經營科學
第26卷 第1號
2009年 3月

중량물 적재를 위한 자동창고의 주기시간 평가*

김 창 현**

Cycle Time Evaluation of Automated Storage and Retrieval System for Heavy Loads

Chang Hyun Kim**

■ Abstract ■

In this paper, a model is presented to estimate a cycle time for completing an operation in a new type of AS/RS which can handle very heavy loads by separating the mechnisms for vertical and horizontal movements. Considering loading/unloading time between devices, we generalize the previous work, Hu et al.[9], which neglected the transfer time. Through the numerical experiments for various situations, we find that the difference of the cycle times between two models is fairly large and conclude that the transfer time between devices cannot be neglected at all.

Keywords : AS/RS, Travel time model, Container terminal

1. 서 론

최근 중국에서의 대규모 컨테이너 항만 건설과 함께 세계 각국의 컨테이너 항만간의 경쟁이 그 어느 때보다 치열하다. 지난 수십년 동안 컨테이너 항만에서는 터미널 운영의 최적화를 통하여 항만 경쟁력을 갖추려는 많은 노력들이 이루어져 왔다. 하지만, 현재의 컨테이너 장치장에서와 같이 지표면상에 컨테이너를 수직으로 쌓는 방식으로는 항만부지 확보의 어려움과 함께 하단의 컨테이너를

논문접수일 : 2008년 09월 02일 논문수정일 : 2008년 12월 14일 논문게재확정일 : 2009년 01월 08일
* 이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2007-332-B00186).
** 전남대학교 문화사회과학대학 경상학부

추출하기 위하여 상단의 컨테이너를 옮겨야하는 재작업의 발생으로 증가일로에 있는 컨테이너 물동량 처리에 한계를 느끼고 있다.

이러한 배경으로 최근 창고/보관 분야에서 괄목할 만한 하드웨어적인 기술 발전에 힘입어 중량 20톤 이상의 컨테이너와 같은 중량물을 대상으로 건물 형태의 창고형 고단적 자동창고(AS/RS)시스템을 적용하려하는 시도가 허브 항만을 지향하려 하는 세계 여러나라의 주요 항만에서 꾸준히 시도되고 있다(Chen et al.[5], Hu et al.[9], Khoshnevis and Asef-Vaziri[10]). 이러한 시도는 전 세계적인 컨테이너 물동량의 증가에 기인하여 컨테이너 선형이 1980년대 4,000TEU급에서 최근에는 12,000TEU급으로 급격히 증가한 반면, 선사는 선박의 회전율을 높이기 위하여 운항시간의 상당 부분을 차지하고 있는 하역작업시간의 단축이 가능한 고생산성의 터미널에 기항하려고 하기 때문에 신개념의 터미널을 개발하려고 하는 것이다. 우리나라에서도 지능형 항만물류시스템의 개발을 착수한 것으로 알려져 있다(부산일보 2006년 9월 28일자 보도).

대부분의 전통적인 자동창고에서의 S/R 기기는 수직, 수평이동이 일체화되어 수직, 수평 방향을 동시에 이동할 수 있도록 설계되어 있다. 반면, 중량물을 대상으로 한 자동창고의 가장 큰 특징은 수직이동 기기와 수평 이동 기기가 별개로 존재하여 창고내에서의 운행이 독립적이라는 것이다. 이와 같이 수직, 수평이동이 독립적이기 때문에 20톤 이상의 중량물을 비교적 빠른 속도로 이동시킬 수 있다.

신개념의 자동창고에 대한 관심과 필요성이 제기된 시기가 최근이기 때문에 그에 대한 연구는 드물다. Khoshnevis and Asef-Vaziri[10]는 미국내 컨테이너 항만에서 컨테이너를 위한 AS/RS를 도입할 경우, 도입에 대한 경제적 타당성을 검토하기 위하여 가상적인 항만 환경하에서 시간당 처리능력, 공간 활용률, 장비 이용률 등 3가지 평가항목을 두고 시뮬레이션 실험을 실시하였다. 그들은 시뮬레이션을 통하여 평가항목들이 현재 시스템보다 현격하게 개선되어 경제적 타당성이 충분하다는 것을 입증하였으며, 실용화에 대비하여 향후 연구 방향을 제시하였다.

Chen et al.[5]와 Hu et al.[9]는 중량물인 컨테이너를 처리할 수 있는 Platform 기반의 AS/RS를 대상으로 하여 컨테이너를 입고하거나 출고할 때 소요되는 주기시간을 수리적인 모형으로 제시하였다. 그들은 창고의 규모를 결정하는 요소인 베이(Bay)수, 층수, 셀(Cell)의 수, 셀의 높이, 셀의 길이 등에 의한 다양한 조합으로 이루어지는 대안들에 대하여 입고 또는 출고시 소요되는 주기시간과 함께 요소들에 대한 민감도를 분석하였다.

최상희, 하태영[1]은 우리나라 항만에 적용할 차세대 항만을 위한 고효율 야드시스템의 개발과 발전방향을 제시하였다. 이들은 야드에서 랙 구조물을 이용한 고단적 적재 시스템을 항만에 적용할 경우 평면배치에 따른 부지절감의 효과 등을 추정하였다. 연구 결과로서 컨테이너 처리 생산성은 기존 야드시스템에 비하여 고단적 적재장치시스템의 생산성이 약 2.7배 높을 것으로 추정하였고, 부지 절감 효과는 160만 TEU를 처리할 경우 기존 부지의 약 17.8%~26.7%만이 소요될 것으로 추정하였다. 이들은 향후 과제로서 고밀도 고단적 적재시스템에 대한 다양한 운영규칙 개발과 장치 내부의 구조변화에 따른 생산성 변화 등을 평가하여 최적화 연구가 이루어져야 한다고 강조하였다.

수직, 수평이동이 일체화된 전통적인 자동창고를 대상으로 한 입출고 소요 시간 추정 모형들은 다양한 현실 조건을 반영하여 지금 현재까지도 꾸준히 발표되고 있으며, 대표적인 연구조사 논문들은 Berg and Zijm[3], Cormier and Gunn[6], Gu et al.[7, 8], Rouwenhort et al.[11]들을 들 수 있다.

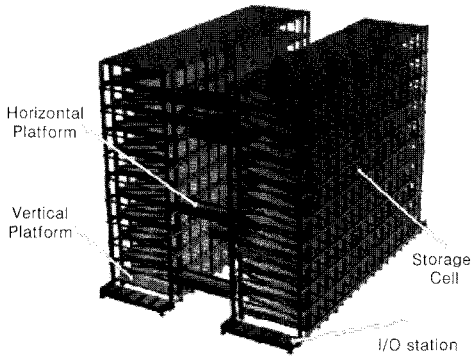
본 연구에서는 신개념 자동창고에 관한 Hu et al.[9]의 연구를 보다 일반화하여 물품을 입고하거나 출고할 때 소요되는 주기시간을 추정하는 모형을 제시하려고 한다. Hu et al.[9]는 자동창고 내 기기 사이의 물품 상하차 시간은 무시하리 만큼 적다는 전제조건하에 입출고시 소요되는 평균 시간을 추정하였다. 그러나 국내 연구조사에 의하면 한국

형 신개념 자동창고의 경우, 기기간 상하차 시간은 중량물을 취급하는 관계로 기기간 인터페이스에 따라 차이가 존재하지만, 수직/수평 방향 최장 기기 운행시간 대비 최소 10%에서 최대 43%까지 이르는 것으로 알려져 있다(최상희, 하태영[1, 2]). 주기시간의 추정은 창고의 시간당 입출고 능력과 직결되며, 이는 창고의 입출고 운영계획과 관련하여 운영 능력에 따른 설비의 투자에 직접적으로 영향을 미치므로 중요한 사전 평가요소이다. 이에 선행연구에서 고려하지 않은 기기간 상하차 시간을 고려하여 주기시간을 추정하고 그 영향의 정도를 살펴보고는 것은 의미가 있다고 판단된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 신개념 자동창고의 구조와 운영에 대하여 설명하고, 제 3장에서는 작업 상황별 기대시간을 추정하는 수리 모형에 대하여 설명한다. 제 4장에서는 Hu et al.[9]의 모형과 제안 모형을 비교하는 수치실험에 대하여 설명한다.

2. 신개념 자동창고의 구조와 운영

창고의 구조는 Hu et al.[9] 모형의 <그림 1>에 나타난 바와 같이 두 개의 랙으로 구성된 하나의 저장 모듈에는 랙마다 수직 방향으로 움직이는 한 대의 승강기(VP)와 각 층에서 통로를 수평 방향으로 움직이며, 양쪽 랙을 담당하는 대차(HP)로 구성된다. VP는 층간을 움직이며 각 층의 HP와 물품을 교환하며, HP는 층내를 움직이며 저장셀에 물품을 저장하거나 끄집어낸다. I/O 지점은 랙의 하단에 위치하며 VP와 물품을 교환한다. 각 층의 첫 번째 베이(베이 0)는 VP와 HP가 물품 교환 장소로 사용한다.



〈그림 1〉 신개념의 자동창고

입고는 1) VP의 경우 대기장소에서 I/O 지점으로 이동하여 물품을 받은 후, 입고시킬 해당 층으로 간다. 동시에 HP는 물품을 인도 받기 위하여 대기장소에서 베이 0로 이동한다. 2) 베이 0에서 VP가 HP에게 물품을 인도한다. 3) VP는 대기장소로 이동하고, HP는 저장 셀로 이동하여 물품을 입고시킨 후 다시 대기장소로 되돌아간다.

출고 작업은 입고 작업과는 반대로 1) HP는 대기장소에서 저장셀로 이동하여 물품을 추출한 후, 베이 0로 이동한다. 동시에 VP는 대기장소에서 출고시킬 해당 층으로 간다. 2) 베이 0에서 HP가 VP에게 물품을 인도한다. 3) VP는 I/O 지점으로 이동하여 물품을 건네주고 대기장소로 간다. HP도 베이 0에서 대기장소로 되돌아간다. 여기서 대기장소는 창고 운영 규칙에 따라 달라진다. HP의 경우는 베이 0이나 전 작업이 종료된 시점, 또는 제 3의 장소로 지정할 수 있고, VP의 경우는 I/O 지점이나 전 작업이 종료된 시점, 또는 제 3의 장소로 둘 수 있다.

이와 같은 자동창고의 장점으로서 1) VP와 HP가 독립적으로 움직이므로 전통적인 자동창고 S/R 기기가 다루지 못한 컨테이너와 같은 중량물을 다룰 수 있고, 2) 다수의 HP들이 동시에 작업 가능하므로 단위 시간 당 물품 처리량이 많아지게 되어 생산성이 증가한다. 3) 전통적인 자동창고는 S/R 기기가 고장이 나면 전체 저장 모듈의 작동이 정지되지만, 신개념의 자동창고는 한 대의 HP가 고장이 나더라도 해당 HP가 작동하는 구간에서만 영향을 받을 뿐, 다른 HP와 VP의 작동과는 무관하여 전체 저장 모듈의 작동에는 지장을 주지 않으므로 기기의 고장에 자유롭다.

부산 신선대 컨테이너터미널(PECT)에서 파일럿 시스템으로 시운전 중인 한국형 신개념 자동창고

는 <그림 2>와 같이 <그림 1>과는 반대로 양쪽 랙 사이의 통로를 한 대, 또는 두 대의 HP가 수평으로 움직이고, 여러 대의 VP가 한 대, 또는 두 대의 HP를 공유하며 수직으로 움직이는 형태이다. <그림 2>는 5층 높이, 3개 베이, 통로로부터의 저장 깊이가 2인 구조에서 한 대의 HP를 운용할 때의 개념도를 보여주고 있다(최상희, 하태영[1]의 100쪽 그림을 재편집함). <그림 2>에서 통로로부터의 저장 깊이가 1이고, 두 대의 HP가 수평으로 움직이는 경우는 <그림 1>을 옆으로 뉘여 놓은 형태가 되기 때문에 <그림 1>과 동일하다.

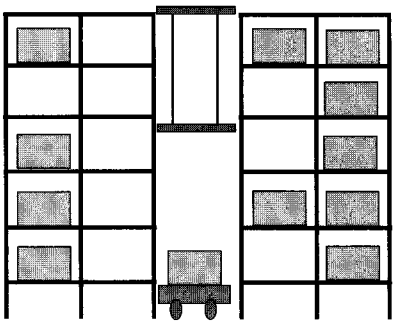
최상희, 하태영[1]에 의하면 관련 기술개발과 창고 운영측면에서 구현 가능한 베이 높이는 최대 20~30 단적, 통로로부터 저장 깊이는 최고 3의 깊이인 것으로 알려져 있다. 우리나라 항만에의 적용을 검토하고 있는 한국형 신개념 자동창고는 통로로부터 저장 깊이가 1보다 큰 경우에도 고려하고 있으므로 경우에 따라서는 통로로부터 안 쪽에 있는 컨테이너를 꺼내기 위해서는 통로쪽의 셀에 있는 컨테이너를 다른 곳으로 옮겨야 하는 재작업이 발생할 수 있다는 단점도 있다. <표 1>은 신개념 자동창고 모형들의 공통점과 차이점에 대하여 정리한 것이다.

3. 작업 소요시간 추정을 위한 수리 모형

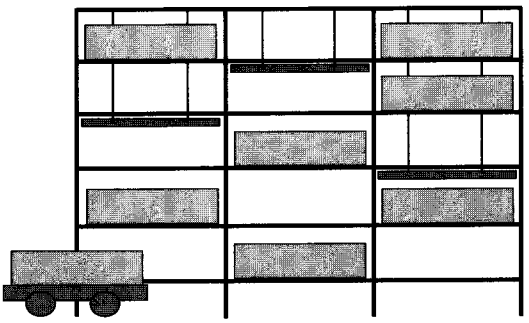
3.1 주요 전제조건

수리모형의 개발은 Hu et al.[9]이 가정한 다음과 같은 전제조건하에서 모형화 되었다.

- 랙에서의 저장 셀은 연속이라고 가정한다. 현실 상황에서의 저장 셀은 이산적이지만, Hu et al.[9]에 의하면 랙에서의 저장 셀이 연속이라고 가정한 수리 모형의 결과와 이산적인 저장 셀을 대상으로 시뮬레이션 방법에 의한 주기시간의 차이가 최대 3% 미만에 불과하기 때문이다.
- 입출고 명령 모드는 단일 명령(single command) 체계를 기반으로 한다.
- 유닛 로드를 대상으로 한다.



〈그림 2〉(a) 한국형 자동창고 정면도



〈그림 2〉(b) 한국형 자동창고 측면도

〈표 1〉 신개념 자동창고 모형들의 공통점과 차이점

연구자	창고 구조	공통점	차이점
◦ Chen et al.[5] ◦ Hu et al.[9]	◦ 랙당 1대의 수직이동 승강기(VP) ◦ N대의 층별 수평이동 대차(HP)	수평, 수직 방향으로의 설비 이동이 독립적	저장 깊이가 1로 재작업 발생 없음
◦ 최상희, 하태영[1]	◦ N대의 베이별 수직이동 승강기 ◦ 1대 또는 2대의 수평이동 대차		저장 깊이가 1이상 : 재작업 발생 가능

- 저장 위치 선택은 무작위 선정 방법에 따른다.
- VP와 HP의 속도는 가감속 없이 일정하다.
- 후속 작업에 대한 사전 정보가 주어지지 않는다. 따라서 서로 다른 작업에 대하여 VP와 HP가 동시에 움직이지 않는다.
- 대기장소에 관한 사항으로 입/출고 작업이 종료되면 VP와 HP는 작업이 종료된 시점에 종료된 장소에 머무른다.
- 주행거리의 계산은 I/O 지점을 기준으로 한다.

3.2 기호의 정의

본 모형에서 사용된 기호는 다음과 같다.

L_v : 저장 랙의 수직방향 높이
L_h : 저장 랙의 수평방향 폭
S_v : VP의 수직 이동 속도
S_h : HP의 수평 이동 속도
t_1 : 입출고 지점에서 차량과 VP간 물품을 싣거나 내리는 데 소요되는 시간
t_2 : VP와 HP간 물품을 싣거나 내리는데 소요되는 시간
t_3 : HP가 저장 셀에서 물품을 싣거나 내리는 데 소요되는 시간

t_h를 HP가 베이 0에서 가장 멀리 있는 베이로 수평 이동하는 데 소요되는 시간, t_v를 VP가 1층에서 최상층으로 수직 이동하는 데 소요되는 시간이라고 하면 이들은 각각 $t_h = L_h/S_h$, $t_v = L_v/S_v$로 주어진다. 시간에 대한 랙의 형상을 정의하기 위하여 $b = t_v/t_h$라 두면, 저장 랙의 모양은 시간에 대하여 길이가 1이고 높이가 b인 장방형의 피킹면으로 나타낼 수 있다. Bozer and White[4]는 이를 '형상 요소(shape factor)'라고 하였다. 수평, 수직 이동이 독립적이지 않고 일체화된 전통적인 AS/RS에서는 $0 < b \le 1$이지만, 수평-수직 이동이 분리가 되어있는 본 모형에서는 b는 임의의 양수이다. 이 경우 $0 < b < 1$이면 VP의 수직 이동 시간이 더 짧으며, $b > 1$이면 VP의 수직 이동 시간이 더 길다.

또한, $c_1 = t_1/t_h$, $c_2 = t_2/t_h$, $c_3 = t_3/t_h$로 두어 VP와 I/O 지점간, VP와 HP간, HP와 저장 셀간 상하차하는 데 소요되는 시간을 t_h로 정규화한 값으로 둔다.

3.3 모형 분석

(x_1, y_1)와 (x_2, y_2)를 전 작업의 위치와 현재 작업의 목표 위치라 하고, (x_3, y_2)를 y_2에서의 마지막 작업 위치라 하자. 여기서 모든 좌표들은 시간으로 주어진다.

무작위 저장 정책을 사용하므로 $y_i (i = 1, 2)$의 확률분포함수와 확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$F_{y_i}(v) = \begin{cases} \frac{v}{b}, & 0 \le v \le b, \\ 1, & v \ge b. \end{cases} \text{와}$$

$$f_{y_i}(v) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & 0 \le v \le b, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{1}$$

따라서 y_i $(i = 1, 2)$의 평균은 $E[y_i] = \int_0^b v f_{y_i}(v)dv = b/2$이다. $x_i (i = 1, 2, 3)$의 확률분포함수와 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$F_{x_i}(v) = \begin{cases} v, & 0 \le v \le 1, \\ 1, & v \ge 1. \end{cases} \text{와}$$

$$f_{x_i}(v) = \begin{cases} 1, & 0 \le v \le 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{2}$$

또한, $x_i (i = 1, 2, 3)$의 평균은 $E[x_i] = \int_0^1 v f_{x_i}(v)dv = 1/2$로 주어진다.

t를 임의의 한 작업을 마치는 데 소요되는 시간이라고 하자. 임의의 한 작업은 입고 또는 출고 작업일 수가 있으므로 t_s와 t_r을 각각 입고 및 출고 작업에 소요되는 시간이라고 하고, $\alpha (0 \le \alpha \le 1)$를 어떤 작업이 입고 작업일 확률이라고 하면 임의의 한 작업을 마치는 데 소요되는 기대시간은 다음 식

과 같다.

$$E[t]=\alpha E[t_s]+(1-\alpha)E[t_r] \tag{3}$$

3.3.1 $E[t_s]$의 계산

점 (x_2, y_2)까지의 주행시간을 계산하기 위해서는 전 작업의 유형과 y_2에서의 마지막 작업을 알아야 한다. 그 이유는 전 작업이 출고이면 VP는 항상 I/O 지점에 위치하며, HP는 베이 0에 위치한다. 반면, 전 작업이 입고이면 무작위 저장 정책에 따라 VP와 HP는 임의의 장소에 위치한다. 따라서 VP의 위치는 전 작업의 유형에 의해 결정되며, HP의 위치는 y_2에서의 마지막 작업 유형에 의해 결정된다.

발생 가능한 경우를 고려하였을 때 입고 작업에 소요되는 기대시간은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}E[t_s]&=P_{v_s}E[t_{ss}]+P_{v_r}E[t_{rs}]\\&=P_{v_s}(P_{h_s}E[t_{sss}]+P_{h_r}E[t_{rss}])\\&\quad+P_{v_r}(P_{h_s}E[t_{srs}]+P_{h_r}E[t_{rrs}])\end{aligned} \tag{4}$$

식 (4)에서 s는 입고 작업을, r은 출고 작업을 나타내며, 첨자 'ab'에서 a는 전 작업의 유형을, b는 현재 작업의 유형을 나타낸다. 첨자 'abc'에서 a는 y_2에서의 마지막 작업의 유형을, b는 전 작업의 유형을, c는 현재 작업의 유형을 나타낸다. 또한, P_{v_s}는 VP의 마지막 작업이 입고일 확률, P_{v_r}는 VP의 마지막 작업이 출고일 확률, P_{h_s}는 현재 작업 층에 있는 HP의 마지막 작업이 입고일 확률, P_{h_r}는 현재 작업 층에 있는 HP의 마지막 작업이 출고일 확률을 나타낸다. 무작위 저장 정책하에서는 $P_{v_s}=P_{h_s}=\alpha$이고, $P_{v_r}=P_{h_r}=1-\alpha$이다.

(1) $E[t_{sss}]$의 계산

이는 현재 작업, 전 작업 및 y_2에서의 마지막 작업이 모두 입고인 경우이다. 이때, 주행시간은 $t_{sss}=\max(y_1+c_1+y_2, x_3)+c_2+x_2+c_3$로 표현된다. 그 이유로 VP가 대기 장소에서 I/O 지점으로 가는 데 y_1, I/O 지점에서 물품을 받는 데 c_1, 목적지인 (x_2, y_2)로 되돌아 가는데 y_2가 소요되며, 현재 작업 층에 있는 HP는 x_3에 있으므로 HP가 베이 0로 가는 데 x_3이 소요된다. 그리고 VP와 HP간에 c_2가 소요되며, HP가 베이 0에서 x_2로 이동하는 데 x_2가 소요되고, HP가 저장 셀에 저장하는 데 c_3가 소요되기 때문이다.

$Z=\max(y_1+c_1+y_2, x_3)$라 두면, $E[t_{sss}]=E[Z]+1/2+c_2+c_3$이므로 $E[t_{sss}]$는 다음과 같다($E[Z]$의 계산은 <Appendix A> 참조).

(i) $0<b\le(1-c_1)/2$일 때

$$E[t_{sss}]=\frac{7}{12}b^2+c_1b+\frac{c_1^2}{2}+c_2+c_3+1 \tag{5-1}$$

(ii) $(1-c_1)/2\le b\le 1-c_1$일 때

$$\begin{aligned}E[t_{sss}]=&-\frac{b^2}{12}+(\frac{4}{3}-\frac{c_1}{3})b+(\frac{1}{3}-c_1+c_1^2-\frac{c_1^3}{3})\frac{1}{b}\\&+(-\frac{1}{24}+\frac{c_1}{6}-\frac{c_1^2}{4}+\frac{c_1^3}{6}-\frac{c_1^4}{24})\frac{1}{b^2}\\&+2c_1-\frac{c_1^2}{2}+c_2+c_3\end{aligned} \tag{5-2}$$

(iii) $b\ge 1-c_1$일 때

$$\begin{aligned}E[t_{sss}]=&b+(\frac{1}{24}-\frac{c_1}{6}+\frac{c_1^2}{4}-\frac{c_1^3}{6}+\frac{c_1^4}{24})\frac{1}{b^2}\\&+c_1+c_2+c_3+1/2\end{aligned} \tag{5-3}$$

(2) $E[t_{rss}]$의 계산

현재 작업과 전 작업은 입고이고, y_2에서의 마지막 작업은 출고인 경우이다. 이에 따라 VP가 대기 장소에서 I/O 지점으로 가서 물품을 받고 목적지로 되돌아가는 시간과 HP가 베이 0에서 목적지로 이동하는 데 소요되는 시간 및 기기간 상하차 시간을 고려하면 $t_{rss}=y_1+c_1+y_2+c_2+x_2+c_3$로 표현되므로,

$$\begin{aligned}E[t_{rss}]&=E[y_1+c_1+y_2+c_2+x_2+c_3]\\&=b+c_1+c_2+c_3+1/2\end{aligned} \tag{6}$$

(3) $E[t_{rrs}]$의 계산

현재 작업은 입고이고, 전 작업과 y_2에서의 마지막 작업은 출고인 경우이다. 이에 따라 VP는 I/O 지점에서 물품을 받고 목적지로 되돌아가는 시간과 HP가 베이 0에서 목적지로 이동하는 데 소요되는 시간 및 기기간 상하차 시간을 고려하면 $t_{rrs} = c_1 + y_2 + c_2 + x_2 + c_3$로 표현되므로,

$$\begin{aligned} E[t_{rrs}] &= E[c_1 + y_2 + c_2 + x_2 + c_3] \\ &= b/2 + c_1 + c_2 + c_3 + 1/2 \end{aligned} \tag{7}$$

(4) $E[t_{srs}]$의 계산

현재 작업과 y_2에서의 마지막 작업은 입고이고, 전 작업은 출고인 경우이다. 이때는 VP가 I/O 지점에서 물품을 받고 목적지로 되돌아가는 시간과 작업층에 있는 HP가 VP로부터 물품을 전달받기 위하여 x_3에서 베이 0로 이동하는 데 소요되는 시간 가운데 큰 값을 가지는 시간과 HP가 전달받은 물품을 베이 0에서 목적지로 이동하는 데 소요되는 시간 및 기기간 상하차 시간을 고려하면 $t_{srs} = \max(c_1 + y_2, x_3) + c_2 + x_2 + c_3$로 표현된다. $Z = \max(c_1 + y_2, x_3)$라 두면, $E[t_{srs}] = E[Z] + 1/2 + c_2 + c_3$이므로 $E[t_{srs}]$는 다음과 같다($E[Z]$의 계산은 <Appendix B> 참조).

$$E[t_{srs}] = \begin{cases} \frac{b^2}{6} + \frac{c_1 b}{2} - \frac{c_1^2}{2} + c_2 + c_3 + 1, & 0 < b \le 1 - c_1, \\ \frac{b}{2} + (\frac{1}{6} - \frac{c_1}{2} + \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_1^3}{6})\frac{1}{b} & b \ge 1 - c_1. \\ \quad + c_1 + c_2 + c_3 + 1/2, & \end{cases} \tag{8}$$

$E[t_s]$는 구간 $0 < b \le (1-c_1)/2$, $(1-c_1)/2 \le b \le 1 - c_1$와 $b \ge 1 - c_1$에 따라 다르게 도출되며 식 (5)~식 (8)을 이용하여 다음 식으로 부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[t_s] &= \alpha^2 E[t_{sss}] + \alpha(1-\alpha)E[t_{rss}] \\ &\quad + \alpha(1-\alpha)E[t_{srs}] + (1-\alpha)^2 E[t_{rrs}] \end{aligned} \tag{9}$$

3.3.2 $E[t_r]$의 계산

입고 작업때와 마찬가지로 발생 가능한 경우를 고려하였을 때 출고 작업에 소요되는 기대시간은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[t_r] &= P_{v_s} E[t_{sr}] + P_{v_r} E[t_{rr}] \\ &= P_{v_s}(P_{h_s} E[t_{ssr}] + P_{h_r} E[t_{rsr}]) \\ &\quad + P_{v_r}(P_{h_s} E[t_{srr}] + P_{h_r} E[t_{rrr}]) \end{aligned} \tag{10}$$

각 요소 작업별 기대시간의 계산은 다음과 같다.

(1) $E[t_{ssr}]$의 계산

현재 작업은 출고이고, 전 작업과 y_2에서의 마지막 작업은 입고인 경우이다. VP가 출고 물품을 전달받기 위하여 전 작업 위치에서 현재 작업 위치로 이동하는 시간인 $|y_1 - y_2|$동안, 현재 작업 위치의 HP는 VP에게 전달할 물품을 추출하기 위하여 위치 x_3에서 x_2로 이동하여 물품을 추출하고 베이 0으로 이동한다. 물품을 전달받은 VP는 I/O 지점으로 이동하게 되므로 기기간 상하차 시간을 고려하면 $t_{ssr} = \max(|y_1 - y_2|, |x_3 - x_2| + c_3 + x_2) + c_2 + y_2 + c_1$로 표현된다.

$Z = \max(|y_1 - y_2|, |x_3 - x_2| + x_2 + c_3)$라 두면, $E[t_{ssr}] = E[Z] + b/2 + c_1 + c_2$로부터 $E[t_{ssr}]$는 다음과 같다($E[Z]$의 계산은 <Appendix C> 참조).

(i) $0 < b \le 1 + c_3$일 때

$$\begin{aligned} E[t_{ssr}] &= \frac{b^3}{40} - \frac{c_3 b^2}{8} + (\frac{c_3^2}{4} + \frac{1}{2})b + \frac{c_3^4}{8b} \\ &\quad - \frac{c_3^5}{40b^2} + c_1 + c_2 + c_3 - \frac{c_3^3}{4} + \frac{5}{6} \end{aligned} \tag{11-1}$$

(ii) $1 + c_3 \le b \le 2 + c_3$일 때

$$\begin{aligned} E[t_{ssr}] &= -\frac{b^3}{120} + (\frac{1}{12} + \frac{c_3}{24})b^2 - (\frac{c_3}{3} + \frac{c_3^2}{12} - \frac{1}{2})b \\ &\quad + (\frac{1}{6} + \frac{c_3}{3} - \frac{c_3^3}{3} - \frac{c_3^4}{24})\frac{1}{b} \\ &\quad + (-\frac{1}{20} - \frac{c_3}{6} - \frac{c_3^2}{6} + \frac{c_3^4}{12} + \frac{c_3^5}{120})\frac{1}{b^2} \end{aligned}$$

$$+c_1+c_2+c_3+\frac{c_3^2}{2}+\frac{c_3^3}{12}+\frac{2}{3} \qquad (11\text{-}2)$$

(iii) $b \geq 2+c_3$일 때

$$E[t_{ssr}]=\frac{5b}{6}+(\frac{5}{6}+\frac{5c_3}{3})\frac{1}{b} \qquad (11\text{-}3)$$

$$-(\frac{19}{60}+\frac{5c_3}{6}+\frac{5c_3^2}{6}+\frac{c_3^3}{3})\frac{1}{b^2}+c_1+c_2+\frac{c_3^2}{6}$$

(2) $E[t_{rsr}]$의 계산

현재 작업과 y_2에서의 마지막 작업은 출고이고, 전 작업은 입고인 경우이다. VP가 출고 물품을 전달받기 위하여 전 작업 위치에서 현재 작업 위치로 이동하는 시간인 $|y_1-y_2|$ 동안, 베이 0에 있는 현재 작업 위치의 HP는 x_2로 이동하여 물품을 추출하고 다시 베이 0으로 되돌아온다. 물품을 전달받은 VP는 I/O 지점으로 이동하게 되므로 기기간 상하차 시간을 고려하면 $t_{rsr}=\max(|y_1-y_2|, 2x_2+c_3)+c_2+y_2+c_1$로 표현된다.

$Z=\max(|y_1-y_2|, 2x_2+c_3)$라 두면, $E[t_{rsr}]=E(Z)+b/2+c_1+c_2$로부터 $E[t_{rsr}]$는 다음과 같다($E[Z]$의 계산은 <Appendix D> 참조).

(i) $0<b\leq 2+c_3$일 때

$$E[t_{rsr}]=\frac{b^2}{24}-(\frac{c_3}{6}-\frac{1}{2})b-\frac{c_3^3}{6b}+\frac{c_3^4}{24b^2}$$

$$+c_1+c_2+c_3+\frac{c_3^2}{4}+1 \qquad (12\text{-}1)$$

(ii) $b\geq 2+c_3$일 때

$$E[t_{rsr}]=\frac{5b}{6}+(\frac{4}{3}+2c_3+c_3^2)\frac{1}{b}$$

$$-(\frac{2}{3}+\frac{4c_3}{3}+c_3^2+\frac{c_3^3}{3})\frac{1}{b^2}+c_1+c_2 \qquad (12\text{-}2)$$

(3) $E[t_{rrr}]$의 계산

이는 현재 작업, 전 작업 및 y_2에서의 마지막 작업이 모두 출고인 경우이다. I/O 지점에 있던 VP가 출고 물품을 전달받기 위하여 현재 작업 위치로 이동하는 시간인 y_2 동안, 베이 0에 있는 현재 작업 위치의 HP는 x_2로 이동하여 물품을 추출하고 다시 베이 0으로 되돌아온다. 물품을 전달받은 VP는 I/O 지점으로 이동하게 되므로 기기간 상하차 시간을 고려하면 $t_{rrr}=\max(y_2, 2x_2+c_3)+c_2+y_2+c_1$로 표현된다.

$Z=\max(y_2, 2x_2+c_3)$라 두면, $E[t_{rrr}]=E[Z]+b/2+c_1+c_2$로부터 $E[t_{rrr}]$는 다음과 같이 주어진다($E[Z]$의 계산은 <Appendix E> 참조).

$$E[t_{rrr}]=\begin{cases}\frac{b^2}{12}-(\frac{c_3}{4}-\frac{1}{2})b-\frac{c_3^3}{12b^2} & 0<b\leq 2+c_3,\\ \quad +c_1+c_2+c_3+\frac{c_3^2}{4}+1, & \\ b+(\frac{2}{3}+c_3+\frac{c_3^2}{2})\frac{1}{b}+c_1+c_2, & b\geq 2+c_3.\end{cases} \qquad (13)$$

(4) $E[t_{srr}]$의 계산

현재 작업과 전 작업은 출고이고, y_2에서의 마지막 작업은 입고인 경우이다. VP가 출고 물품을 전달받기 위하여 I/O 지점에서 현재 작업 위치로 이동하는 시간인 y_2 동안, 현재 작업 위치의 HP는 VP에게 전달할 물품을 추출하기 위하여 위치 x_3에서 x_2로 이동하여 물품을 추출하고 베이 0으로 이동한다. 물품을 전달받은 VP는 I/O 지점으로 이동하게 되므로 기기간 상하차 시간을 고려하면 $t_{srr}=\max(y_2, |x_2-x_3|+c_3+x_2)+c_2+y_2+c_1$로 표현된다. $Z=\max(y_2, |x_2-x_3|+x_2+c_3)$라 두면,

$E[t_{srr}]=E[Z]+b/2+c_1+c_2$로부터 $E[t_{srr}]$는 다음과 같이 주어진다($E[Z]$의 계산은 <Appendix F> 참조).

(i) $0<b\leq 1+c_3$일 때

$$E[t_{srr}]=\frac{b^3}{16}-\frac{c_3b^2}{4}+(\frac{3c_3^2}{8}+\frac{1}{2})b$$

$$+\frac{c_3^4}{16b}+c_1+c_2+c_3-\frac{c_3^3}{4}+\frac{5}{6} \qquad (14\text{-}1)$$

(ii) $1+c_3\leq b\leq 2+c_3$일 때

$$E[t_{srr}]=-\frac{b^3}{48}+(\frac{1}{6}+\frac{c_3}{12})b^2-(\frac{c_3}{2}+\frac{c_3^2}{8}-\frac{1}{2})b$$

$$+(\frac{1}{12}+\frac{c_3}{6}-\frac{c_3^3}{6}-\frac{c_3^4}{48})\frac{1}{b}$$

$$+c_1+c_2+c_3+\frac{c_3^2}{2}+\frac{c_3^3}{12}+\frac{2}{3} \qquad (14\text{-}2)$$

(iii) $b \geq 2+c_3$일 때

$$E[t_{srr}]=b+(\frac{5}{12}+\frac{5c_3}{6}+\frac{c_3^2}{2})\frac{1}{b}+c_1+c_2 \qquad (14\text{-}3)$$

$E[t_r]$는 구간 $0<b\leq 1+c_3$, $1+c_3 \leq b \leq 2+c_3$와 $b \geq 2+c_3$에 따라 다르게 도출되며 식 (11)~식 (14)을 이용하여 다음 식으로 부터 구할 수 있다.

$$E[t_r]=\alpha^2 E[t_{ssr}]+\alpha(1-\alpha)E[t_{rsr}]$$
$$+\alpha(1-\alpha)E[t_{srr}]+(1-\alpha)^2 E[t_{rrr}] \qquad (15)$$

최종적으로 식 (9)와 식 (15)를 이용하여 임의의 한 작업을 마치는 데 소요되는 기대시간인 $E[t]$는 $0<b\leq(1-c_1)/2$, $(1-c_1)/2 \leq b \leq 1-c_1$, $1-c_1 \leq b \leq 1+c_3$, $1+c_3 \leq b \leq 2+c_3$ 와 $b \geq 2+c_3$ 등 5개 구간에 따라 다음의 식에 의하여 도출된다.

$$E[t]=\alpha E[t_s]+(1-\alpha)E[t_r] \qquad (16)$$

4. 수치 실험

본 수치 실험에서는 Hu et al.[9] 모형과 제안 모형을 대상으로 모형의 모수와 기기간 상하차 시간의 크기에 따라 두 모형의 주기시간이 어떻게 변화하는가를 파악함으로써 모형의 행태를 살펴보려고 한다. 기본적인 데이터는 Hu et al.[9]의 모형에서 사용된 것으로서 다음과 같다.

- 랙의 제원 : 수직으로 12개층, 수평으로 24개 베이
- 셀의 크기 : 높이 4.5m, 폭 4.5m의 정방형
- 기기 속도 : S_v = 1m/초, S_h = 2m/초

<표 2>는 b = 1일 때 α의 변화에 따른 주기시간과 %차이를 나타낸 표이다. Hu et al.[9]의 모형은 기기간 상하차 시간을 고려하지 않았으므로 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$인 경우에 해당된다. <표 2>를 보면 $c_1 = c_2 = c_3 = 0.1$로 기기간 상하차 시간이 최장 기기 운행 시간의 10%를 차지할 경우, 기기간 상하차 시간을 고려하였을 때가 그렇지 않았을 때보다 18.53%에서 20.49% 정도 주기시간이 증가함을 볼 수 있으며, 이러한 차이는 α = 0.5에서 가장 큰 것으로 나타났다. $c_1 = c_2 = c_3 = 0.2$일 때는 그 차이가 더욱 커져 최고 41.26%의 차이가 발생함을 알 수 있다.

〈표 2〉 α의 변화에 따른 주기시간의 비교

(단위 : 초)

α	Hu*	$c_1 = c_2 = c_3 = 0.1$		$c_1 = c_2 = c_3 = 0.2$	
		Kim**	%차이	Kim**	%차이
0.1	81.59	96.72	18.54	112.07	37.36
0.2	78.61	93.84	19.37	109.28	39.01
0.3	76.52	91.81	19.98	107.31	40.23
0.4	75.28	90.60	20.35	106.13	40.99
0.5	74.84	90.18	20.49	105.72	41.26
0.6	75.16	90.50	20.41	106.05	41.10
0.7	76.21	91.55	20.13	107.11	40.54
0.8	77.93	93.28	19.70	108.85	39.67
0.9	80.29	95.67	19.15	111.26	38.57
1	83.25	98.68	18.53	114.32	37.32

주) * Hu et al.[9] 모형, ** 제안 모형.

〈표 3〉 b의 변화에 따른 주기시간의 비교

(단위 : 초)

b	Hu*	$c_1 = c_2 = c_3 = 0.1$		$c_1 = c_2 = c_3 = 0.2$	
		Kim**	%차이	Kim**	%차이
0.1	47.42	62.31	31.40	76.91	62.18
0.2	49.97	64.97	30.03	79.94	59.99
0.3	52.64	67.72	28.65	82.82	57.34
0.4	55.43	70.58	27.32	85.77	54.73
0.5	58.36	73.56	26.04	88.83	52.20
1	74.84	90.18	20.49	105.72	41.26
2	113.44	128.33	13.12	143.38	26.39
3	155.48	169.99	9.33	184.60	18.73
4	198.87	213.16	7.19	227.54	14.42
5	242.86	257.01	5.83	271.24	11.69

주) * Hu et al.[9] 모형, ** 제안 모형.

<표 3>은 $\alpha = 0.5$일 때 b의 변화에 따른 주기시간을 나타낸 표로서 b가 적을수록, 동일한 b에서는 c_i가 커질수록 두 모형간의 주기시간 차이가 더욱 더 커진다. 실제 운영상에서는 두 대의 VP가 여러 대의 HP를 담당하여야하므로 $b \geq 1$인 상황은 현실성이 없으며, $b < 1$이어야만 효율적으로 입출고 작업을 수행할 수 있다는 측면을 고려하면 기기간 상하차 시간의 존재를 무시할 수 없다는 것을 확인할 수 있다.

〈표 4〉 c_i의 변화에 따른 주기시간의 비교

c_1, c_2, c_3		Hu*	Kim**	%차이
c_1 변화 $c_2 = 0$ $c_3 = 0$	0.10	58.36	62.92	7.81
	0.15	58.36	65.20	11.71
	0.20	58.36	67.47	15.61
	0.25	58.36	69.75	19.51
$c_1 = 0$ c_2 변화 $c_3 = 0$	0.10	58.36	63.76	9.25
	0.15	58.36	66.46	13.88
	0.20	58.36	69.16	18.50
	0.25	58.36	71.86	23.13
$c_1 = 0$ $c_2 = 0$ c_3 변화	0.10	58.36	63.61	8.98
	0.15	58.36	66.26	13.52
	0.20	58.36	68.92	18.08
	0.25	58.36	71.59	22.66

주) * Hu et al.[9] 모형, ** 제안 모형.

<표 4>는 $\alpha = 0.5$, $b = 0.5$이고 하나의 c_i가 0.10~0.25까지 변화하며, 다른 c_i는 0으로 고정되어 있을 때의 주기시간을 살펴본 것이다. <표 4>를 보면 어떤 c_i의 변화가 다른 c_i의 변화보다 두드러지게 주기시간에 더 영향을 미친다는 것을 관찰할 수는 없지만, 본 실험상으로는 c_1보다 c_2, c_3의 변화가 두 모형간의 주기시간에 더 민감함을 관찰할 수 있다.

5. 결론 및 추후 연구방향

본 연구에서는 수평-수직 이동이 독립적으로 작동하여 컨테이너와 같은 중량물을 저장할 수 있는 신개념의 자동창고를 대상으로, 임의의 작업을 마치는 데 소요되는 주기시간을 추정하는 모형을 제시하였다. 선행 연구에서는 이 문제를 기기간 상하차 시간이 무시하리만큼 적다는 전제조건하에 모형화하였으나, 실제 설계안에 따르면 결코 무시할 수 없는 시간으로 알려진 바, 제안 모형에서는 3가지 종류의 기기간 상하차 시간을 고려하여 선행 연구의 모형을 일반화하였다.

한 작업을 마치는 데 발생될 수 있는 작업 상황을 정리하여 작업 상황별로 기대시간을 추정하였고, 이를 바탕으로 임의의 작업을 마치는 데 소요되는 주기시간을 추정하였다. 수치 실험을 통하여 선행 연구의 모형과 제안 모형을 비교한 결과, 기기간 상하차 시간의 크기에 따라 두 모형에서 추정하는 주기시간 간에는 커다란 차이가 발생하여 기기간 상하차 시간의 존재를 무시할 수 없다는 것을 확인할 수 있었다.

본 모형의 가장 큰 제약점으로 후속 작업에 대한 사전 정보가 주어지지 않는다는 것을 들 수 있다. 세계적으로 제안 모형 형태의 자동창고에 대한 설계나 운용 개념에 대해서는 여러 기관에서 관심을 가지고 꾸준히 논의되고 있는 상황이지만, 현재까지는 이를 상업적으로 활용되고 있는 사례는 아직 보이지 않는다. 실제 운용시에는 후속 작업에 대한 사전 정보가 미리 주어질 것으로 예상되며, 이 경우 시간당 입출고 능력을 높일 목적으로 사전 정보를 이용함으로써 VP, HP가 미리 해당 지점으로 이동하여 VP, HP 및 I/O 지점간 상하차를 위한 대기시간을 줄이려 노력할 것이다. 그 외에 모형화 과정에서 가정한 전제조건들을 현실적인 운용조건으로 확장하는 것을 고려해 볼 수 있다. 이 경우 기존에 발표된 전통적인 자동창고의 연구 결과들이 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

본 연구에서의 창고 모형은 컨테이너뿐만 아니라 철강 제품과 같은 중량물을 적재할 수 있어 그 응용 분야가 확대되리라 예상된다. 우리나라에서도 지능형 항만물류시스템 개발의 일환으로 신개념 자동창고를 개발 중인 바, 모형의 수리화 및 수치

실험의 결과가 한국형 자동창고 개발과 응용에 일조할 수 있으면 하는 바람이다.

참 고 문 헌

[1] 최상희, 하태영, "차세대항만 대응을 위한 고효율 야드시스템의 개발 연구", 「해양정책 연구」, 제20권, 제2호(2005), pp.81-126.

[2] 최상희와 하태영과의 개인 서신 및 면담, 2007-2008.

[3] van den Berg, J.P. and W.H.M. Zijm, "Models for warehouse management : Classification and examples," *International Journal of Production Economics*, Vol.59(1999), pp.519-528.

[4] Bozer, Y.A. and J.A. White, "Travel-time models for automated storage/retrieval systems," *IIE Transactions*, Vol.16, No.4(1984), pp.329-338.

[5] Chen, C., S.Y. Huang, W.J. Hsu, A.C. Toh and C.K. Loh, "Plaforms-based AS/RS for container storage," *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan, pp.181-187.

[6] Cormier, G. and E.A. Gunn, "A review of warehouse models," *European Journal of Operational Research*, Vol.58(1992), pp.3-13.

[7] Gu, J., M. Goetschalckx, and L.F. McGinnis, "Research on warehouse operation : A comprehensive review," *European Journal of Operational Research*, Vol.177(2007), pp.1-21.

[8] Gu, J., M. Goetschalckx, and L.F. McGinnis, "Research on warehouse design and performance evaluation : A comprehensive review," Working Paper, Virtual Factory Laboratory, Georgia Institute of Technology, 2005.

[9] Hu, Y.H., S.Y. Huang, C. Chen, W.J. Hsu, A.C. Toh, C.K. Loh, and T. Song, "Travel time analysis of a new automated storage and retrieval system," *Computers and Operations Research*, Vol.32(2005), pp.1515-1544.

[10] Khoshnevis, B. and A. Asef-Vaziri, "3D Virtual and Physical Simulation of Automated Container Terminal and Analysis of Impact on In Land Transportation," Transportation Center, University of Southern California, 2000.

[11] Rouwenhort, B., B. Reuter, V. Stockrahm, G. J. van Houtum, and R.J. Mantel, "Warehouse design and control : Framework and literature review," *European Journal of Operational Research*, Vol.122(2000), pp.515-533.

〈Appendix A〉 $E[\max(y_1+c_1+y_2, x_3)]$의 계산

$Z=\max(y_1+c_1+y_2, x_3)$라 하자. y_1+y_2와 x_3는 독립이므로 Z의 확률분포함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_Z(v)=P(Z\le v)=P(x_3\le v)P(y_1+y_2+c_1\le v) \tag{A.1}$$

$M=y_1+y_2$라 두면 M의 확률분포함수는

$F_M(v)=\iint_{\substack{0\le u\le b\\0\le t\le b}} f_{y_1y_2}(u,t)dudt=\iint_S f_{y_1}(u)f_{y_2}(t)dudt=\iint_S \frac{1}{b^2}dudt$로 주어지며, S는 $u+t\le v-c_1$, $0\le u\le b$, $0\le t\le b$로 이루어지는 평면이다.

위 식을 풀면 다음과 같다.

$$F_M(v)=\begin{cases}0, & 0\le v\le c_1,\\ \dfrac{(v-c_1)^2}{2b^2}, & c_1\le v\le b+c_1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2b^2}(v-b-c_1)(3b-v+c_1), & b+c_1\le v\le 2b+c_1,\\ 1, & v\ge 2b+c_1.\end{cases} \tag{A.2}$$

식 (2)와 식 (A.2)의 결과를 (A.1)에 대입하여 $F_Z(v)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $0<b\le(1-c_1)/2$일 때

$$F_Z(v)=\begin{cases}0, & 0\le v\le c_1,\\ \dfrac{v(v-c_1)^2}{2b^2}, & c_1\le v\le b+c_1,\\ \dfrac{1}{2}v+\dfrac{1}{2b^2}v(v-b-c_1)(3b-v+c_1), & b+c_1\le v\le 2b+c_1,\\ v, & 2b+c_1\le v\le 1,\\ 1, & v\ge 1.\end{cases} \tag{A.3-1}$$

(ii) $(1-c_1)/2\le b\le 1-c_1$일 때

$$F_Z(v)=\begin{cases}0, & 0\le v\le c_1,\\ \dfrac{v(v-c_1)^2}{2b^2}, & c_1\le v\le b+c_1,\\ \dfrac{1}{2}v+\dfrac{1}{2b^2}v(v-b-c_1)(3b-v+c_1), & b+c_1\le v\le 1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2b^2}(v-b-c_1)(3b-v+c_1), & 1\le v\le 2b+c_1,\\ 1, & v\ge 2b+c_1.\end{cases} \tag{A.3-2}$$

(iii) $b\ge 1-c_1$일 때

$$F_Z(v)=\begin{cases}0, & 0\le v\le c_1,\\ \dfrac{v(v-c_1)^2}{2b^2}, & c_1\le v\le 1,\\ \dfrac{(v-c_1)^2}{2b^2}, & 1\le v\le b+c_1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2b^2}(v-b-c_1)(3b-v+c_1), & b+c_1\le v\le 2b+c_1,\\ 1, & v\ge 2b+c_1.\end{cases} \tag{A.3-3}$$

$F_Z(v)$로부터 구한 $f_Z(v)$는 다음과 같다.

(i) $0<b\le(1-c_1)/2$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}\dfrac{3v^2}{2b^2}-\dfrac{2c_1v}{b^2}+\dfrac{c_1^2}{2b^2}, & c_1\le v\le b+c_1,\\ -\dfrac{3v^2}{2b^2}+(\dfrac{4}{b}+\dfrac{2c_1}{b^2})v-1-\dfrac{2c_1}{b}-\dfrac{c_1^2}{2b^2}, & b+c_1\le v\le 2b+c_1,\\ 1, & 2b+c_1\le v\le 1,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{A.4-1}$$

(ii) $(1-c_1)/2\le b\le 1-c_1$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}\dfrac{3v^2}{2b^2}-\dfrac{2c_1v}{b^2}+\dfrac{c_1^2}{2b^2}, & c_1\le v\le b+c_1,\\ -\dfrac{3v^2}{2b^2}+(\dfrac{4}{b}+\dfrac{2c_1}{b^2})v-1-\dfrac{2c_1}{b}-\dfrac{c_1^2}{2b^2}, & b+c_1\le v\le 1,\\ -\dfrac{v}{b^2}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{c_1}{b^2}, & 1\le v\le 2b+c_1,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{A.4-2}$$

(iii) $b\ge 1-c_1$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}\dfrac{3v^2}{2b^2}-\dfrac{2c_1v}{b^2}+\dfrac{c_1^2}{2b^2}, & c_1\le v\le 1,\\ \dfrac{v}{b^2}-\dfrac{c_1}{b^2}, & 1\le v\le b+c_1,\\ -\dfrac{v}{b^2}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{c_1}{b^2}, & b+c_1\le v\le 2b+c_1,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{A.4-3}$$

$E[Z]=\int_v vf_z(v)dv$로부터,

$$E[Z]=\begin{cases}\dfrac{7}{12}b^2+c_1b+\dfrac{1}{2}+\dfrac{c_1^2}{2}, & 0<b\le(1-c_1)/2,\\ -\dfrac{b^2}{12}+(\dfrac{4}{3}-\dfrac{c_1}{3})b+(\dfrac{1}{3}-c_1+c_1^2-\dfrac{c_1^3}{3})\dfrac{1}{b}+ & \\ (-\dfrac{1}{24}+\dfrac{c_1}{6}-\dfrac{c_1^2}{4}+\dfrac{c_1^3}{6}-\dfrac{c_1^4}{24})\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{2}+2c_1-\dfrac{c_1^2}{2}, & (1-c_1)/2\le b\le 1-c_1,\\ b+(\dfrac{1}{24}-\dfrac{c_1}{6}+\dfrac{c_1^2}{4}-\dfrac{c_1^3}{6}+\dfrac{c_1^4}{24})\dfrac{1}{b^2}+c_1, & b\ge 1-c\end{cases} \tag{A.5}$$

〈Appendix B〉 $E[\max(c_1+y_2, x_3)]$의 계산

$Z=\max(c_1+y_2, x_3)$라 하자. y_2와 x_3는 독립이므로 Z의 확률분포함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_Z(v)=P(Z\le v)=P(x_3\le v)P(y_2\le v-c_1) \tag{B.1}$$

식 (1)과 식 (2)를 이용하여 $F_Z(v)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $0<b\le 1-c_1$일 때

$$F_Z(v)=\begin{cases}0, & 0\le v\le c_1,\\ \dfrac{v(v-c_1)}{b}, & c_1\le v\le b+c_1,\\ v, & b+c_1\le v\le 1,\\ 1, & v\ge 1.\end{cases} \tag{B.2-1}$$

(ii) $b\ge 1-c_1$일 때

$$F_Z(v)=\begin{cases}0, & 0\le v\le c_1,\\ \dfrac{v(v-c_1)}{b}, & c_1\le v\le 1,\\ \dfrac{(v-c_1)}{b}, & 1\le v\le b+c_1,\\ 1, & v\ge b+c_1.\end{cases} \tag{B.2-2}$$

$F_Z(v)$로부터 구한 $f_Z(v)$는 다음과 같다.

(i) $0<b\le 1-c_1$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}(2v-c_1)/b, & c_1\le v\le b+c_1,\\ 1, & b+c_1\le v\le 1,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{B.3-1}$$

(ii) $b\ge 1-c_1$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}(2v-c_1)/b, & c_1\le v\le 1,\\ 1/b, & 1\le v\le b+c_1,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{B.3-2}$$

$E[Z]=\int_v vf_z(v)dv$로부터,

$$E[Z]=\begin{cases}\dfrac{b^2}{6}+\dfrac{c_1b}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{c_1^2}{2}, & 0<b\le 1-c_1,\\ \dfrac{b}{2}+(\dfrac{1}{6}-\dfrac{c_1}{2}+\dfrac{c_1^2}{2}-\dfrac{c_1^3}{6})\dfrac{1}{b}+c_1, & b\ge 1-c_1.\end{cases} \tag{B.4}$$

〈Appendix C〉 $E[\max(|y_1-y_2|, |x_3-x_2|+c_3+x_2)]$의 계산

$Z=\max(|y_1-y_2|, |x_3-x_2|+x_2+c_3)$라 하자. y_i와 x_i는 독립이므로 Z의 확률분포함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_Z(v) = P(Z \le v) = P(\max(|y_1 - y_2|, |x_3 - x_2| + x_2 + c_3) \le v)$$
$$= P(|y_1 - y_2| \le v) P(|x_3 - x_2| + x_2 + c_3 \le v). \tag{C.1}$$

$P(|y_1 - y_2| \le v)$는 Hu et al.[9]에 제시된 바와 같이 다음과 같다.

$$P(|y_1 - y_2| \le v) = \begin{cases} \dfrac{2v}{b} - \dfrac{v^2}{b^2}, & 0 \le v \le b, \\ 1, & v \ge b. \end{cases} \tag{C.2}$$

$$P(|x_3 - x_2| \le v - x_2 - c_3) = P(x_2 + c_3 - v \le x_3 - x_2 \le v - x_2 - c_3)$$
$$= P(2x_2 + c_3 - v \le x_3 \le v - c_3).$$

$P(2x_2 + c_3 - v \le x_3 \le v - c_3)$는 $u = v - c_3$, $u = 2t + c_3 - v$, $0 \le u \le 1$, $0 \le t \le 1$로 이루어지는 면적이다. 따라서

$$P(2x_2 + c_3 - v \le x_3 \le v - c_3)$$
$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{v-c_3}{2}} \int_0^{v-c_3} f_{x_2x_3}(t,u)dudt + \int_{\frac{v-c_3}{2}}^{v-c_3} \int_{2t+c_3-v}^{v-c_3} f_{x_2x_3}(t,u)dudt, & c_3 \le v \le 1 + c_3, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{v-c_3}{2}} \int_0^{1} f_{x_2x_3}(t,u)dudt + \int_{\frac{v-c_3}{2}}^{1} \int_{2t+c_3-v}^{1} f_{x_2x_3}(t,u)dudt, & 1 + c_3 \le v \le 2 + c_3, \\ 1, & v \ge 2 + c_3. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{3}{4}(v - c_3)^2, & c_3 \le v \le 1 + c_3, \\ (v - c_3) - \dfrac{1}{4}(v - c_3)^2, & 1 + c_3 \le v \le 2 + c_3, \\ 1, & v \ge 2 + c_3. \end{cases} \tag{C.3}$$

식 (C.2), 식 (C.3)를 이용하여 $F_Z(v)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $0 < b \le 1 + c_3$일 때

$$F_Z(v) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(v - c_3)^2 (\dfrac{2v}{b} - \dfrac{v^2}{b^2}), & c_3 \le v \le b, \\ \dfrac{3}{4}(v - c_3)^2, & b \le v \le 1 + c_3, \\ (v - c_3) - \dfrac{1}{4}(v - c_3)^2, & 1 + c_3 \le v \le 2 + c_3, \\ 1, & v \ge 2 + c_3. \end{cases} \tag{C.4-1}$$

(ii) $1 + c_3 \le b \le 2 + c_3$일 때

$$F_Z(v) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(v - c_3)^2 (\dfrac{2v}{b} - \dfrac{v^2}{b^2}), & c_3 \le v \le 1 + c_3, \\ \left[(v - c_3) - \dfrac{1}{4}(v - c_3)^2\right] (\dfrac{2v}{b} - \dfrac{v^2}{b^2}), & 1 + c_3 \le v \le b, \\ (v - c_3) - \dfrac{1}{4}(v - c_3)^2, & b \le v \le 2 + c_3, \\ 1, & v \ge 2 + c_3. \end{cases} \tag{C.4-2}$$

(iii) $b \geq 2+c_3$일 때

$$F_Z(v)=\begin{cases}\frac{3}{4}(v-c_3)^2(\frac{2v}{b}-\frac{v^2}{b^2}), & c_3 \leq v \leq 1+c_3,\\ \left[(v-c_3)-\frac{1}{4}(v-c_3)^2\right](\frac{2v}{b}-\frac{v^2}{b^2}), & 1+c_3 \leq v \leq 2+c_3,\\ \frac{2v}{b}-\frac{v^2}{b^2}, & 2+c_3 \leq v \leq b,\\ 1, & v \geq b.\end{cases} \tag{C.4-3}$$

$F_Z(v)$로부터 구한 $f_Z(v)$는 다음과 같다.

(i) $0<b \leq 1+c_3$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}-\frac{3v^3}{b^2}+(\frac{9}{2b}+\frac{9c_3}{2b^2})v^2-(\frac{6c_3}{b}+\frac{3c_3^2}{2b^2})v+\frac{3c_3^2}{2b}, & c_3 \leq v \leq b,\\ \frac{3v}{2}-\frac{3c_3}{2}, & b \leq v \leq 1+c_3,\\ -\frac{v}{2}+1+\frac{c_3}{2}, & 1+c_3 \leq v \leq 2+c_3,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{C.5-1}$$

(ii) $1+c_3 \leq b \leq 2+c_3$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}-\frac{3v^3}{b^2}+(\frac{9}{2b}+\frac{9c_3}{2b^2})v^2-(\frac{6c_3}{b}+\frac{3c_3^2}{2b^2})v+\frac{3c_3^2}{2b}, & c_3 \leq v \leq 1+c_3,\\ \frac{v^3}{b^2}-(\frac{3}{2b}+\frac{3}{b^2}+\frac{3c_3}{2b^2})v^2 & \\ +(\frac{4}{b}+\frac{2c_3}{b}+\frac{2c_3}{b^2}+\frac{c_3^2}{2b^2})v-\frac{2c_3}{b}-\frac{c_3^2}{2b}, & 1+c_3 \leq v \leq b,\\ -\frac{v}{2}+1+\frac{c_3}{2}, & b \leq v \leq 2+c_3,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{C.5-2}$$

(iii) $b \geq 2+c_3$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}-\frac{3v^3}{b^2}+(\frac{9}{2b}+\frac{9c_3}{2b^2})v^2-(\frac{6c_3}{b}+\frac{3c_3^2}{2b^2})v+\frac{3c_3^2}{2b}, & c_3 \leq v \leq 1+c_3,\\ \frac{v^3}{b^2}-(\frac{3}{2b}+\frac{3}{b^2}+\frac{3c_3}{2b^2})v^2 & \\ +(\frac{4}{b}+\frac{2c_3}{b}+\frac{2c_3}{b^2}+\frac{c_3^2}{2b^2})v-\frac{2c_3}{b}-\frac{c_3^2}{2b}, & 1+c_3 \leq v \leq 2+c_3,\\ -\frac{2v}{b^2}+\frac{2}{b}, & 2+c_3 \leq v \leq b,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{C.5-3}$$

$f_Z(v)$로부터 $E[Z]$을 구하면,

(i) $0<b \leq 1+c_3$일 때

$$E[Z]=\frac{b^3}{40}-\frac{c_3b^2}{8}+\frac{c_3^2b}{4}+\frac{c_3^4}{8b}-\frac{c_3^5}{40b^2}+\frac{5}{6}+c_3-\frac{c_3^3}{4}. \tag{C.6-1}$$

(ii) $1+c_3 \le b \le 2+c_3$일 때

$$E[Z] = -\frac{b^3}{120} + (\frac{1}{12}+\frac{c_3}{24})b^2 - (\frac{c_3}{3}+\frac{c_3^2}{12})b + (\frac{1}{6}+\frac{c_3}{3}-\frac{c_3^3}{3}-\frac{c_3^4}{24})\frac{1}{b} + (-\frac{1}{20}-\frac{c_3}{6}-\frac{c_3^2}{6}+\frac{c_3^4}{12}+\frac{c_3^5}{120})\frac{1}{b^2}+\frac{2}{3}+c_3+\frac{c_3^2}{2}+\frac{c_3^3}{12}. \tag{C.6-2}$$

(iii) $b \ge 2+c_3$일 때

$$E[Z] = \frac{b}{3} + (\frac{5}{6}+\frac{5c_3}{3})\frac{1}{b} - (\frac{19}{60}+\frac{5c_3}{6}+\frac{5c_3^2}{6}+\frac{c_3^3}{3})\frac{1}{b^2}+\frac{c_3^2}{6}. \tag{C.6-3}$$

〈Appendix D〉 $E[\max(|y_1-y_2|, 2x_2+c_3)]$의 계산

$Z=\max(|y_1-y_2|, 2x_2+c_3)$라 하면, y_i와 x_i는 독립이므로 Z의 확률분포함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_Z(v) &= P(Z \le v) = P(\max(|y_1-y_2|, 2x_2+c_3) \le v) \\ &= P(|y_1-y_2| \le v)P(2x_2+c_3 \le v). \end{aligned} \tag{D.1}$$

$F_Z(v)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $0<b\le 2+c_3$일 때

$$F_Z(v) = \begin{cases} (\frac{2v}{b}-\frac{v^2}{b^2})(\frac{v-c_3}{2}), & c_3 \le v \le b, \\ \frac{(v-c_3)}{2}, & b \le v \le 2+c_3, \\ 1, & v \ge 2+c_3. \end{cases} \tag{D.2-1}$$

(ii) $b \ge 2+c_3$일 때

$$F_Z(v) = \begin{cases} (\frac{2v}{b}-\frac{v^2}{b^2})(\frac{v-c_3}{2}), & c_3 \le v \le 2+c_3, \\ \frac{2v}{b}-\frac{v^2}{b^2}, & 2+c_3 \le v \le b, \\ 1, & v \ge b. \end{cases} \tag{D.2-2}$$

$F_Z(v)$로부터 구한 $f_Z(v)$는 다음과 같다.

(i) $0<b\le 2+c_3$일 때

$$f_Z(v) = \begin{cases} -\frac{3v^2}{2b^2}+(\frac{2}{b}+\frac{c_3}{b^2})v-\frac{c_3}{b}, & c_3 \le v \le b, \\ 1/2, & b \le v \le 2+c_3, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{D.3-1}$$

(ii) $b \ge 2+c_3$일 때

$$f_Z(v) = \begin{cases} -\frac{3v^2}{2b^2}+(\frac{2}{b}+\frac{c_3}{b^2})v-\frac{c_3}{b}, & c_3 \le v \le 2+c_3, \\ -\frac{2v}{b^2}+\frac{2}{b}, & 2+c_3 \le v \le b, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{D.3-2}$$

$f_Z(v)$로부터 $E[Z]$을 구하면,

(i) $0 < b \le 2+c_3$일 때

$$E[Z] = \frac{b^2}{24} - \frac{c_3 b}{6} - \frac{c_3^3}{6b} + \frac{c_3^4}{24b^2} + 1 + c_3 + \frac{c_3^2}{4}. \tag{D.4-1}$$

(ii) $b \ge 2+c_3$일 때

$$E[Z] = \frac{b}{3} + (\frac{4}{3} + 2c_3 + c_3^2)\frac{1}{b} - (\frac{2}{3} + \frac{4c_3}{3} + c_3^2 + \frac{c_3^3}{3})\frac{1}{b^2}. \tag{D.4-2}$$

〈Appendix E〉 $E[\max(y_2, 2x_2+c_3)]$의 계산

$Z = \max(y_2, 2x_2+c_3)$라 하면, y_i와 x_i는 독립이므로 Z의 확률분포함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_Z(v) = P(Z \le v) = P(2x_2 + c_3 \le v)P(y_2 \le v). \tag{E.1}$$

$F_Z(v)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $0 < b \le 2+c_3$일 때

$$F_Z(v) = \begin{cases} (\frac{v-c_3}{2})\frac{v}{b}, & c_3 \le v \le b, \\ \frac{v-c_3}{2}, & b \le v \le 2+c_3, \\ 1, & v \ge 2+c_3. \end{cases} \tag{E.2-1}$$

(ii) $b \ge 2+c_3$일 때

$$F_Z(v) = \begin{cases} (\frac{v-c_3}{2})\frac{v}{b}, & c_3 \le v \le 2+c_3, \\ v/b, & 2+c_3 \le v \le b, \\ 1, & v \ge b. \end{cases} \tag{E.2-2}$$

$F_Z(v)$로부터 구한 $f_Z(v)$는 다음과 같다.

(i) $0 < b \le 2+c_3$일 때

$$f_Z(v) = \begin{cases} \frac{v}{b} - \frac{c_3}{2b}, & c_3 \le v \le b, \\ 1/2, & b \le v \le 2+c_3, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{E.3-1}$$

(ii) $b \ge 2+c_3$일 때

$$f_Z(v) = \begin{cases} \frac{v}{b} - \frac{c_3}{2b}, & c_3 \le v \le 2+c_3, \\ 1/b, & 2+c_3 \le v \le b, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{E.3-1}$$

$f_Z(v)$로부터 $E[Z]$을 구하면,

$$E[Z]=\begin{cases}\frac{b^2}{12}-\frac{c_3 b}{4}-\frac{c_3^3}{12b^2}+1+c_3+\frac{c_3^2}{4}, & 0<b\le 2+c_3,\\ \frac{b}{2}+(\frac{2}{3}+c_3+\frac{c_3^2}{2})\frac{1}{b}, & b\ge 2+c_3.\end{cases} \tag{E.4}$$

〈Appendix F〉 $E[\max(y_2, |x_2-x_3|+c_3+x_2)]$의 계산

$Z=\max(y_2, |x_2-x_3|+x_2+c_3)$라 하면, y_i와 x_i는 독립이므로 Z의 확률분포함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_Z(v)=P(Z\le v)=P(|x_2-x_3|+x_2+c_3\le v)P(y_2\le v). \tag{F.1}$$

$F_Z(v)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $0<b\le 1+c_3$일 때

$$F_Z(v)=\begin{cases}\frac{3}{4}(v-c_3)^2\frac{v}{b}, & c_3\le v\le b,\\ \frac{3}{4}(v-c_3)^2, & b\le v\le 1+c_3,\\ (v-c_3)-\frac{1}{4}(v-c_3)^2, & 1+c_3\le v\le 2+c_3,\\ 1, & v\ge 2+c_3.\end{cases} \tag{F.2-1}$$

(ii) $1+c_3\le b\le 2+c_3$일 때

$$F_Z(v)=\begin{cases}\frac{3}{4}(v-c_3)^2\frac{v}{b}, & c_3\le v\le 1+c_3,\\ \left[(v-c_3)-\frac{1}{4}(v-c_3)^2\right]\frac{v}{b}, & 1+c_3\le v\le b,\\ (v-c_3)-\frac{1}{4}(v-c_3)^2, & b\le v\le 2+c_3,\\ 1, & v\ge 2+c_3.\end{cases} \tag{F.2-2}$$

(iii) $b\ge 2+c_3$일 때

$$F_Z(v)=\begin{cases}\frac{3}{4}(v-c_3)^2\frac{v}{b}, & c_3\le v\le 1+c_3,\\ \left[(v-c_3)-\frac{1}{4}(v-c_3)^2\right]\frac{v}{b}, & 1+c_3\le v\le 2+c_3,\\ \frac{v}{b}, & 2+c_3\le v\le b,\\ 1, & v\ge b.\end{cases} \tag{F.2-3}$$

$F_Z(v)$로부터 구한 $f_Z(v)$는 다음과 같다.

(i) $0<b\le 1+c_3$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}\frac{9v^2}{4b}-\frac{3c_3v}{b}+\frac{3c_3^2}{4b}, & c_3\le v\le b,\\ \frac{3v}{2}-\frac{3c_3}{2}, & b\le v\le 1+c_3,\\ -\frac{v}{2}+1+\frac{c_3}{2}, & 1+c_3\le v\le 2+c_3,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{F.3-1}$$

(ii) $1+c_3\le b\le 2+c_3$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}\frac{9v^2}{4b}-\frac{3c_3v}{b}+\frac{3c_3^2}{4b}, & c_3\le v\le 1+c_3,\\ -\frac{3v^2}{4b}+(\frac{2}{b}+\frac{c_3}{b})v-\frac{c_3}{b}-\frac{c_3^2}{4b}, & 1+c_3\le v\le b,\\ -\frac{v}{2}+1+\frac{c_3}{2}, & b\le v\le 2+c_3,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{F.3-2}$$

(iii) $b\ge 2+c_3$일 때

$$f_Z(v)=\begin{cases}\frac{9v^2}{4b}-\frac{3c_3v}{b}+\frac{3c_3^2}{4b}, & c_3\le v\le 1+c_3,\\ -\frac{3v^2}{4b}+(\frac{2}{b}+\frac{c_3}{b})v-\frac{c_3}{b}-\frac{c_3^2}{4b}, & 1+c_3\le v\le 2+c_3,\\ 1/b, & 2+c_3\le v\le b,\\ 0, & otherwise.\end{cases} \tag{F.3-3}$$

$f_Z(v)$로부터 $E[Z]$을 구하면,

(i) $0<b\le 1+c_3$일 때

$$E[Z]=\frac{b^3}{16}-\frac{c_3b^2}{4}+\frac{3c_3^2b}{8}+\frac{c_3^4}{16b}+\frac{5}{6}+c_3-\frac{c_3^3}{4}. \tag{F.4-1}$$

(ii) $1+c_3\le b\le 2+c_3$일 때

$$\begin{aligned}E[Z]=&-\frac{b^3}{48}+(\frac{1}{6}+\frac{c_3}{12})b^2-(\frac{c_3}{2}+\frac{c_3^2}{8})b\\ &+(\frac{1}{12}+\frac{c_3}{6}-\frac{c_3^3}{6}-\frac{c_3^4}{48})\frac{1}{b}+\frac{2}{3}+c_3+\frac{c_3^2}{2}+\frac{c_3^3}{12}.\end{aligned} \tag{F.4-2}$$

(iii) $b\ge 2+c_3$일 때

$$E[Z]=\frac{b}{2}+(\frac{5}{12}+\frac{5c_3}{6}+\frac{c_3^2}{2})\frac{1}{b}. \tag{F.4-3}$$