중등영재학생들의 수학적 사고 선호도와 논리형 문제의 해결능력에 관한 통계적 검증 연구

(A statistical study of mathematical thinkings and problem-solving abilities for logical-type problems with reference to secondary talented students)

박 홍 경*
(Hong-Kyung Pak)

요 약 수학적 사고의 입장에서 중등학생들이 수학적 문제해결에 논리적 사고와 직관적 사고가 어떻게 작용하는지를 연구하는 것은 수학교육에서 중요하고도 흥미로운 과제의 하나이다. 본 연구의 주된 목적은 중등학교 영재학생을 대상으로 이러한 문제를 조사하는 것이다. 특히 이들 중등영재학생들의 논리적 사고와 직관적 사고에 대한 선호도와 논리형 문제의 문제해결능력 사이의 관계를 로지스틱 회귀분석을 이용하여 조사한다.

핵심주제어 : 문제해결학습, 논리적 사고, 직관적 사고, 로지스틱 회귀분석

Abstract It is one of important and interesting topics in mathematics education to study the process of the logical thinking and the intuitive thinking in mathematical problem-solving abilities from the viewpoint of mathematical thinking. The main purpose of the present paper is to investigate on this problem with reference to secondary talented students (students aged 16~17 years). In particular, we focus on the relationship between the preference of mathematical thinking and their problem-solving abilities for logical-type problems by applying logistic regression analysis.

Key Words : problem-solving learning, logical thinking, intuitive thinking, logistic regression analysis

Ⅰ. 서 론

수학적 사고에 있어서 논리적 사고와 직관적 사고는 구분되어진다([1], [4]). 일반적으로 이들의 뜻과 특징을 비교하면 다음과 같다. 교육공학에서는 사전적으로 논리적 사고는 가정에서 결론을 이끌어내는 과정이 분석적이고 단계적이며 타당한 사고작용이며 직관적 사고는 논리적 사고 없이 결론을 이끌어내는 사고작용으로 규정하고 있다. 논리적 사고가 사고의 근거를 명확히 하는 것에 있다면 직관적 사고는 문제해결의 아이디어를 통찰하고 논리적 사고의 방향을 시사해준다. 하지만 개념 규정이나 문제해결과정에 있어서 논리적 사고와 직관적 사고는 별개로 작용하는 것이 아니라 종종 서로 돕거나 동시에 일어나는 등 상호작용을 하므로 이들을 명

* 대구한의대학교 인터넷 정보학과 교수

확히 구분하는 일은 어려우며 현재도 많은 논란이 되고 있다.

두뇌의 기능적 입장에서는 논리적 사고와 직관적 사고는 각각 좌뇌와 우뇌에 관련된다. Glennon은 여러 연구결과로부터 좌뇌는 논리적, 언어적, 분석적, 선형적, 순차적, 개념적 상사의 기능을 담당하고, 우뇌는 직관적, 가시공간적, 종합적, 동시적, 다중처리적, 구조적 상사의 기능을 담당하는 것으로 비교 요약하였다([6]).

논리적 사고와 직관적 사고에 관한 연구로서 [4], [5]에서는 시각화를 중심으로 이러한 사고 작용에 관해 다루었다. 한편 최근의 논문에서 수학적 개념은 직관적, 논리적, 형식적으로 구분하여 다루어졌다([2], [3]). 개념의 유형을 고려할 때 직관적 개념과 논리적 또는 형식적 개념은 각각 직관적 사고와 논리적 사고에 대응한다.

Tall은 "두뇌를 사용하는 가장 강력한 방식은 양자의 사고를 통합하는 전뇌적인 것임을 보여주는 증거들이 많다. 우뇌는 거시적 연결과 패턴의 통합을 좌뇌는 개념사이의 관련성을 분석하고 논리적 추론을 세운다. 이것은 사고의 전뇌적 방식에 무게를 두는 수학적 지식의 새로운 통합을 요구한다. 특히 직관에 호소하면서 엄밀한 규정을 줄 수 있는 (논리적) 접근방법이 필요하다"고 주장하였다([7]). 말하자면 논리적 사고와 직관적 사고의 적절한 통합인 전뇌적 사고는 보다 강력한 수학적 사고라 할 수 있다. 이러한 점에서 학생들의 수학적 사고력 향상을 위해서는 논리적 사고나 직관적 사고 각각의 개별적 발달도 중요하지만 이들의 적절한 통합을 통해 균형잡힌 전뇌적 사고의 강화는 더욱 중요하다.

전뇌적 사고 향상을 목적으로 하기 위해서는 2가지 분석적 연구가 선행될 필요가 있다. 우선 학생 개개인의 수학적 사고에서 논리적 사고나 직관적 사고의 선호도를 명확히 진단할 수 있어야 한다. 또한 이러한 선호도가 개념학습이나 문제해결학습에 있어서 어떻게 작용하는지에 대한 메커니즘을 규명해야 한다. 하지만 이러한 논리적 사고와 직관적 사고의 작용을 명확히 구분하여 분석하는 일은 매우 어려울 뿐만 아니라 장기적인 과제이다.

이러한 연구과제의 시발점으로서 본 논문에서는 수학적 사고의 입장에서 학생들이 수학적 문제해결에 논리적 사고와 직관적 사고가 어떻게 작용하는지를 간단히 조사하고자 한다. 본 연구의 주된 목적은 중등학교의 영재학생을 대상으로 이러한 문제를 조사하는데 있다. 특히 여기서는 논리적 사고와 직관적 사고에 대한 선호도와 논리형 문제의 문제해결능력 사이의 관계를 조사한다.

연구는 52명의 중등학교 영재학생을 대상으로 총 5문항의 진단평가를 실시하였다. 시험문제는 수학적 사고에서의 선호도를 조사하는 문항 3개(문제1, 문제3, 문제4)와 논리형 문항 2개(문제2, 문제5)로 구성하였다(<부록> 참조). 주된 방법은 선호도를 독립변수로 두고, 문제해결능력을 종속변수로 두고 두 변수 사이의 관계조사를 위해 로지스틱 회귀분석을 실시하였다.

본 논문의 개선을 위해 심사위원의 여러 중요하고 의미있는 의견과 조언에 깊은 감사를 드린다.

II. 연구방법 및 절차

본 연구에 동원된 연구대상은 지방에 소재한 K 교육청 중등영재교육원에서 주관한 2007학년도 하계 중등 수학영재학생이다. 대상자는 <표 1>과 같이 중학교 3학년 28명, 고등학교 1학년 24명, 총 52명이었다.

<표 1> 연구대상의 학교, 성별에 따른 분류

학교	남	여	소계
중학생	23	5	28
고등학생	18	6	24
소계	41	11	52

본 연구에서는 총 5문항에 대해 10분 동안에 문제를 풀도록 하였다. 답은 반드시 하나를 선택하도록 강하게 요구하지는 않았다. 그래서 일부의 학생들은 다중선택을 하는 경우도 있었다.

연구를 수행하기 위하여 제작한 문항은 두 유

형으로 나뉜다. 하나는 선호도조사 문항이고 다른 하나는 논리형 문항이다. 전자는 중등 영재 학생들의 성별, 학교등급에 따른 논리적 사고와 직관적 사고에 대한 선호도 조사를 목적으로 3가지 선택형 문항을 제시하였다.

문제1 : 대수적 공식의 증명

문제3 : 함수의 표현(직관은 다시 연속(그래프)과 이산(대응다이어그램)의 경우로 세분)

문제4 : 연립1차방정식의 문제해결(직관은 다시 함수와 벡터 활용으로 세분)

다른 하나는 이러한 사고의 선호도가 논리형 문제의 문제해결능력 사이의 상관성을 조사하기 위해 2가지 논리형 문제가 제시되었다. 그것은 대수적 문제와 해석적 문제였다.

문제2 : 대수적 공식의 복소수로의 확장

문제5 : 함수의 그래프를 구체적으로 그릴 수 없는 경우

이것은 다음과 같은 의미에서 논리형 문제에 해당한다. 문제2의 경우, 대수식을 실수에서 복소수로 확장하기 위해서는 직관적 사고만으로는 부족하다. 복소수의 개념은 실제적이거나 직관적 사고의 대상은 아니기 때문이다. 따라서 논리적 사고의 뒷받침이 있을 때 정답을 맞출 수 있다.

문제5의 경우, 함수의 그래프를 구체적으로 그릴 수 없는 경우에도 함수의 여부를 판정할 수 있기 위해서는 함수의 직관적 사고만으로는 어렵다. 함수 개념에 대한 논리적 사고가 바탕이 되어야 하기 때문이다.

조사방법은 구체적으로 다음과 같이 2가지 단계로 나누어 비교분석하였다. 하나는 선호도조사를 위한 개별 문항과 논리형 문항들에 대한 문제해결능력 사이의 상관성을 조사한다. 다른 하나는 선호도조사 문항을 종합하여 이를 논리적 사고의 선호학생과 직관적 사고의 선호학생의 두 집단으로 구분함으로써 이들 집단과 논리형 문항들에 대한 문제해결능력 사이의 상관성을 조사한다.

본 연구는 명백한 한계점을 가진다. 실험대상은 영재학생 52명의 소집단이라 할 수 있다. 특히 여학생의 수는 영재교육의 특성상 11명으로 현저히 적었다. 그래서 확대해석을 피하기 위해서는 향후 모집단의 규모를 확대한 연구 보완이 필요하다. 이러한 방향으로의 후속 연구를 기대한다.

III. 연구 결과 및 분석

먼저 중등 영재학생들의 논리적 사고와 직관적 사고에 대한 선호도조사를 위한 3가지 문항에 대한 결과는 다음과 같다.

<표 2> 문제1의 결과

학교	성별	①논리	②직관	무응답	소계
고등	남	11	7	0	18
	여	2	4	0	6
중	남	10	13	0	23
	여	2	3	0	5
소계		25	27	0	52

<표 3> 문제3의 결과

학교	성별	①논리(전부)	②직관	무응답	소계
고등	남	16(1)	2	0	18
	여	3(1)	1	2	6
중	남	16	7	0	23
	여	5	0	0	5
소계		40(2)	10	2	52

<표 3>에서 ①함수의 대응규칙으로 선택한 것은 논리로, ②그래프와 ③대응다이어그램으로 선택한 것은 직관으로 정리하였다. 또한 3가지 모두 답한 경우(고등학생 2명)는 논리에 포함시켰다. 그들은 각 경우에 대한 장단점을 분명히 알고 있었으며 상황에 맞게 사용해야 한다는 답변을 하였기에 논리를 명확히 알고 있다는 것으로 해석할 수 있기 때문이다.

<표 4> 문제4의 결과

학교	성별	①논리(전부)	②직관	무응답	소계
고등	남	12(1)	6	0	18
	여	4(3)	2	0	6
중	남	17	6	0	23
	여	4	1	0	5
소계		37(4)	15	0	52

<표 4>에서 ①연립방정식에 의한 해법을 선택한 것은 논리로, ②함수의 그래프와 ③벡터에 의한 해법을 선택한 것은 직관으로 정리하였다. 또한 문제3에서와 마찬가지로 3가지 모두 답한 경우(고등학생 4명)는 논리에 포함시켰다.

다음으로 이러한 수학적 사고의 선호도가 논리형 문제의 문제해결능력 사이의 상관성을 조사하기 위해 2가지 논리형 문제의 해결 결과이다.

<표 5> 문제2의 결과

학교	성별	①정답	②오답	무응답	소계
고등	남	17	1	0	18
	여	4	1	1	6
중	남	14	6	3	23
	여	5	0	0	5
소계		40	8	4	52

<표 6> 문제5의 결과

학교	성별	①정답	②오답	무응답	소계
고등	남	11	6	1	18
	여	5	0	1	6
중	남	13	3	7	23
	여	4	0	1	5
소계		33	9	10	52

이제 위의 선호도 조사결과에 따른 논리형 문제의 문제해결능력 사이의 관계를 조사한다. X를 주어진 문제를 해결하면 1, 아니면 0이 되는 확률변수라 정의한다. 그러면 $p = P\{X=1\}$는 주어진 문제를 해결할 가능성(확률)이라고 볼 수 있다. 이 확률에 대해, 독립변수인 성별(sex), 학교(school), 문제1(q1), 문제3(q3), 문제4(q4)와 2개의 논리형 문제(문제2(q2)와 문제5(q5))의 해결능력 사이의 관계를 조사한다. 이 때 성별에서는 남=1, 여=0, 학교에서는 고등학교=1, 중학교=0, 3개의 선호도조사 문항에서는 직관=1, 논리=0, 논리형 문제에서는 정답=1, 오답=0으로 하였다. 무응답은 오답으로 처리하였다.

분석을 위해 다음의 로지스틱 회귀모형을 가정하였다.

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 sex + \beta_2 school + \beta_3 q1 + \beta_4 q3 + \beta_5 q4 + \epsilon$$

여기서 ϵ은 오차항으로 표준정규분포를 하는 확률변수이다. 즉,

$$\epsilon \sim N(0, \sigma^2).$$

이 모형에 대해 분석을 실시하였다. 문제2에 대한 분석결과는 <표 7>과 같다.

<표 7> 문제2에 대한 분석I

독립변수	추정값 (추정값 표준편차)	$p-$값
절편	2.5770(1.4606)	0.0777*
성별	26.2722(2599921.7)	0.9999
학교	3.0071(1.2824)	0.0190*
문제1	0.6112(0.9305)	0.5114
문제3	0.1837(1.0714)	0.8638
문제4	-1.7603(1.0412)	0.0909*

<표 7>로부터 중학교보다는 고등학교학생이 문제2의 해결능력이 높게 나타났다(p=0.0190). 또한 문제4의 선호도는 문제2의 해결능력에 대해 영향을 주는 것으로 나타났다(p=0.0909). 즉, 문제4에서 논리적 사고의 선호학생이 직관적 사고의 선호학생 보다 문제2의 해결능력이 높다고 할 수 있다.

다음으로 문제5의 해결능력을 종속변수로 하는 로지스틱 회귀분석의 결과는 <표 8>과 같다.

<표 8> 문제5에 대한 분석I

독립변수	추정값 (추정값 표준편차)	$p-$값
절편	-0.5960(0.8961)	0.5059
성별	-0.9455(0.8974)	0.2920
학교	0.0561(0.6252)	0.9285
문제1	-0.6084(0.6386)	0.3407
문제3	-0.2147(0.7820)	0.7837
문제4	-0.7158(0.6888)	0.2987

<표 8>로부터 문제5의 경우는 문제2와는 달리 유의한 독립변수는 없으나. 문제1과 문제4에서 논리적 사고의 선호학생에 대한 회귀계수 추정값의 부호가 음수인 점을 고려할 때, 문제1과 문제4에 대한 선호도는 문제5에 약간의 영향이 있는 것으로 보인다. 즉, 문제1과 문제4에서 논리적 사고의 선호학생이 직관적 사고의 선호학생 보다 문제2의 해결능력이 약간 높다고 할 수 있다.

다음으로 새로운 변수로서 sc를 문제1, 문제3, 문제4의 합계라 하고 수학적 사고의 선호도와 논리적 문항들에 대한 문제해결능력 사이의 상관성을 조사한다. 이를 위해 sc=3, 4인 경우는 논리적 사고의 선호학생으로 sc=5, 6인 경우는 직관적 사고의 선호학생으로 구분하였다. 전자는 각 문항에서 1번(논리적 사고의 선택)을 2번 이상 응답한 경우이며 후자는 각 문항에서 2번(직관적 사고의 선택)을 2번 이상 응답한 경우를 뜻한다. 이를 이용한 문제2의 분석결과는 다음과 같다.

<표 9> 문제2에 대한 분석II

독립변수	추정값 (추정값의 표준편차)	$p-$값
절편	1.9182(0.6579)	0.0035
성별	-0.2635(0.8864)	0.7663
학교	1.1514(0.7472)	0.1233
sc	-0.2501(0.8136)	0.7585

<표 9>에서 보듯이, 문제2의 경우 학교등급 사이에 차이가 약간 유의한 것으로 판단된다 (p=0.1233). 즉 <표 7>과 마찬가지로 중학교보다는 고등학교학생이 문제2의 해결능력이 높게 나타났다.

문제5에 대한 분석결과는 다음과 같다.

<표 10> 문제5에 대한 분석II

독립변수	추정값 (추정값의 표준편차)	$p-$값
절편	0.6102(0.4819)	0.2054
성별	-1.2077(0.8727)	0.1664
학교	0.0288(0.6177)	0.9629
sc	-1.2470(0.7600)	0.1008*

<표 10>에서 보듯이, 문제5에서는 sc=0인 경우가 문제해결능력이 높게 나타났다(p=0.1008). 이는 문제1, 문제3, 문제4를 종합할 때 논리적 사고의 선호학생이 직관적 사고의 선호학생보다 문제5의 문제해결능력이 높다고 볼 수 있다.

Ⅳ. 결 론

앞에서의 논의로부터 수학적 개념에 있어서 중등학교 영재학생의 논리적 사고와 직관적 사고의 선호도와 논리적 문제의 문제해결능력 사이의 관계를 조사한 결과 다음과 같이 요약할 수 있다.

먼저 문제2의 경우에는 고등학생이 중학생보다 문제해결능력이 높게 나타났다. 또한 논리적 사고의 선호학생이 직관적 사고의 선호학생 보다 문제2의 해결능력이 높게 나타났다. 그것은 중학생의 경우는 고등학생보다 상대적으로 복소수에 대한 지식부족과 논리적 사고가 다소 부족함을 보여주는 것에 기인한다고 할 수 있다.

반면에 문제5의 경우에는 문제2와는 달리 선호도가 문제해결능력에 미치는 영향이 크지 않은 것으로 나타났다. 이는 문제2의 복소수에 관한 개념은 중등학교 수준에서 다루어지는데 반해 문제5의 함수에 관한 개념은 중등학교 수준을 넘어서는 수학적 사고를 요하는 문제이기 때문에 논리적 사고와 직관적 사고의 선호도의 차이가 문제해결에 결정적인 작용을 하지 못한 것으로 판단된다.

하지만 흥미롭게도 문제1, 문제3, 문제4를 종합할 때 논리적 사고의 선호학생이 직관적 사고의 선호학생보다 문제5의 해결능력이 높게 나타났다. 그것은 중등학교 수준을 넘어서는 논리형 문제의 해결에 있어서 사고의 선호도가 영향을 미친다는 것을 말해준다.

여기에 한가지 부연하고자 하는 것은 문제5는 중등학교 수준을 넘어서는 문제이지만 본 연구 대상인 영재학생의 경우에는 중학교 17명, 고등학교 16명으로 정답율이 64%로서 비교적 높게 나타났다. 이러한 결과에 대해 동일한 연구를 (인문계) 일반학생들에게 적용하여 비교하는 것은 흥미로운 연구과제가 될 수 있다.

참 고 문 헌

[1] 김응태, 박한식, 우정호(2001), 수학교육학 개론, 서울대출판부.

[2] 박홍경, 김태완(2007), 미적분학에서 연속함수의 개념 지도, 한국데이터정보과학회지 18, 859-868.

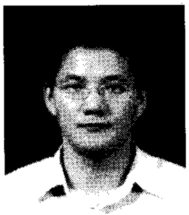
[3] 박홍경, 김태완, 이우동(2007), 수학적 개념의 유형과 효과적인 개념학습, 한국수학사학회지 20, 105-126

[4] 鈴木守(1993), 高校數學における論理的な思考力と直觀力, 日本數學敎育學會誌 75, 61-70.

[5] G. Bagni(1998), Visualization and didactics of amthematics in high school, Sci. Pedagogica Experimentalis 36, 161-180.

[6] V. J. Glennon(1980), Neuropsychology and the instrumental psychology of mathematics, The 7th Annual Conf. Research Council for diagnostic and prescriptive mathematics.

[7] D. Tall(1991), Intuition and rigour : the role of visualization in the calculus, Visualization in mathematics, M. A. A. Notes No. 19,



박 홍 경 (Hong-Kyung Pak)

- 정회원
- 1988년 2월 : 경북대학교 수학교육학과 (이학사)
- 1990년 2월 : 경북대학교 대학원 수학과 (이학석사)
- 1993년 3월 : 일본 가나자와대학교 대학원 자연과학연구과 (이학박사)
- 1993년 3월 ~ 현재 : 대구한의대학교 인터넷정보학과 정교수
- 관심분야 : 알고리즘, 전산통계

논문접수일 : 2009년 9월 7일
논문수정일 : 2009년 11월 11일
게재확정일 : 2009년 11월 12일

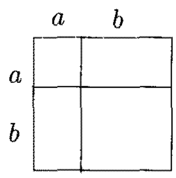
<부록: 진단평가지>

(   )학교 ( )학년   이름 (   )

1. 공식 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$에 대해 다음 증명 중에서 어느 것이 더 적합하다고 생각하는가? 그 이유는 무엇인가?

① $$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

②



이유 :

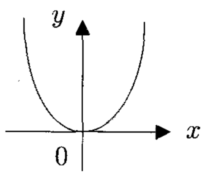
2. $a,b \in C$인 경우에는 위의 공식이 어떻게 되는가?

① 그대로 성립한다
② 성립하지 않는다
③ 기타(   )

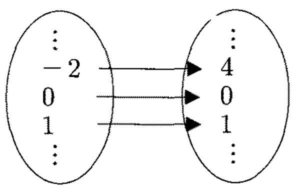
3. 다음 함수의 표현 중에서 어느 것이 더 적합하다고 생각하는가? 그 이유는 무엇인가?

① $f: R \to R,\ f(x) = x^2$

②



③

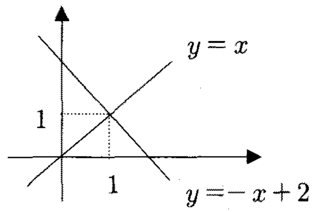


이유 :

4. 다음의 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$의 해를 구하는 증명 중에서 어느 것이 더 적합하다고 생각하는가? 그 이유는 무엇인가?

① (소거법) 먼저 두 식을 더하면 $2x = 2$, 따라서 $x = 1$. 이것을 한 식에 대입하면 $y = 1$을 얻는다.

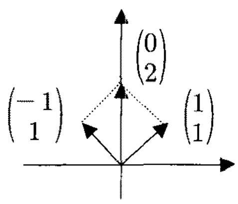
② (함수의 그래프 이용) 두 연립방정식을 그래프로 나타내면 그림과 같다. 그러면 연립방정식의 해는 두 직선의 교점이므로 $(x,y) = (1,1)$이다.



③ (벡터 이용) 주어진 연립방정식을 벡터의 개념을 이용하면

$$x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

으로 나타낼 수 있다. 그러면 그림과 같이 평행사변형 법칙에 의해 $x = 1,\ y = 1$을 얻는다.



이유 :

5. 다음 관계식의 그래프를 그리고 함수인지를 조사하여라.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Q \\ 1, & x \in Q^c \end{cases}$$