

2차원 비압축성 점성유동에 관한 무격자법 기반의 수치해석

정 세 민,¹ 박 종 천,^{*2} 허 재 경³

NUMERICAL STUDY ON TWO-DIMENSIONAL INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW BASED ON GRIDLESS METHOD

S.-M. Jeong,¹ J.-C. Park^{*2} and J.-K. Heo³

The gridless (or meshfree) methods, such as MPS, SPH, FPM and so forth, are feasible and robust for the problems with moving boundary and/or complicated boundary shapes, because these methods do not need to generate a grid system. In this study, a gridless solver, which is based on the combination of moving least square interpolations on a cloud of points with point collocation for evaluating the derivatives of governing equations, is presented for two-dimensional unsteady incompressible Navier-Stokes problem in the low Reynolds number. A MAC-type algorithm was adopted and the Poisson equation for the pressure was solved successively in the moving least square sense. Some typical problems were solved by the presented solver for the validation and the results obtained were compared with analytic solutions and the numerical results by conventional CFD methods, such as a FVM.

Key Words : 무격자법(Gridless Method), 이동최소자승법(Moving Least-Squares Method), 비압축성점성유동(Incompressible Viscous Flow), 가중함수(Weighting Function), 나비에-스톡스 방정식(Navier-Stokes Equations)

1. 서 론

전자계산기를 이용한 유체 현상의 시뮬레이션에는 격자계를 이용하는 유한차분법(FDM)이나 유한체적법(FVM)이 보편적으로 사용되고 있다. 특히 최근에는, 계산기 성능의 급격한 발전으로 복잡한 물체형상을 표현하기 용이한 비구조격자(Unstructured grid)의 사용 및 병렬화 등을 통한 대규모 계산이 널리 수행되고 있지만, 격자생성을 위한 전처리 작업에는 아직도 과도한 시간이 소요된다. 게다가, 생성된 격자의 질에 따라 계산 안정성과 정확도가 달라지기도 한다. 대규모 계산이 더욱 보편화되리라고 예상되는 향후에는 격자계를 사용하

는 기존의 CFD 방법에서는 격자계 생성에 더욱더 많은 노력과 시간이 필요할 것으로 예상된다.

격자법에서 발생하는 이러한 문제점들은 이미 비격자법을 개발하는 연구진들에 의해서 지적된 바 있다. 비격자법은 계산점의 위치정보만 필요하므로 격자계 생성에 필요한 수고를 크게 줄일 수 있다. 비격자법은 크게 라그랑지(Lagrangian) 근사 방법과 오일러(Eulerian) 근사방법으로 나눌 수 있다. 라그랑지 근사방법은 복잡한 자유표면 유동 해석에 널리 사용되고 있는 SPH[1]와 MPS[2] 등의 방법이 알려져 있다. 오일러 근사방법으로는 최소자승법을 사용하는 유동해석 방법이 Batina[3], Onate et. al.[4] 등에 의해 소개된 바 있고, 최근에도 격자생성이 불필요하다는 이점으로 많은 관련 연구가 진행되고 있다.

본 연구에서는, 저 레이놀즈(Reynolds) 수의 2차원 비압축성 점성유동의 Navier-stokes 문제를 대상으로 무격자 기반의 수치해석기법을 개발한다. 본 수치해석기법은 Sakamoto et. al.[5]의 방법을 개량한 오일러리안 해법으로, 지배방정식의 각 미분항은 이동최소자승(MLS; Moving Least-Squares)법을 이

접수일: 2009년 10월 16일, 수정일: 2009년 12월 11일,
계재확정일: 2009년 12월 18일.

1 정희원, 동경대학교대학원 신영역창성과학연구과

2 정희원, 부산대학교 조선해양공학과

3 정희원, 한진중공업 선박해양연구팀

* Corresponding author, E-mail: jcpark@pnu.edu

용하여 이산화되며, 속도-압력의 연성 알고리즘으로는 MAC 법과 근본적으로 같은 Fractional Time Step법을 채택하였다. 압력의 포아송(Poisson) 방정식은 MLS법을 이용하여 반복 계산에 의해 구해진다.

개발된 수치해석기법을 이용하여 2차원의 진동평판에 의해 발생하는 점성유동(Stokes' second problem)[6]과 Cavity 유동 해석을 수행하였다. 특히, Cavity 유동은 경계조건이 명확하여 실험 및 계산에 의한 선행 연구가 많이 수행되어 있는 문제로, 본 계산조직의 정확도를 검증하기에 적합한 유동현상으로 판단된다. 또한, 격자법과의 비교를 위하여 기존의 유한체적법에 의한 계산결과와도 비교하였다.

2. 수치해석기법

2.1 지배방정식 및 알고리즘

비압축성 점성 유동에 관한 지배방정식은 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식이다.

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u \quad (2)$$

여기서, u 는 속도, t 는 시간, ρ 는 밀도, p 는 압력, ν 는 동점성계수이며, 지배방정식 내의 편미분항 및 속도-압력 연성에 의한 포아송 방정식은 MLS를 이용하여 이산화된다. 계산 알고리즘에 대하여 Sakamoto et. al.[5]가 MAC을 사용한 것에 반하여, 본 연구에서는 연속방정식을 보다 정확히 만족시키며 계산속도가 빠르다고 알려진 Fractional Step법을 채택하였고, 시간항은 2차정도의 Adams-Bashforth법을 이용하였다. 상세한 내용은 2.4절에 서술한다.

2.2 근사다항식 및 MLS

Fig. 1에 보이는 바와 같이, 개발된 MLS기반의 해법은 계산영역 내에 배치된 계산점에서의 물리량의 분포를, FDM에서와 같이 격자정보를 이용하지 않고, 그 점 주변의 점군(Cloud)의 물리량으로부터 MLS법의 다항식으로 근사하여 유동장을 계산하는 방법이다. 즉, 주목점(i)의 영향반경(r_0 , Effective radius)내에 존재하는 주변점군(j)에서의 물리량으로부터 다항식으로 근사한 후, 근사치와 실제치의 잔차(Residual)의 제곱이 최소가 되도록 계수를 구한다.

본 해법에서는, 한번에 2차 미분계수까지 구할 수 있는 2차 근사 다항식을 채용하였다. 따라서, 주목점 $i(x_i, y_i)$ 근방

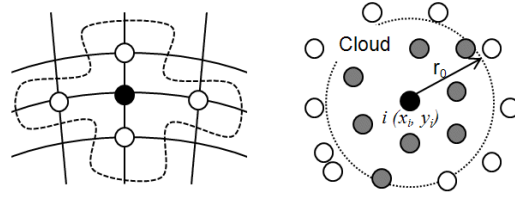


Fig. 1 FDM and gridless method

에서 물리량의 분포를 다항식으로 나타내면 식 (3)과 같다.

$$f^*(x_j, y_j) = f(x_i, y_i) + a_i \Delta x_j + b_i \Delta y_j + c_i \Delta x_j^2 + d_i \Delta x_j \Delta y_j + e_i \Delta y_j^2 \quad (3)$$

단, $\Delta x_j = x_j - x_i$, $\Delta y_j = y_j - y_i$ 이며, 우변에 나타나는 각 계수는 물리량의 공간미분에 해당하며 다음과 같다.

$$a = \frac{\partial f^*}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial f^*}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial^2 f^*}{2\partial x^2}, \quad d = \frac{\partial^2 f^*}{\partial x \partial y}, \quad e = \frac{\partial^2 f^*}{2\partial y^2} \quad (4)$$

이 근사 다항식에 의해 가정된 물리량 f_j^* 와 실제의 물리량 f_j 와의 잔차에 대한 지승의 합을 전 주변점에서 구하여, 이 잔차식이 최소가 되는 조건으로부터 식 (7)과 같은 연립방정식이 유도된다.

$$Q = \sum_j (f_j^* - f_j)^2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = \frac{\partial Q}{\partial b_i} = \frac{\partial Q}{\partial c_i} = \frac{\partial Q}{\partial d_i} = \frac{\partial Q}{\partial e_i} = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \\ e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \Delta x_j \Delta f_j \\ \sum \Delta y_j \Delta f_j \\ \sum \Delta x_j^2 \Delta f_j \\ \sum \Delta x_j \Delta y_j \Delta f_j \\ \sum \Delta y_j^2 \Delta f_j \end{pmatrix} \quad (7)$$

여기서, $\Delta f_i = f(x_j, y_j) - f(x_i, y_i)$ 이며, 계수행렬 \mathbf{A} 는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum \Delta x^2 & \sum \Delta x \Delta y & \sum \Delta x^3 & \sum \Delta x^2 \Delta y & \sum \Delta x \Delta y^2 \\ \sum \Delta x \Delta y & \sum \Delta y^2 & \sum \Delta x^2 \Delta y & \sum \Delta x \Delta y^2 & \sum \Delta y^3 \\ \sum \Delta x^3 & \sum \Delta x^2 \Delta y & \sum \Delta x^4 & \sum \Delta x^3 \Delta y & \sum \Delta x^2 \Delta y^2 \\ \sum \Delta x^2 \Delta y & \sum \Delta x \Delta y^2 & \sum \Delta x^3 \Delta y & \sum \Delta x^2 \Delta y^2 & \sum \Delta x \Delta y^3 \\ \sum \Delta x \Delta y^2 & \sum \Delta y^3 & \sum \Delta x^2 \Delta y^2 & \sum \Delta x \Delta y^3 & \sum \Delta y^4 \end{pmatrix}$$

식 (7)에서 계수행렬 \mathbf{A} 의 역행렬을 구하면 미정계수 $a_i \sim e_i$, 즉 물리량에 관한 2차까지의 공간미분계수를 구할 수 있다. 특히, 계수행렬 \mathbf{A} 의 각 성분이 계산점 간의 거리만으로 표현되므로, 계산점 분포가 변화하지 않는 경우, 이 계수행렬 \mathbf{A} 및 그 역행렬은 비정상계산을 하고 있는 사이에도 항상 일정 값을 유지하게 된다. 따라서, 계산기의 메모리가 허용하는 한, 비정상계산의 전처리로서 계수행렬 \mathbf{A} 의 역행렬을 미리 계산해 두면, 계산시간을 대폭 단축할 수 있다.

2.3 가중함수

최소자승법을 비롯한 각종 근사를 이용한 추정법에 있어서, 보간된 정보의 취득방법은 매우 중요하여, 방법에 따라서는 계산이 불안정해져 진동현상을 야기하기도 한다. 추정오차를 작게 하기 위해서는 주목점과 가까운 주변점을 이용하는 것과 동시에, 일반적으로 초음속유동이 아니라면, 유동의 정보는 전 방향에서 전파되므로, 정보를 전 방향에서 얻는 것이 바람직하다. 이 두 가지 요구사항은 각 주목 점의 주변점이 전 방향에 균등하게 분포되어 있을 경우는 만족이 되지만, 고 레이놀즈 수 유동 등에서와 같이 고 종횡비 격자에 해당하는 계산점 분포의 경우, 두 가지 조건을 동시에 만족시킬 수는 없다. 본 연구에서는, 거리에 따라서 잔차에 가중을 부여하는 가중함수 최소자승법을 채택하였다. 가중함수 w_j 를 적용한 잔차의 식 (8)과 최소화조건인 식 (6)으로부터 식 (9)와 같은 연립방정식이 유도된다.

$$Q = \sum_j w_j (f_j^* - f_j)^2 \tag{8}$$

$$\mathbf{A}_w \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \\ e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_j \Delta x_j \Delta f_j \\ \sum w_j \Delta y_j \Delta f_j \\ \sum w_j \Delta x_j^2 \Delta f_j \\ \sum w_j \Delta x_j \Delta y_j \Delta f_j \\ \sum w_j \Delta y_j^2 \Delta f_j \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{A}_w = \begin{pmatrix} \sum w \Delta x^2 & \cdots & \sum w \Delta x \Delta y^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum w \Delta x \Delta y^2 & \cdots & \sum w \Delta y^4 \end{pmatrix}$$

거리에 의존하는 가중함수를 채용한 가중 최소자승법은, 주목점 i 로부터 먼 위치에 있는 점의 영향을 최소화하여, 먼 점의 정보에 의한 악영향을 줄이면서, 모든 방향의 정보를 포착할 수 있게 한다. 또한, 가중함수도 계산점의 위치에만 의

존하므로 계수행렬 \mathbf{A}_w 는 시간에 대해 일정하고, 이 경우도 전처리로서 역행렬을 미리 계산해서 기억해 둘 수 있다.

본 연구에서의 가중함수는 SPH에서의 커널함수, MPS에서의 가중함수와 마찬가지로 가우시안 분포, 다항식 분포 등 다양한 형태가 존재한다[5]. 본 연구에서는, 이 중 몇 가지를 테스트하여 랜덤한 분포에서도 안정적 이면서도, 비교적 좋은 해를 얻을 수 있었던 아래와 같은 가중함수를 사용하였다.

$$w_1(r) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-6.3r^2}{r_0^2}\right) & (r \leq r_1) \\ 0 & (r > r_1) \end{cases} \tag{10}$$

여기서, r 은 주목점 i 로부터 주변점 j 까지의 거리, r_1 은 기준거리, r_0 은 영향반경으로 본 연구에서는 $r_0 = 2.5r_1$ 을 사용하였다. 단, 기준거리 r_1 은, 균일분포의 경우 계산점간의 거리($r_1 = \Delta x = \Delta y$)를, 비균일분포의 경우는 클라우드 내의 가장 먼 점까지의 거리를 r_{max} 라 할 때 이 값을 $\sqrt{2}$ 로 나눈 값($r_1 = r_{max}/\sqrt{2}$)을 각각 사용하였다.

Navier-Stokes 방정식에 있어서의 대류항은 비선형 불안정성을 발생시킬 우려가 있으므로, 이 항의 평가가 중요하다. 무격자법의 경우, 최소자승법에 의한 미계수의 평가는 차분법의 중심차분에 상당하고, 레이놀즈 수가 커짐에 따라 비선형 불안정성이 문제가 된다. 이 문제를 해결하는 방법으로, 인공 점성항을 더하는 방법[3], 라그랑지안 해법의 ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian)법으로 MPS에서 시도된 것 같이 흐름방향의 국소 좌표계를 생성하는 MPS-MAFL(Meshless Advection using Flow-directional Local-grid)[7]법이나 국소 Spline을 이용하는 방법[5] 등이 있으며, Ogawara[8]는 클라우드 내의 상류측에 존재하는 점을 중요시하는 가중함수를 식 (11)과 같이 제안하였다.

$$w_{up} = \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{r}\|} \right) \right\}^p \tag{11}$$

이 가중함수의 값(가중치)은, 주변점이 주목점 i 로부터 상류에 존재할 때(j_u)는 1, 하류에 위치할 때(j_d)는 0이 되며, 이는 중심차분에 인공점성항을 더하여 대류항의 계산안정화를 도모하는, 격자기반의 상류차분기법과 동일하다. 또한, 상하류 유선상이외의 주변점들에서는 상류측에서 멀어질수록 기여도를 줄이도록 하고 있으며, 이 기여도는 식 내의 지수값 p 를 통해 조절하도록 하고 있으며, 지수 p 에 의한 가중치의 차이를 Fig. 2에 보인다. $p=1$ 인 경우는, 격자법의 2차 상류차분에 상당하며, 이 가중함수의 사용으로 해가 안정되는 경향

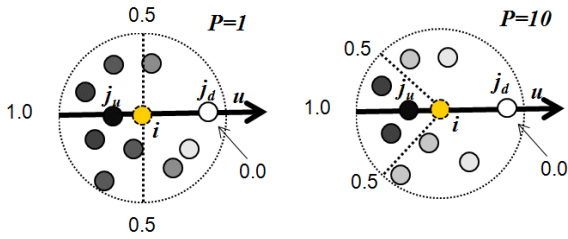


Fig. 2 Weighting function for up-winding

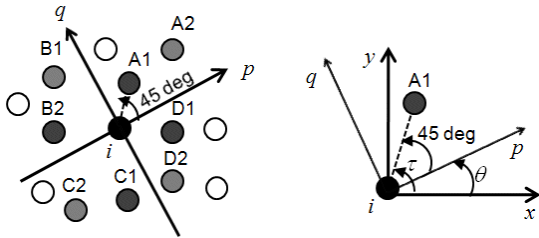


Fig. 3 Local coordinate and neighboring points

을 보이나, p 를 크게 했을 때 압력의 체커보드 현상이 발생하는 경우도 있다[7]. 특히 랜덤분포와 같은 경우, MLS 계산에 필요한 주변점(예를 들어, 본 연구에서는 5점)이 확보되지 않을 수도 있으므로, 이에 대한 주의가 필요하다.

2.4 클라우드 구성

앞서 설명한 바와 같이, 유동의 정보는 전 방향에서 전파되어 오므로, 클라우드 내의 점들도 전 방향에서의 정보가 전파 가능한 상태로 배치되어 있어야 한다. 본 연구에서는, 다음과 같이 클라우드를 4분할하는 방법[9]을 이용하였다.

Fig. 3에서 보듯이, 우선 주목점 i 에 가장 가까운 점 A1을 찾은 후, 선분 $i-A1$ 이 45도를 이루도록 주목점 i 를 중심으로 직교좌표 $p-q$ 를 구성, 4개의 영역으로 분할한다. 여기서 국소적으로 사용되는 $p-q$ 좌표는 점 i 를 원점으로 하는 데카르트 좌표 $\bar{x}-\bar{y}$ 의 회전이다. 각 사분면에 있어서 주목점 i 에 가까운 점을 순서대로 2~3점 선택해 내고, 전체 사분면에서의 주변점(A1, A2, ..., D1, D2)들을 점 i 의 주변점으로 한다. 본 연구에서는, 각 사분면에서 2점을 골라, 전체 8점으로 클라우드를 구성하도록 하였다.

이상 설명한 구성법의 경우, 경계부근에서 각 사분면에 2점 이상이 포함되지 않는 경우가 발생한다. 이때에는 $p-q$ 좌표계를 조금씩 회전시켜 자동으로 이 조건을 만족하도록 구성법을 개선하였다. 또한, 주변점 탐색의 고속화를 위하여, 배경격자를 구성, 입자번호를 격납시키는 방법을 이용하였다. 덧붙여, 계산에 포함되는 주변점을 8점으로 고정할 이유로서

는 추후 병렬화 코드 등을 개발할 경우 각 점에서의 계산부하를 가능한 균등하게 하여, 효율성을 향상시키기 위함이다.

2.5 포아송 방정식

비압축성 유체에 대한 무격자법 적용의 난제로서, 압력에 관한 포아송 방정식의 해법을 들 수 있다. 본 연구에서는, 차분법에 있어서의 SOR법(Successive Over Relaxation Method)과 같이 압력의 2 계 미분계수를 주목점에서의 압력항과 주변점에서의 압력항으로 나누고, 완화 계수를 이용해서 압력을 축차갱신하는 무격자법 기반의 SOR법을 개발하였다.

임의로 배치된 각 계산점에 있어서, 시각 n 에서의 포아송 방정식 (12)의 수렴계산을 행하여, 시각 n 에 있어서의 압력장을 구한다. 이 때, 우변항은 시각 n 에서의 주목점 i 주변의 속도장으로부터 구해지는 중간속도의 식 (13)에 의해 계산된다.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \bar{u}}{\Delta t} (= RHS_i^n) \tag{12}$$

$$\frac{\bar{u} - u^n}{\Delta t} = -(u^n \cdot \nabla)u^n + \frac{1}{\nu} \nabla^2 u^n \tag{13}$$

이 때, 주목점 i 의 주변점 j 의 압력을 다음과 같이 가정한다.

$$p_j^* = p_i + a_i \Delta x_j + b_i \Delta y_j + c_i \Delta x_j^2 + d_i \Delta x_j \Delta y_j + e_i \Delta y_j^2 \tag{14}$$

주변점에서의 압력분포를 식 (14)로 가정한 후, 가정된 압력 p_j^* 와 실제 값 p_j 와의 잔차에 가중을 곱한 지승 합 Q 가 최소가 되는 조건으로부터 식 (9)의 형태의 식이 유도되며, 이를 고쳐 써 보면 식 (15)와 같다.

$$\mathbf{A}_w \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \\ e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum w_j \Delta x_j p_j \\ \sum w_j \Delta y_j p_j \\ \sum w_j \Delta x_j^2 p_j \\ \sum w_j \Delta x_j \Delta y_j p_j \\ \sum w_j \Delta y_j^2 p_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum w_j \Delta x_j \\ \sum w_j \Delta y_j \\ \sum w_j \Delta x_j^2 \\ \sum w_j \Delta x_j \Delta y_j \\ \sum w_j \Delta y_j^2 \end{pmatrix} p_i \tag{15}$$

식 (15)를 포아송 방정식의 해법에 사용되는 압력의 2 계 미분계수에 해당하는 c_i 및 e_i 에 대해서 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c_i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \alpha_c - \beta_x p_i, \quad e_i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \alpha_e - \beta_y p_i \tag{16}$$

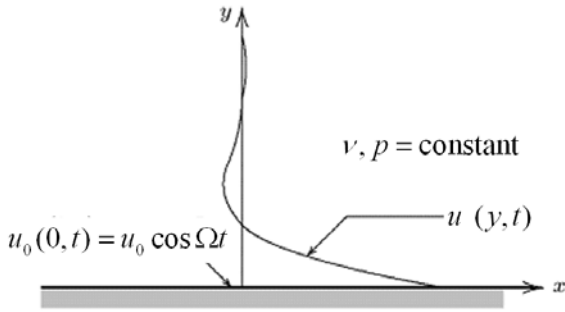


Fig. 4 Schematic view of Stokes' second problem

여기서, 계수행렬 A_w 의 역행렬을 B 라고 하면, 계수 α 와 β 는 식 (17)과 같이 나타낼 수 있고, 이 식을 포아송 방정식인 식 (12)에 대입하여 p_i 에 대하여 정리하면 식 (18)과 같으며, 이 p_i 값을 식 (19)와 같이 완화계수에 의하여 갱신한다.

이 갱신된 값은, 이후의 주목점에서 같은 계산을 행할 때의 주변점의 값으로서 이용된다. 전 계산점에 대하여 같은 방식으로 갱신을 행하고, 전시간 스텝의 압력 p_i^{old} 와 식 (18)의 잔차를 식 (20)로부터 구한다.

$$\begin{pmatrix} \alpha_c \\ \alpha_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum w_j \Delta x_j p_j \\ \sum w_j \Delta y_j p_j \\ \sum w_j \Delta x_j^2 p_j \\ \sum w_j \Delta x_j \Delta y_j p_j \\ \sum w_j \Delta y_j^2 p_j \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_c \\ \beta_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum w_j \Delta x_j \\ \sum w_j \Delta y_j \\ \sum w_j \Delta x_j^2 \\ \sum w_j \Delta x_j \Delta y_j \\ \sum w_j \Delta y_j^2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$p_i = \frac{2(\alpha_c + \alpha_e) - RHS_i^n}{2(\beta_c + \beta_e)} \quad (18)$$

$$p_i^{new} = (1 - \omega)p_i^{old} + \omega p_i \quad (19)$$

$$res = \sqrt{\frac{\sum_i (p_i - p_i^{old})^2}{\sum_i i}} \quad (20)$$

이 잔차가, 기준값 이하일 때 갱신된 압력장을 포아송 방

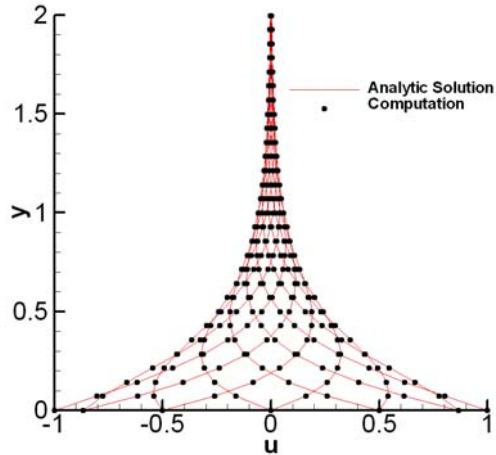


Fig. 5 Velocity profiles due to an oscillating wall

정식의 수렴해로 간주한다. 반면, 기준값을 상회하는 경우, 시간 스텝은 진행시키지 않고, 한 번 더 전체 계산점의 압력을 갱신시킨다. 따라서 이 경우, 식 (19) 및 식 (20)에 있어서의 p_i^{old} 는 전시간 스텝의 값이 아닌, 같은 시간 스텝내에서 이전에 갱신된 값 p_i^{new} 가 된다. 이처럼, 동일 시간스텝 내에서 반복계산을 행하는 것으로 포아송 방정식의 수렴해를 얻는다. 속도 및 압력의 경계조건에 관한 내용은 3.2절에 설명한다.

3. 수치 시뮬레이션

3.1 진동하는 무한평판주위의 유동해석

본 계산기법의 정확도를 검증하기 위하여, Fig. 4와 같이 평판과 평행한(x) 방향으로 $u(0,t) = u_0 \cos(\Omega t)$ 의 속도로 진동하는 무한평판주위의 점성유동을 해석하였다. 이 문제는 Stokes의 제2문제로 알려져 있으며, 식 (21)과 같은 해석해가 존재한다. 최대 유속 u_0 은 1, 주파수 Ω 는 π , 동점성계수 ν 는 0.2로 설정하였다. 한 주기내의 각기 다른 시간에서의 계산되어진 속도분포와 해석해를 Fig. 5에서 보이고 있다. 두 결과가 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

$$u(y,t) = u_0 e^{-\eta} \cos(\Omega t - \eta), \eta = \sqrt{(\Omega/2\nu)} y \quad (21)$$

3.2 2차원 Cavity 유동해석

실험결과와의 비교가 가능한 2차원 cavity 유동해석을 수행하였다. Cavity는 정사각형으로서, Fig. 6과 같이 상부경계면은 수평방향으로 일정한 속도(u)가 주어져 있으며, 나머지 경계면은 모두 벽으로 구성되어 있다. 본 연구에서 개발된 방법은

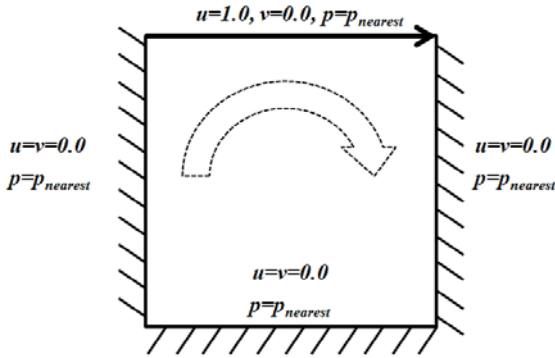


Fig. 6 Schematic view and boundary conditions for 2-D cavity problem

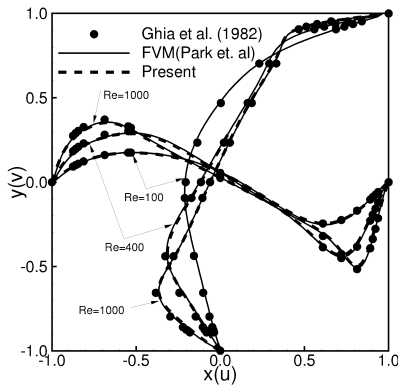


Fig. 7 Comparison of velocity profiles at the horizontal and vertical center planes

격자법의 비엇갈림 (non-staggered, collocated) 격자계에 해당하며, 엇갈림격자계를 사용하는 유한체적법에서처럼 물체경계면에서 자동으로 연속방정식을 만족하지 않는다. 그러므로, 보다 엄밀한 계산을 위해서라면, 물체경계면에서 연속방정식을 만족시키기 위해 식 (22)과 같이 비침투(non-penetrating)조건을 직접 부여하여야만 한다.

$$\frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial n} = 0 \tag{22}$$

여기서 n 은 물체표면과 수직한 방향이다.

2차원 캐비티 문제의 경우, 물체 경계에 대한 속도경계조건은 식 (23)과 같이 Neumann 형의 경계조건으로 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \text{ at } x=0, 1, \quad 0 < y < 1 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \text{ at } y=0, 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \tag{23}$$

상기의 속도경계조건을 풀기 위한 간단하면서 효율적인 방법 중 하나는 경계점에 수직한 방향에 계산점($p_{nearest}$)을 위치시켜 경계면상의 점과 국소적으로 직교하도록 국소격자를 구성하는 것이다. 이렇게 국소직교 격자를 구성한 후, FDM의 편차차분을 이용하여 경계면에 위치한 점에서의 구배를 구하여, 중간속도의 경계조건을 부여할 때, 경계면상의 점이 아닌 $p_{nearest}$ 에 식 (23)을 만족하도록 값을 부여하는 방법이다.

벽 경계에서의 압력에 관한 경계조건은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ at } x=0, 1, \quad 0 < y < 1 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \text{ at } y=0, 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \tag{24}$$

식 (24)를 풀기 위해서는 벽 인쪽에 더미 격자를 사용하는 방법, 우변항을 벽면경계상의 점위에서 MLS과정을 통해 직접 구하거나 국소직교 점을 벽면으로부터 두 개가 위치하도록 하여 편차차분으로 구한 후, 압력에 대하여 다시 편차차분을 이용하는 방법 등이 가능할 것이다.

본 연구에서는 간략화를 위하여, 경계면과 수직한 위치에 한 개의 계산점을 위치시켜 경계점과 짝을 이루도록 하였으며, 벽면근처에서는 속도의 2차 미분항이 상대적으로 작다고 가정하여, 경계면 상의 점의 압력을 짝을 이루는 점의 압력과 같다고 하였다.

3.2.1 균일분포

계산점을 수평방향(x)과 수직방향(y)으로 각각 80, 100, 120 개씩 균일하게 분포시킨 경우에 대하여 계산을 수행하였다. 이 때, 각각의 Reynolds 수는 100, 400, 1000로 설정하였다.

Fig. 7은 수평 및 수직방향의 중앙 단면에서의 속도분포를 실험[10] 및 유한체적법을 이용한 기존의 결과[11]와 비교하여 보여주고 있다. 수치 해석 결과 모두 실험과 좋은 일치율을 보이고 있으며, 두 수치 해석 결과 사이의 오차는 최대 약 1% 미만으로 이는 상이한 수치 알고리즘에 의한 원인으로 해석될 수 있다.

3.2.2 비균일 분포 및 랜덤 분포

Fig. 8과 같이 계산점이 격자법의 가변격자와 같이 비균일적으로 분포된 (a)의 경우와 균일 및 비균일 분포에 각각 불규칙성(Randomness)이 부여된 (b)와 (c)의 경우에 대하여 Reynolds수 100을 대상으로 계산을 수행하였다. 기본이 되는 격자점 수는 x 및 y 방향으로 각각 50개를 사용하였다. 불규칙성은 격자점 위치를 기준으로 원래 위치로부터 주변점과의 거리의 20~40% 정도 내에서 불규칙하게 변화하도록 부여하였

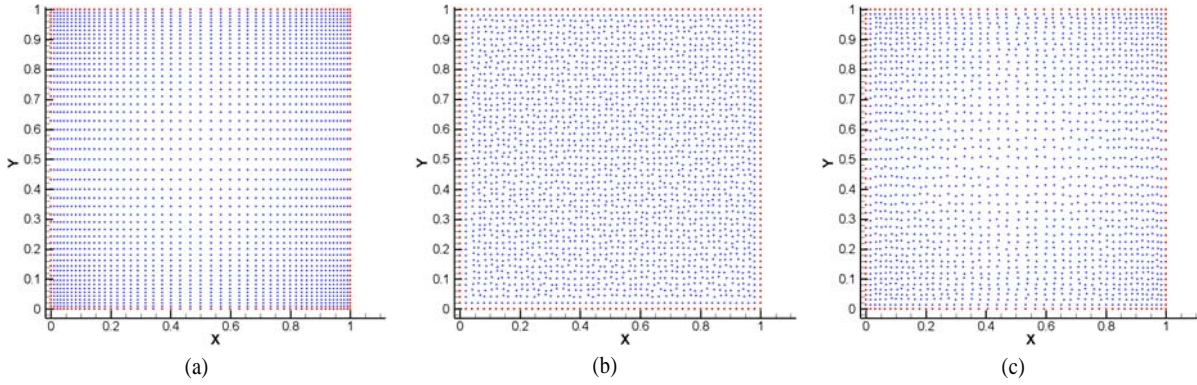


Fig. 8 Distributions of computational points for (a) variable, (b) randomized for the uniform, and (c) randomized for variable distributions

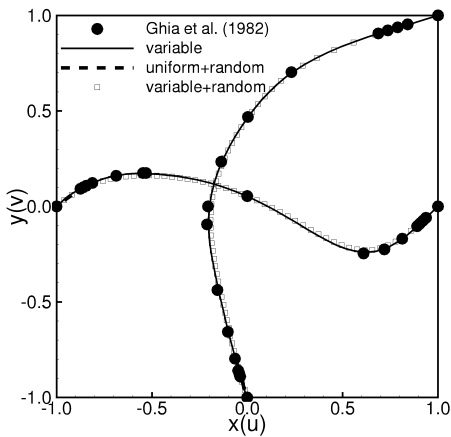


Fig. 9 Comparison of velocity profiles at the horizontal and vertical center planes in the cases of variable(a), randomized for the uniform(b) and variable(c) distributions

다. Fig. 9에 보이는 것처럼 3 경우 모두 실험치와 비교적 좋은 일치율을 보이고 있다.

3.2.3 계산속도의 비교

개발된 수치해법의 개략적인 성능추정을 위하여 간단한 계산속도의 비교를 수행하였다. 시간 및 공간 이산화법, 알고리즘, 멀티그리드 및 병렬화 등의 고속화 기법 등의 적용 유무에 따라 계산 속도가 크게 달라지므로, 가장 기초적인 사항만을 적용한 경우에 대하여 비교계산을 수행하였다.

격자(계산점)는 각 방향 80개를 사용하였으며, $Rn=100$ 의 경우에 대하여 계산을 수행하였다. 계산기로서는 952 개의 노드로 구성된 동경대학교의 오픈슈퍼컴퓨터인 HA8000[12] 중 1 노드를 이용하였다. 전체시스템의 OS는 Redhat Linux Enterprise 5.0이며, 각 계산노드는 AMD Quad Core Opteron

2.3 GHz CPU를 4개 장착하고 있다. 한 노드 내에선 각각의 CPU가 각각 8G의 RAM과 연결되어 있는 NUMA(Non-Uniform Memory Access) 아키텍처이며, Compiler는 intel fortran compiler(11.0.074)를 사용하였다. 병렬계산의 경우, 코드자체가 병렬화되어 있지 않으므로, compiler level에서의 자동 병렬화 옵션(-parallel)을 이용하였다. Table 1에서 보이듯이 한 개의 CPU만을 사용하는 경우는 기존의 유한체적법이 50퍼센트 정도 빠른 속도를 나타냈으나, NUMA구조로 인하여 자동병렬화의 효율이 굉장히 나쁘게 나타나고 있지만, 자동병렬화를 수행한 경우는 본 계산수법이 빠른 속도를 보이고 있다.

본 연구의 계산수법이 비구조적인 분포에도 대응함을 감안하여, 비구조격자를 사용하는 오픈 소스코드인 OpenFOAM [13]과도 계산시간을 비교하였다. OpenFOAM의 경우, 가변 시간증분 및 멀티그리드 법을 사용하지 않은 경우(*)와 이 두 가지를 모두 사용한 경우(**)의 계산시간을 보여주고 있다. OpenFOAM의 경우는 병렬계산을 수행하지 않았다. 표에서 보이듯이, 3배 이상 빠른 속도를 보이고 있다.

Table 1 Comparison of computational time

	Present	FVM	OpenFOAM
Cal Time(sec) [1core]	26.17	17.01	*355 **89.92
Cal. Time(sec) [16core,auto-parallel]	395.22 / 16	478.69 / 16	-
Grid System Variable Arrangement Algorithm	None Collocated FS	StructuredStaggered HSMAC	Unstructured Collocated PISO
Solver	-	-	icoFoam

4. 결 론

이동최소자승법을 이용하는 무격자 기반의 수치해석기법을 개발하였다. 정도 및 속도 향상을 위하여 Fractional Step법, Adams-Bashforth법을 도입하였으며, 주변점 검색 및 클라우드 구성의 고속화 및 자동화 기능을 개발하여 도입하였다. 개발된 기법을 이용하여, 저 Reynolds 수의 2차원 비정상 비압축 Navier-stokes 문제인 진동하는 무한평판주위의 유동 및 Cavity 유동에 대하여 수치해석을 수행하였다. 계산 결과는 해석해, 실험 및 기존 계산결과와 좋은 일치를 보였으며, 본 계산기법이 만족스러운 정확도를 가지고 있는 것을 확인하였다.

본 계산기법은 향후 격자생성이 복잡한 문제나, 물체의 운동을 포함한 시뮬레이션등에 용이하게 적용될 수 있을 것으로 기대된다. 향후, 본 연구에서는 간략화했던 물체경계 상에서의 압력경계조건 부여법, 고레이놀즈 및 3차원 유동에의 적용을 위해 클라우드 구성 및 가중합수에 대한 의존도 파악, 계산 안정화 기법에 대한 연구를 수행할 계획이다.

참고문헌

- [1] 1988, Monaghan, J.J., "An Introduction to SPH," *Comput. Phys. Comm.*, Vol.48, pp.89-96.
- [2] 1996, Koshizuka, S. and Oka, Y., "Moving-Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid," *Nucl. Sci. Eng.*, Vol.123, pp.421-434.
- [3] 1993, Batina, T., "A Gridless Euler/Navier-Stokes Solution Algorithm for Complex Aircraft Applications," *AIAA Paper 93-0333*.
- [4] 1996, Onate, E. and Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.Z., Taylor, R.L. and Sacco, C., "A Stabilized Finite Point Method for Analysis of Fluid Mechanics Problems," *Comput. Methods Appl. Engrg.*, Vol.139, pp.315-346.
- [5] 2006, Sakamoto, M. and Suzuki, K., "Simulation of Incompressible Separated Flow around a Body Using Gridless Method," *Proc. 20th CFD symposium (of Japan)*, Tokyo, 2008, C2-1, CD-ROM (in Japanese).
- [6] 1974, White, F.M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, pp. 148-149.
- [7] 2001, Yoon, H.Y., Koshizuka, S. and Oka, Y., "Direct Calculation of Bubble Growth, Departure, and Rise in Nucleate Pool Boiling," *Int. J. Multiphase Flow*, Vol.27, pp.277-298.
- [8] 1997, Ogawara, K. and Iida, S., "Upwinding of Least Square Convection Estimate for Unstructured Grids," *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.5, pp.1592-1596.
- [9] 2004, Bendez, B. and Velazquez, A., "Finite point solver for the simulation of 2-D laminar incompressible unsteady flows," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol.193, pp.825-848.
- [10] 1982, Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., "High Resolutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. Comput. Phys.*, Vol.48, pp.387-411.
- [11] 2005, 박종천, 문진국, 전호환, 서성부, "주기회전하는 원형 실린더 주위 층류 유동장의 수치시뮬레이션," *대한조선학회논문집*, 제42권, 제4호, pp.368-378.
- [12] <http://www.cc.u-tokyo.ac.jp/service/ha8000/>
- [13] <http://www.opencfd.co.uk/openfoam/>