich (Eds.), *Mathematics of the 19th century: mathematical logic, algebra, number theory, probability theory* (A. Shenitzer, H. Grant & O. B. Sheinin, Trans) (pp.35-135). Basel, Boston: Birkhäuser Verlag, 2001.
3. Boyer, C. B., & Merzbach, U. C., *A history of mathematics (2nd ed.).* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 1991. 양영오・조윤동 역, 수학의 역사. 서울: 경문사, 2000.
4. Cajori, F., *A history of mathematics.* The Macmillan company, 1958.
5. Cajori, F., *A history of elementary mathematics with hints on method of teaching.* London: Macmillan & Co. Ltd., 1917/1957.
6. De Morgan, A., Review of a book on geometry. *The Athenaeum,* 2 (1868), 71-73.
7. De Morgan, A., *On the study and difficulties of mathematics.* Chicago: The open court publishing company, 1831/1910.
8. De Morgan, A., *Elements of algebra: preliminary to the differential calculus.* London: Taylor, Walton, 1835/1837.
9. De Morgan, A., *Trigonometry and Double Algebra.* London: Taylor, Walton & Maberly, 1849.
10. De Morgan, S. E., *Momoir of August De Morgan.* London: Elibron Classics, 1882/2005.
11. Fisch, M., 'The Emergency Which Has Arrived': The Problematic History of Nineteenth-Century British Algebra: A Programmatic Outline. *The British Journal for the History of Science,* 27 (1994) No. 3, 247-276.
12. Givant, S., The calculus of relations as a foundation for mathematics. *Journal of Automated Reasoning,* 37 (2006), 277-322.
13. Guinness, G., An eye for method: Augustus De Morgan and mathematical education. *Paradigm,* 9 (1992).

14. Kline, M., *Mathematical thought from ancient to modern times.* New York : Oxford University Press, 1972.
15. Kuzicheva, Z. A., Mathematical logic. In A. N. Kolmogorov & A. P. Yushkevich (Eds.), *Mathematics of the 19th century: mathematical logic, algebra, number theory, probability theory* (A. Shenitzer, H. Grant & O. B. Sheinin, Trans) (pp.1-34). Basel, Boston: Birkhäuser Verlag, 2001.
16. Laita, L. M., Influences on Boole's logic: the controversy between William Hamilton and Augustus De Morgan. *Annals of Science, 36* (1979) No. 1, 45-65.
17. Macfarlane, A., The Fundamental Principles of Algebra. A report of American Association for the Advancement of Science. *Science, 10* (1899) No. 246, 345-364.
18. Macfarlane, A., *Lectures on ten British mathematicians of the nineteen century.* In M. Merriman & R. S. Woodward, Mathematical Monographs (No.17). Oxford, MS: project Gutenberg Archive Foundation, 1916.
19. Maddux, R., The origin of relation algebras in the development and axiomatization of the calculus of relations. *Studia Logica,* 50(3/4) (1991), 421-455.
20. Merrill, D. D., *Augustus De Morgan and the logic of relations.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
21. Panteki, M., French "logique" and British "logic"; on the origins of Augustus De Morgan's early logical inquiries 1805-1835. *Historia Mathematica, 30* (2003), 278-340.
22. Peacock, G., *A treatise on algebra vol. II: on symbolic algebra and its applications and the geometry of position.* Cambridge university press, 1842.
23. Pycior, H. M., Early criticism of the symbolical approach to algebra. *Historia Mathematica,* 9 (1982), 392-412
24. Pycior, H. M., Augustus De Morgan's algebraic work: the three stage. *Isis,* 74 (1983) No. 1, 211-226.
25. Rice, A., Augustus De Morgan(1806-1871). *The Mathematical Intelligencer,* 18 (1996a) No. 3, 40-43.
26. Rice, A., Augustus De Morgan: Historian of science. *History of Science,* 34 (1996b) 201-240.
27. Richards, J. L., Augustus De Morgan, the history of mathematics, and the foundations of algebra. *Isis* 78 (1987) No. 1, 6-30.
28. Styazhkin, N. I., *History of mathematical logic from Leibniz to Peano.*

Massachusetts: The Colonial Press, 1969.

<인터넷 자료>

29. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Boole.html.
30. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Morgan.html.
31. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/The_four_colour_theorem. html.
32. http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem
33. http://en.wikipedia.org/wiki/Copula_(linguistics)

De Morgan in the development of algebra and mathematical logic in 19C

Jungheung Middle School **Choi Ji sun**
Korea Institute for Curriculum and Evaluation **Park Sun Yong**
Graduate School of Seoul National University **Kim Jae Hong**
Gyeongin National University of Education **Kwon Seokil**
Gyeongin National University of Education **Park Kyo Sik**

The purpose of this study is what exactly De Morgan contributed to abstract algebra and mathematical logic. He recognised the purely symbolic nature of algebra and was aware of the existence of algebras other than ordinary algebra. He made algebra as a science by introducing the ordered field and made the base for abstract algebra. He was one of the reformer of classical mathematical logic. Looking into De Morgan's works, we made it clear that the developments of algebra and mathematical logic in 19C.

Key words: De Morgan, algebra, mathematical logic, abstract algebra
2000 Mathematics Subject Classification : 97-03, 97D20, 97D30
ZDM Subject Classification: E44, H14

접수일 : 2009년 9월 21일 수정일 : 2009년 10월 20일 게재확정일 : 2009년 10월 23일