한국수학사학회지 제22권 제1호(2009년 2월), 75 - 88

분석에 대하여

경북대학교 사범대학 수학교육과 유윤재
yjyoo@knu.ac.kr

본 연구는 수학적 지식의 발견과 정당화에서 분석의 역할을 논하고 학교수학에서 역할을 논의하고 있다.

주제어: 분석, 필요조건, 충분조건, 학교수학

I. 서론

분석 추론이 문제해결의 도구로서 중요한 역할을 한다는 것은 이미 고대 그리스부터 널리 알려진 사실이다. Polya(1957)는 분석 개념을 보다 분명하게 진술한 수학자로 Pappus를 내세운다. 그러나 분석에 대한 Pappus의 진술이 모호한 면이 있기 때문에 후대 역사학자들사이에 Pappus가 의미하는 분석 개념이 실제로 무엇을 의미하는가에 대한 논쟁이 있었는데 대표적인 주장이 Cornford와 Robinson에 의하여 제시된 것이다. 이와 같은 논쟁은 수학사 관점에서 볼 때 중요한 의미를 가질 수 있다. 그러나 본 연구는 Pappus의 분석 개념이 실제로 무엇인가를 논하는 것과 같은 사료의 진정성 문제 보다는 Pappus의 분석 개념으로 인하여 촉발된 각각의 해석들이 문제해결의 도구로 사용될 때 효과면에서 유의미한 차이를 주기 때문에 어떤 분석 개념이 문제해결에서 가장 유용한가를 밝히는데 있다. 이런 이유에 의하여 실제 연구는 Pappus의 분석 개념에 대한 Cornford와 Robinson의 해석뿐만 아니라 Descartes와 Polya의 해석도 포함한다. 따라서 여기서 논의되는 Pappus의 분석 개념은 Polya의 해석, Cornford의 해석, Robinson의 해석, Descartes의 해석, 등을 중심으로 논의하고 이어 일반적인 문제해결에서 다루는 분석 개념, 분석 명제로서 분석 등도 본 연구에 포함된다. 이 개념들 사이에는 서로 유사한 것도 있고 그렇지 않는 것도 있으며 또 각각의 개념을 그 하위 개념으로 세분하면 종류는 더 많아진다.

이 연구는 강문봉(1992)의 연구 결과가 동인이 되었는데 그의 연구는 분석에 대한 여러 연구를 종합하고 있다. 한편 우정호(2000)는 분석의 학교수학에서의 활용을 위하여 분석 개념을 소개하고 있는데 여기서는 분석을 주로 기하학 문제의 추론에 활용하

여 그 중요성을 보여주고 있는데 수학의 다양한 영역에서 나타나는 상황은 제시하지 않고 있다.

연구 내용은 다음과 같이 진행된다. 먼저 이해를 돕기 위하여 앞에서 언급한 7개의 개념을 보다 명확하게 정립할 필요가 있는데 이 목적을 위해서 먼저 어떤 표준 개념을 제시하고 이 표준 개념과 위에서 언급한 7가지의 개념을 상호 비교하는 방법을 취하겠다. 여기서 말하는 표준 개념이란 바로 필요조건 개념이다.

II. 분석 개념의 비교

$H \rightarrow A$가 참일 때 A를 H의 필요조건이라고 한다. 여기서 편의상 명제 P의 진리집합을 P^*라고 하고 표기하기로 하면 $H \rightarrow A$가 참이라고 하는 것과 $H^* \subset A^*$는 같은 의미를 나타낸다. 여기서 진리집합을 언급하는 이유는 논의를 보다 시각화함으로써 이해를 돕기 위함이다. 마찬가지로 $A \rightarrow H$가 참일 때 A를 H의 충분조건이라고 한다. 마지막으로 $H \rightarrow A$가 참일 때 간단히 $H \Rightarrow A$로 나타낸다.

1. Pappus의 분석 개념에 대한 해석

다음 글은 Heath(1956) 진술의 번역인데 강문봉(1992)의 논문에서 주어져 있다.

분석은 그 때에 찾고자 하는 것을 마치 이미 인정된 것으로 가정하고 그것으로부터 그 잇달은 결과들을 통해서 종합의 결과로 인정되는 어떤 것을 마치 이미 찾은 것으로 가정하고, 이것이 무엇으로부터 비롯되었는지, 그리고 다시, 그 후자의 원인이 무엇인지를 계속해서, 우리의 단계를 재추적함으로써 이미 알고 있는 혹은 제1원리에 속하는 어떤 것에 우리가 도달할 때까지 조사하기 때문이다...... 그러나 과정을 거꾸로 하는 종합에서는 분석에서 최후에 도달된 것을 이미 이루어진 것으로 간주하고, 자연스런 순서로 선행한 것을 결과로 배열하고 그것들을 서로 연속적으로 연력결여 마침내 우리가 찾고자 했던 것의 구성에 이르게 되는데 우리는 이것을 종합이라고 부른다.

그런데 분석에는 두 종류가 있는데, 하나는 진리를 찾는 것을 지향하는 것으로 이론적(theoretical)이라고 불리며, 다른 하나는 찾도록 요구되는 것을 발견하는 것을 지향하는 것으로 문제적(problematical)이라고 불린다. (a) 이론적인 것에서 우리는 찾고자 하는 것을 마치 그것이 존재하고 참인 것인 양 가정하고 그 후에 그 계속적인 결과들로부터, 또한 마치 참이고 가설에 의해 확립된 것인 양, 인정된 어떤 것으로 나아간다. 그러면, 증명은 분석의 역순서에 대응할 것이다. 그러나, 거짓인 어떤 것에 접하게 되면 찾고자 한 것도 거짓일 것이다. (b) 문제적인 경우에는 제안된 것을 이미 알려진 것으로 가정하고 그 다음에 참인 것으로 가정하는 그 계

속적인 결과들을 통하여 인정된 어떤 것에 이르게 된다. 그러면, 인정된 것 즉 수학자들이 주어진 것이라고 부르는 것이 가능하고 증명은 다시 분석의 역순서에 대응할 것이다. 그러나, 불가능한 것에 이르면 문제 역시 불가능 할 것이다.

먼저 여기서 찾고자 하는 것을 H라고 하고 H에 단서를 주는 명제를 A라고 하자. 이 글에 첫 문단을 보면 분석이란 H로부터 어떤 단계적인 절차를 통하여 A를 찾는 것으로 기술되어 있을 뿐 그 개념이 H의 필요조건을 찾는 과정인지 아니면 H의 충분조건을 찾는 과정인지 불분명하다. 그러나 이것은 중요하지 않으며 실제로 중요한 점은 찾고자하는 H를 먼저 참으로 인정하고 그것을 추론의 단초로 간주하고 있다는 점이다.

그러나 위의 진술 (a)에서 Pappus가 의미하는 분석 개념이 H의 필요조건 찾기와 충분조건 찾기 중 어떤 것을 지시한다고 해도 논리적 오류를 가지게 된다. 이것은 둘째 문단 (a)에서도 마찬가지다. 만약 (a)가 H의 필요조건 찾기로 해석한다면 진술 (a)는 형식적으로 $H \Rightarrow A$이고 A가 참이라는 의미하며 따라서 이 추론은 H의 참/거짓을 결정할 수 없기 때문에 Pappus의 진술은 타당하지 않다. 그러나 이어서 나타나는 문장은 형식적으로 $H \Rightarrow A$이고 A가 거짓이라는 것을 의미하고 그 결과 H는 거짓이 되므로 Pappus의 진술은 타당하다. 마찬가지로 만약 (a)가 H의 충분조건 찾기로 해석한다면 진술 (a)는 형식적으로 $A \Rightarrow H$가 되고 A가 참이 이라는 것을 의미하고 그 결과 H는 참이 되므로 Pappus의 진술은 타당하다. 그러나 이어서 나타나는 문장은 형식적으로 $A \Rightarrow H$이고 A가 거짓이므로 이 추론은 H의 참/거짓을 결정할 수 없기 때문에 Pappus의 진술은 타당하지 않다. 이와 같이 Pappus의 진술은 어떤 식으로 해석하더라도 부분적으로 타당하지 않는 추론을 가지게 됨을 알 수 있다. Pappus의 이러한 태도는 그의 이해 부족이라기보다는 분석 개념을 보다 포괄적으로 인지하고 있는 것이 아닐까라는 추측을 낳게 한다. 사실 이 점을 좀 더 상세하게 알아보기 위하여 위의 Heath(1956)의 글에 대한 Polya(1957)의 해석을 보자.

그런데 분석에는 두 종류가 있다. 그 하나는 '증명 문제'의 분석으로 참인 정리를 만드는데 목적이 있다. 다른 하나는 '답을 구하는 문제의 분석'으로, 미지의 것을 구하는데 목적이 있다.
'증명 문제'에서는, 분명하게 언급된 어떤 정리 H를 증명하든가 반증하기를 요구한다.. 아직 H가 참인 지 거짓인지를 모르고 있다. 그러나 'H로부터 다른 정리 C를, C로부터 다른 정리 B를 이끌어내는 식으로 확실히 알고 있는 정리 A에 이를 때까지 연역을 계속한다.[1)]

이 인용의 마지막 줄에 있는 연역이라는 낱말에 의하면 Polya는 Pappus의 분석 개념을 H의 분명히 필요조건 찾기 개념으로 해석하고 있다. 그러나 Polya는 분석에 대

1) 여기서 나타나는 명제, 즉 A, B, L,... 등은 본 논의에 맞추기 위하여 원전을 약간 수정하여 A와 L을 각각 H와 A로 바꾸어 놓았다.

하여 발견술의 도구로서 중요한 가치가 있다고 제안하였을 뿐 분석이 (참이라고 인정하는 H의) 필요조건 찾기인가 또는 충분조건 찾기인가에 대하여 분명한 결론은 내리지 않고 있다. 다만 분석을 보다 일반적인 개념으로 사용하고 있는데 이 점은 그의 저서(1957)에서 예시한 물통의 물붓기 문제에서 나타난다.

용기가 4쿼트 짜리 통과 9쿼트 짜리 통 두 가지만 있을 때, 꼭 6쿼트의 물을 길어 올릴 수 있는 방법은 무엇인가?

이 문제는 증명 문제가 아니라 답을 구하는 문제인데 Polya는 이 문제를 해결하기 위하여 Pappus의 의미로 분석한다고 했다. 그런데 물붓기 문제에서 '6쿼트를 길어 올릴 수 있다'를 H로 둘 때, Polya가 수행한 절차는 C_1이면 H가 되는 C_1를 찾고, 이어 C_2이면 C_1이 되는 C_2를 찾고..., 이와 같은 일련의 절차를 거쳐 C_n이면 C_{n-1}이 되는 C_n을 찾고 최종적으로 A이면 C_n이 되는 C_n을 찾음으로서 전체적으로는 A이면 H가 되는 A를 찾아가는 과정에 해당한다. Polya는 이 과정을 거꾸로 풀기에 해당한다고 했다. 그러나 Polya가 여기서 말하는 거꾸로 풀기 개념은 H의 충분조건 찾기 개념과는 다르다. A가 H의 충분조건이라고 할 때는 H와 A를 연결하는 일련의 진술들은 수리논리적 명제가 되어야 하는데 Polya의 물붓기 문제에서 H와 A를 연결하는 고리들은 문제해결을 위한 작업 순서를 나타내는 진술일 뿐 그 진술들이 수리논리적 명제는 아니다. 보다 쉬운 예로서 '개울이 있는데 어떻게 하면 다리를 건널 수 있을까?'라는 Polya의 '다리 건너기 문제'를 생각해보자. 이 문제를 해결하기 위해서 거꾸로 풀기를 하면 다음과 같은 과정으로 분해될 수 있겠다.

i) H: 개울이 있는데 어떻게 하면 다리를 건널 수 있을까?
ii) C_1: 다리가 있으면 개울을 건널 수 있다.
iii) C_2: 통나무가 있으면 다리를 만들 수 있다.
iv) C_3: 톱이 있으면 통나무를 만들 수 있다.
v) A: 톱을 구할 수 있다.

그러므로 다리 건너기 문제는 $A \rightarrow C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow H$와 같은 순서를 밟으면 즉시 해결될 수 있다. 그러나 여기서 나타난 각 진술들은 대응하는 진리집합이 없기 때문에 이런 진술은 수리논리적 진술이 아니며 따라서 위의 연결 과정은 수학에서 말하는 필요/충분조건 개념에 의한 연결 과정에 해당되지 않는다. 실제로 Polya의 다리건너기 문제의 해결방법은 문제해결의 일반 이론에서 흔히 소개되는 역행법 개념으로서 일종의 발견술(heuristics) 개념이다(Greeno, 1978; Greeno & Simon, 1988).

그러므로 Pappus의 분석 개념에 대한 Polya의 해석은 필요조건 찾기라는 논리적 의미의 분석 개념과 문제해결의 절차로서의 분석 개념을 모두 포함시키고 있는 셈이

지만 Pappus의 분석 개념에 대한 Polya의 해석은 반드시 필요조건 찾기 개념 또는 충분조건 찾기 개념임을 적시한다고 볼 수만은 없다. 이러한 이유는 Polya도 그렇게 언급했다시피 그의 문제해결 개념이 꼭 수학 문제에 한정하고 있는 것은 아니기 때문이라고 본다(Polya, 1957).

Cornford의 분석 개념을 보면, 그는 먼저 H를 참이라고 전제 한 후, $C_1 \Rightarrow H$를 만족하는 H의 선행조건 C_1을 찾고, 이어 C_2의 선행 조건 C_2를 찾는 일련의 과정을 계속하여 최초의 선행 조건 A를 찾는 것이 Pappus의 분석 개념이라고 주장한다. 즉 Cornford에 의하면 분석 절차는

$$A \rightarrow C_n \rightarrow \cdots\ C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow H$$

가 된다. 따라서 Cornford의 분석 개념은 H에 대한 충분조건을 찾는 과정과 유사하다.[2] 강문봉(1992, p.82)은 H의 선행 조건을 찾는 사고를 직관 또는 선택이라고 하였다. 실제로 이 과정은 논리적이라기 보다는 문제 맥락에 따르는 해결자의 선택에 가깝다.

그러나 선택이란 자유롭다는 의미를 가지는 동시에 수학적으로 의미가 별로 없는 선행조건을 만들기도 한다. 예를 들어 다음과 같은 가설 형식의 문제를 생각해보자. '삼각형의 각 변의 길이를 각각 a, b, c라고 했을 때, $a^2+b^2=c^2$를 만족하는 삼각형의 있다.' 이 명제를 H라고 하면 $A \Rightarrow H$를 만족하는 A에 대응하는 명제는 (a,b,c)가 $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(1,1,\sqrt{2})$,... 등과 같이 수없이 나타난다. 그 중 하나를 선택하면 '삼각형의 변의 길이가 각각 3, 4, 5이면 그것은 $a^2+b^2=c^2$를 만족한다.'라는 명제를 얻는다. 그러나 이런 명제들은 H의 사례에 불과하며 수학의 정리가 일반적으로 '임의의... 대하여...'와 같은 보편 진술 형식을 가지고 있는 것에 부합하지 않으며 마치 H에 대한 사례를 열거한 것처럼 보인다. 다른 예로서 명제 H로서 '미분가능 함수 f가 $x=0$에서 극소값을 가진다.'를 보자. 이 명제에 대한 충분조건을 A라고 하면 $f_n(x)=x^{2n}$과 같은 무한히 많은 함수들이 A의 사례가 된다. 더욱이 '$f(x)=x^{20}$이면 미분가능 함수 f가 $x=0$에서 극소값을 가진다.'와 같은 정리를 얻게 된다. 이런 진술은 수학적 지식을 확장하지 않는다. 그러므로 Cornford의 분석 개념이 단순 선택과 결합하면 수학적 지식을 발견하는데 도움을 주지 못한다.

한편 어떤 수단을 동원했던 간에 $A \Rightarrow H$가 성립하는 A를 일단 찾았다고 하고 동시에 $H \Rightarrow A$가 성립한다는 것도 알았다고 하자. 이와 같이 H의 필요조건이 동시에 충분조건이 되는 경우는 초등기하에 많이 나타난다. 이 경우는 H의 필요조건을 찾는 전략이 충분조건 찾기 과정에서 나타나는 선택이라는 전략을 사용하지 않아도 되기 때문에 보다 충분조건 찾기 전략보다 유리하다. 결과적으로보면 H의 필요조건이 동시에

2) 여기서 유사하다고 한 것은 Cornford의 분석 개념이 Polya가 예시한 바와 같이 충분조건을 찾는 것과 같은 수학적 절차에 관한 것인지 아니면 일반 문제해결에서 나타나는 개념인 역행법을 의미하는지 불분명하기 때문이다.

충분조건일 경우에는 필요조건 찾는 과정이 충분조건 찾는 과정보다는 유리하다. 그러므로 필요조건을 찾을 수 있는 경우라면 반드시 필요조건 찾기가 선행되어야 전체 해결 과정이 효율적으로 조직된다.

그렇다고 선택이라는 절차가 무조건 필요없는 것은 아니다. 나중에 상세하게 다루겠지만 문제해결 과정에서 선택은 필요조건을 찾기 어려운 경우나 찾아도 별 도움이 되지 않을 경우에는 선택이라는 절차가 불가피하다. 그렇지만 이 경우에도 선택이 앞에서 예시된 바와 같이 단순 사례 선택이 아니라 어떤 맥락에 따라 유의미하게 실행될 수 있음을 보이겠다.

한편 Pappus의 분석 개념에 대한 Robinson의 해석은 H를 참이라고 하고 H가 함의하는 A를 찾는 과정으로 규정하고 있다. 그러므로 Robinson의 분석 개념은 H의 필요조건 찾기 개념과 유사하다.[3)]

마지막으로 Descartes에 대해서 언급을 할 필요가 있다. Descartes의 분석 개념은 부분적으로 Pappus의 개념을 포함하고 있지만 전체적으로 포괄적이다. 그러므로 Descartes의 분석 개념을 Pappus의 개념과 비교하기 위해서는 Descartes의 분석 개념을 보다 명확하게 정리해둘 필요가 있다. Descartes는 분석이라는 의미는 매우 포괄적인데 그럼에도 불구하고 그의 분석 개념은 근본적으로 두 가지로 구분할 수 있다. 하나는 단순한 명제 분석을 의미하는 것으로의 분석이고 다른 하나는 일반적으로 복잡한 대상은 알 수 있을 때까지 분해한다는 것을 분석이라고 하였다. 이 개념은 사물을 그 부품으로 분해하는 것과 같은 물리적 과정과 개념을 그 속성으로 분해하는 것과 같은 추상적 과정으로 나눌 수 있다. 전자는 명제논리학에서 필요조건 찾기 개념에 해당되고 후자는 현재 환원론이라고 하는 자연과학의 거대 방법론으로 발전하였다. 한편 Descartes는 주어진 문제를 대수방정식으로 환원하는 분석을 제안했다. 이 분석 개념은 다음과 같이 진행된다. 일단 방정식을 만들고 그것을 $f(x)=0$라고 하자. 만약 α가 $f(x)=0$의 근이라면 이 방정식을 풀어서 α를 얻게 된다. 이 과정은 필요조건 찾기 개념과 같다. 즉 H를 가설 '$f(x)=0$의 근은 존재한다.'라고 하면 그 근을 α라고 하여 대수적 조작을 하면 α에 대한 정보를 직접 얻게 된다. 여기서 대수적 조작은 항상 연역적이므로 결국 이 과정은 근본적으로 H에 대한 필요조건 찾기에 해당된다. 여기서 강문봉(1992, p85)은 "등식의 변형은 일반적으로 동치 변형이며,.." 그리고 "주목해야 할 점은 대수적 방법은 알고리즘화되어서 그 자체가 정당화의 절차가 된다는 점이다."라고 주장하면서 Descartes의 방법이 발견적이며 동시에 논증적이라고 했는데 이 주장은 일반적으로 옳지 않다. 예를 들면 방정식 $\sqrt{x}=-x$를 대수적으로 조작하면 이 방정식의 근이 되기 위한 필요조건은 '$x=0$ 또는 $x=1$' 가 된다. 그러나 이 필요조건은 주어진 방정식의 근이 되기 위한 충분조건은 아니다. 일반적으로 대수적 조작

3) 여기서도 유사하다고 한 것은 Pappus의 분석 개념에 대한 Robinson의 해석에서 함의 개념이 보다 일반적으로 사용될 수 있기 때문에 필요조건 찾기 개념과 같다고 하지 않고 유사하다고 하였다.

이란 하나의 대상에 작용소를 적용시키는 것이고 그 작용소가 1-1 함수가 되지 않으면 그 대수적 조작은 비가역적이다.[4] 그러므로 대수방정식의 풀이는 발견적이지만 논증적은 아니다. 그러므로 이 방정식을 완전하게 풀려면 근이 되기 위한 필요조건 '$x=0$ 또는 $x=1$'로부터 '선택'을 통해서 충분조건을 찾아야 하는 과정이 부가적으로 필요하다. 방정식의 경우는 필요조건을 통하여 개연성을 확보하고 이어 선택을 통하여 충분성을 수행함으로써 바람직한 결과를 얻는다.

앞에서 논의한 바에 의하면 Pappus의 분석의 개념에 대한 여러 주장들을 종합하면 Cornford의 해석과 Robinson의 해석으로 요약 정리할 수 있다. 그러나 앞에서 언급했다시피 Cornford의 해석과 Robinson의 해석이 각각 충분조건 찾기 개념과 필요조건 찾기 개념과 동일하다는 것은 아니며 그런 개념보다는 모호하면서도 다소간 포괄적인 성격을 가지고 있다고 본다. 그렇지만 이와 같은 포괄적 개념은 그 자체로서 문제해결의 전략으로서 중요한 역할을 하고 있기 때문에 여기서 그 의미를 축소하자는 것은 아니며 단지 구별할 필요가 있음을 제안한다.

이상으로 Pappus의 분석 개념에 대하여 다양한 해석을 들어보았는데 이것을 종합하여 표로 만들면 다음과 같이 되겠다.

해석자	해석	비고
Polya	$H \to A$	수학적 명제에 한함
	$A \to H$	일반적인 상황
Cornford	$A \to H$	
Robinson	$H \to A$	
Descartes	$H \to A$	수학적 명제에 한함
	H의 분해	일반적인 상황

이상은 역사적 관점에서 시도한 선행 연구에 대한 요약이다.

2. 유용한 분석 개념과 분석 절차

앞에서 Pappus의 분석 개념은 근본적으로 Robinson과 Cornford의 해석으로 구분된다는 것을 보았으며 그의 해석은 수리 논리적 함의뿐만 아니라 단순히 선행 조건 이나 후행 조건 개념도 포함되어 있다. 그러나 여기서는 Robinson과 Cornford의 해석 대신에 좀 더 엄격한 개념인 필요조건 찾기 개념과 충분조건 찾기 개념을 중심으로

4) 이 방정식에서 양 변을 제곱하는 과정은 $T(x)=x^2$라는 작용소를 사용하게 되는데 이것은 1-1이 아니다. 일반적으로 조작이 계산으로 되어 있는 경우 예를 들어 어떤 함수를 정적분하게 되면 이 때 적분 작용소는 함수의 정보를 수로 변환시키는 경우가 되겠는데, 이 경우는 함수가 가진 정보를 대부분 사라지게 한다.

논의한다.

가설 H에 대한 필요조건은 수학의 일부 문제를 제외한다면 논증적은 아니라는 것과 H에 대한 충분조건은 논증적이지만 발견적인 것은 아니라는 것을 알고 있다. 그러므로 한 문제가 주어졌을 때 필요조건 찾기와 충분조건 찾기를 배타적으로 적용할 경우에는 발견과 정당화라는 두 마리의 토끼를 동시에 잡을 수 있는 전략이 될 수 없다. 그러나 이 두 가지 전략을 적절하게 혼용하면 발견적임과 동시에 논증적으로 발전시킬 수 있다. 이 전략을 위하여 먼저 필요조건 찾기 개념을 다시 점검해보자. 이를 위해서는 먼저 우리가 다루고자 하는 명제의 성격에 대하여 정리를 할 필요가 있다. 다음 표를 보자.

A	B
$\angle B = \angle C$가 되는 $\triangle ABC$이 존재한다.	$\angle B = \angle C$가 되는 삼각형은 $AB = AC$이다.
삼각형의 세 꼭지점을 지나는 원의 중심을 외심이라고 정의할 때 외심은 존재한다.	외심은 삼각형의 각 변의 수직 이등분선의 교점이다.
세 변 a, b, c가 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 삼각형의 존재한다.	세 변 a, b, c가 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 삼각형은 직각 삼각형이다.
$x^2-1=0$의 근이 존재한다.	$x^2-1=0$의 근은 $\pm\sqrt{2}$이다.
미분가능 함수는 극값을 가진다.	미분가능 함수 f가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다. 역으로, $f'(a)=0$이고 $f''(a)\neq 0$이면 $x=a$는 f의 극값이다.

이 표의 목록 A와 목록 B의 진술들을 비교해보자. 목록 A에 제시된 진술은 아직까지 참인지 거짓인지 모르는 가설이며 그러나 목록 B의 진술은 증명을 기다리고 있는 잠정적으로 참인 명제들이다. 목록 A와 목록 B의 진술들 간의 관계는 어떠한가? 목록 A에 있는 진술은 대개 적절한 조건을 부가함으로써 우측과 같은 정리 형태의 진술을 얻게 되는데 대개 수학적 지식의 발견은 목록 A가 목록 B로 변환되는 순간에 일어난다. 그러므로 수학적 발견에 의미를 둔다면 우리의 논의도 목록 A의 진술 형식에서부터 시작되어야 한다.

필요조건 찾기 개념은 다음과 같은 두 가지 추론이 있는데 하나는 H를 반증하는 추론이고 다른 하나는 H를 창출하기 위한 추론이다. 이것을 간단히 각각 반증추론과 개연추론으로 부르자.

$H \to A$	$H \to A$
$\sim A$	A
-------------	-------------
H는 반증된다.	H는 개연적이다.

여기서 반증 추론에 의하여 가설이 반증되면 그 가설은 더 이상 논의될 것이 없다고 생각할 수 있다. 그러나 가설이 반증되었다고 즉시 기각되는 것은 아니다. 가설이 즉시 기각되기위해서는 결정적인 반증이 필요하다. 예를 들면 '$1000=2000$이다.'라는 가설은 결정적으로 반증된다. 그러나 가설 '세 변 a, b, c가 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 삼각형의 존재한다.'는 a, b, c가 각각 2, 2, 3에 의하여 반증됨에도 불구하고 이 가설은 즉시 기각되지 않으며 대신에 실제로 '세 변 a, b, c가 $a^2+b^2=c^2$을 만족하는 삼각형은 직각 삼각형이다.'라는 정리를 산출한다. 여기서 이 정리는 실제로 가설의 필요조건을 구하는 과정에서 나타난다는 점에 주목한다면[5] 결정적 반증이 나타나지 않는 한 주어진 가설은 기각되는 것이 아니라 오히려 개연 추론을 위한 단초를 제공한다.

개연 추론은 H가 참임을 입증할 수는 없지만 H가 참일 개연성을 확인하게 해준다. 여기서 H의 필요조건을 A라고 하면 A는 개연성을 확인해주는 것 이상의 역할을 하는데, 실제로 A는 H의 충분조건을 위한 탐색에서 탐색 영역을 불필요하게 넓히지 않도록 조사할 범위를 한정해준다. 즉 H의 충분조건을 찾을 때 탐색할 영역은 A를 넘어갈 필요가 없다는 의미이다. 즉 H의 충분조건 찾기 과정은 선택이라는 불가피한 절차를 사용해야하지만 그 과정에서 A에 의하여 어느 정도 합리적 선택이 가능하다는 점이다. 이 전략을 사용할 경우 반드시 먼저 H의 필요조건을 구한 후, 이어 어떤 선택을 통하여 H의 충분조건을 찾으면 된다. 그 이유는 H의 충분조건에 대응하는 진리집합이 H의 필요조건에 대응하는 진리집합의 부분집합이기 때문이다. 이를 예시하기 위해서 다음 가설 H '함수 f가 $x=a$에서 극소이다.'에서 시작하자. 먼저 H를 인정하면 f가 $x=a$에서 극소이므로 $h \geq 0$인 작은 h에 대하여 $f(a+h)-f(a) \geq 0$가 성립하고 동시에 $h \leq 0$되는 작은 h에 대하여 $f(a+h)-f(a) \geq 0$가 성립한다. 여기서 각각의 식에 극한($h \to 0$)을 적용하면 '$f'(a)=0$'라는 H의 필요조건을 얻게 된다. 여기서 편의상 이 필요조건을 A라고 하자. 단순히 지금과 같이 f에 대한 조작을 한다면 H의 충분조건을 찾기 위한 더 이상의 추론을 진행하는 것은 어렵다. 그러나 주어진 문제를

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(\xi)h^2}{2}$$

라고 두고 시작하면 위의 추론에서 얻은 정보보다 더 많은 정보를 얻을 수 있다. 먼

5) 이런 과정은 Lakatos(1976)에 의하여 상세하게 논의되었다.

저 위의 Taylor 근사식으로부터 f가 $x=a$에서 극소라면 $f'(a)=0$를 얻는다. 동시에 f''로부터 $f''(a)\geq 0$를 얻는다. 여기서 '$f''(a)\geq 0$'을 C_1이라고 하면 $A\wedge C_1$은 H의 필요조건인 동시에 $A\wedge C_1 \Rightarrow A$이므로 $A\wedge C_1$는 A보다 개선된 H의 필요조건이다. 이 개선된 조건은 여전히 H의 충분조건은 아니지만 이 사실로부터 선택에 의하여 '$f(a)=0$이고 $f''(a)>0$이면 f가 $x=a$에서 극소'라는 사실을 얻는다. 그러므로 이 과정은 H의 충분조건을 H의 필요조건에서 찾았다는 점에서 단순 선택보다는 개선된 방법이고 Cornford 개념의 분석보다 진보된 방법이다. 더 나아가서 다음과 같은 더 개선된 Taylor 근사식

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)h^2}{2}+\frac{f'''(a)h^3}{3!}+\frac{f''''(\xi)h^4}{4!}$$

을 사용할 수 있다면 H의 필요조건은 $f''(a)=0$인 경우와 $f''(a)>0$인 경우로 나누어 더욱 세련되게 개선할 수 있다. 즉 '$f''(a)=0$'인 경우[6]에는 H의 필요조건이 '$f'(a)=0$이고 $f''''(a)\geq 0$이다.'를 얻고 이것으로부터 '$f(a)=0$이고 $f''(a)=0$이고 $f''''(a)>0$'이면 'f가 $x=a$에서 극소이다.'라는 정리를 얻는다. 그러므로 필요조건이 충실하게 구해진다면 이 필요조건으로 부터 충분조건을 선택적으로 이용할 수 있다.

또 다른 예를 보자. 양의 수열로 된 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$가 수렴하기위한 필요조건은 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이라는 것을 알고 있다. 이 필요조건 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$은 매우 포괄적이기 때문에 이것으로부터 '그럴듯한' 충분조건을 도출하기란 실로 막연하다. 그럼에도 불구하고 a_n이 0에 가까이 간다는 사실은 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$에 대한 정보에 일말의 단서를 준다. 따라서 주어진 급수가 수렴할 때, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$의 변화는 어떻게 될까라는 질문이 자연스럽게 제기된다. 이 상황을 문제제기 형식으로 나타내면 문제제기는 '$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$이라고 할 때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$가 수렴하면 L이 존재한다.'라는 가설로 주어진다. 이제 $L<x$라고 두면, L의 정의로 부터 유한개의 n을 제외한 모든 n에 대하여, 따라서 일반성을 잃지 않고 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<x$이 성립한다고 가정해도 좋다. 이제 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<x$으로부터 다음 부등식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<a_1(x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1})$$

을 얻는다. 여기서 마지막 부등식의 좌변이 발산한다면 그 우변도 발산하고 또 우변

6) 만약 $f''(a)=0$가 되면 '$f'(a)=0$이고 $f''(a)>0$이면, f가 $x=a$에서 극소이다.'라는 정리를 적용할 수 없게 만든다.

이 발산하는 것은 $x \geqq 1$을 만족할 때 한한다. 그러므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 발산할 필요조건은 $L \geqq 1$가 된다. 여기서 모든 추론 결과를 종합하면 '$L < 1$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 수렴한다.'는 정리를 얻는다.

그러나 H를 분석한 결과에 의하여 발견한 필요조건 A가 너무 포괄적인 경우에는 A를 통하여 H의 충분조건을 찾는 방법이 도움이 될 수 없는 경우도 발생한다. 이 의미는 비유적으로 H^*를 둘러싼 A^*가 너무 넓다는 것을 의미한다. 예를 들면 '함수열 f_n이 f에 점수렴할 때, $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$가 성립한다'라는 가설적 명제 H를 보자. 이 명제에 대한 그럴듯한 필요조건은 아직까지 보이지 않는다. 그러나 이 명제에 대한 충분조건은 매우 다양하게 존재한다.[7] 아마 가장 간단한 충분조건이 'f_n이 f에 평등수렴한다.'는 경우가 되겠다. 여기서 이 명제를 C라고 하자. 이 경우는 부등식

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty$$

로부터 'f_n이 f에 평등수렴하면 $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$가 성립한다.'는 것을 얻는다. 이 경우 H의 충분조건 C는 H의 필요조건과 관계없이 구해진 것이다.

이상의 관찰에서 결론을 내린다면 다음과 같이 요약할 수 있다.

i) 가설 H의 검증에서 결정적인 반례가 있지 않는 한 가설은 적절한 필요조건 A에 의하여 '$H \Rightarrow A$'라는 정리로 대치된다.[8] 이렇게 얻은 A는 장차 H의 충분조건을 찾기 위한 검색 영역을 효율적으로 제시한다.

ii) H의 필요조건 A로부터 H의 충분조건 C를 얻게 되면 결과적으로 '$C \Rightarrow H$'라는 정리를 얻게 되는데 여기서 C는 $C \Rightarrow A$라는 관계를 가지므로 결국 이렇게 찾은 H의 충분조건 C는 항상 H의 필요조건 A에 의존한다. 그리고 이 의존은 수학적 조작의 수준에 따라 정교해지는데 이것은 주로 해결자의 수학적 능력에 따른다.

iii) 그러나 H의 필요조건 A가 너무 일반적인 경우로 나타나거나 A 자체를 구하기 어렵게 되면 A를 통하여 H의 충분조건 찾는 방법은 비효과적이다. 이 경우는 직접 H의 충분조건을 찾을 수밖에 없다.

---

7) 적분의 수렴성에 대한 실함수론과 복소함수론의 여러 정리들이 있음을 알고 있다.

8) 이런 예로서 전형적인 것은 '급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 수렴하기 위한 필요조건은 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이다.'가 있다.

III. 결론과 제언

학교수학에서 분석은 우정호(2000)에서 상세하게 소개되어 있는데 그의 예는 주로 필요조건인 동시에 충분조건의 되는 기하학적 사례를 중심으로 진술하고 있다. 물론 가역적 조작이 가능한 문제라면 분석법은 필요조건 찾기 과정만 수행하면 그 과정이 동시에 충분조건 찾기 과정이 되기 때문에 결과적으로 발견과 정당화를 동시에 할 수 있다. 그러나 수학적 지식이 복잡한 양상을 띠게 되면서 분석 과정에서 얻은 필요조건이 더 이상 충분조건이 되지 않는 경우가 나타나게 되었는데 이 경우에는 분석에 대한 앞에서 언급한 i), ii), iii)을 유의할 필요가 있다. 특히 필요조건이 충분조건을 선택하는데 도움이 되지 않거나 아예 필요조건을 구하기 어려운 경우는 필요조건에 의존할 필요없이 바로 충분조건을 찾아야 한다. 이 경우는 주로 해결자의 능력에 의존할 수밖에 없는데 수학이 발전할수록 어떤 명제의 필요조건이 바로 충분조건이 되는 경우보다 직접적으로 충분조건을 구해야 하는 상황이 나타나는 것은 수학 지식의 복잡성에 기인한다고 볼 수 있다.

분석 절차는 문제의 난이도와는 상관없이 가설 설정-필요조건 찾기-필요조건으로부터 충분조건 찾기라는 절차에 의해서 이루어진다. 물론 매우 복잡한 수학적 문제라면 분석 과정도 당연히 복잡해질 것이다. 그러나 이 경우에 많은 보조정리들에 의하여 세분화 되고 동치 정리에 의하여 표상의 변환이 일어나겠지만 최종 정리가 제시되는 형식을 생각한다면 분석 절차의 기본틀은 변함이 없다고 본다.

문제 상황이 그리 복잡하지 않는 학교수학의 경우라면 필요조건 찾기의 기법은 탐구발견 학습에 유의미한 역할을 한다고 본다. 동시에 분석추론은 가설-연역적 추론이라는 과학적 추론의 표준방법을 배우게 한다. 그러므로 학교수학에서는 분석 기법을 통한 문제해결을 지도함으로써 수학의 발견 과정을 체험할 수 있는 기회를 제공해야 한다고 본다. 그러나 현 수학교과서는 가설적 진술이 아니라 가설을 검증하는 과정에서 획득한 결과로 나타난 정리만을 제공하는 소위 형식주의 방식의 서술로 편집되어 있는데 이 방식은 학생들이 수학적 발견의 과정을 체험할 수 없게 하는 약점을 지니고 있다. 현 교과서에서 필요조건 또는 충분조건이라는 개념이 명제 단원에서 간단하게 소개된 이후, 다른 단원에서 나타나지 않는 현상은 형식주의 방식이 고착되었다는 증거이기도 하다. 문제해결을 지향하는 교육이 되기 위해서는 필요조건 충분조건이 교과서의 모든 단원에서 부활되어야 한다고 본다.

참고 문헌

1. 강문봉. 분석법에 관한 고찰. 대한수학교육학회 논문집 (1992) 2(2). 81-93.
2. 우정호. 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부. 2000.
3. Greeno, J. G. *Nature of problem solving abilities.* In W. K. Estes (Ed), Handbook of learning and cognitive processes (Vol.5, pp. 239-270), Hillsdale, NJ: Earlbaum. 1978.
4. Greeno, J. G. & Simon, H. A. *Problem solving and reasoning.* In R. C. Atkinson, R. Hernstein, G. Lindzey, & R. D. Luce(Eds.), Steven' handbook of experimental psychology(Rev. ed.), New York: Wiley. (1988) 589-672.
5. Heath, T. L. Euclid: *The Thirteen Books of the Elements*, Vol.I, New York: Dover, 1956.
6. Lakatos, I. *Proofs and Refutations*: The Logic of Mathematical Discovery. J. Worrall & E. Zahar (Ed.), 1976.
7. Polya, G. . *How to Solve It* (2nd ed.) Princeton, NJ: Princeton University Press. 1957.

On the Analysis

Department of Mathematics Education, Kyungpook National University, Yoon Jae Yoo

In this article it is investigated what role analysis play in the reasoning. The author suggests that the mathematical statements should be reformulated so that anlaysis can be activated in the reasoning.

Key Words : analysis, necessary condition, sufficient condition, school mathematics.

2000 Mathematical Subject Classification. 01A20, 97C90

ZDM Subject Classification : U24, H14, F54, G78

접수일 : 2008년 11월 26일　　수정일 : 2009년 1월 10일　　게재확정일 : 2009년 1월 16일