한국학교수학회논문집 제 12 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 12, Number 4, 545-562, December 2009

미분 문제해결 과정에서의 오류 분석

전영배[1)] · 노은환[2)] · 최정숙[3)] · 김대의[4)] · 정의창[5)] · 정찬식[6)] · 김창수[7)]

미적분은 우리 생활의 여러 방면에 활용되고 있으며, 경제학이나 행정학 등 사회과학 분야에서도 기초를 이루고 있다는 점에서 이공계에서만 중요시하게 다루어지는 것에 대한 많은 논란이 있어 왔다. 다행히 2010년부터는 일반계 고등학교 2학년 수학과 교육과정에 미적분 단원이 도입된다고 한다. 처음 미적분을 접하게 되는 학생들은 먼저 미분학습에서 흥미를 잃는다거나 미분학습에 대한 불안과 기피현상을 겪지 않도록 해야 한다. 이에 대비하기 위해 본 연구는 학생들이 교과서에서 평소 접할 수 있는 일반화된 미분문제를 중심으로 예비검사를 실시하고 전문가의 검토와 예비검사를 바탕으로 선정된 최종 검사지를 투입하여 미분 문제해결 과정에서 나타나는 오류를 분석틀에 맞게 분류·분석함으로서 미분학습 지도방안에 대한 기초자료를 마련하고자 하였다.

주요용어 : 오류 분석, 오류 유형, 오류 유형 분석틀, 미분 문제해결

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학은 수량과 관련된 수학적 사실, 관계, 규칙을 다루며, 공간에서 일어나는 다양한 학문에 대해 연구하는 분야로서 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다(교육과학기술부, 2008). 이러한 수학교과의 영역 중에서도 미적분은 초·중등교육을 통해 획득한 여러 지식이나 기능을 종합하는 고등학교 수학과 교육과정에서 중요한 위치를 차지하고 있으며 자연과학 분야에 입문하기 위한 필수 과정이라 할 수 있다. 그 중에서도 미분은 자연현상과 그 응용에

1) 경상대학교 (skywine@gmail.com)
2) 진주교육대학교 (ehroh@cue.ac.kr)
3) 삼천포여자고등학교 (mtjss@hanmail.net)
4) 경상대학교 사범대학 부설고등학교 (goodidea01@hanmail.net)
5) 통영 사량중학교 (widejec@hanmail.net)
6) 진주 남강초등학교 (jcs1988@dreamwiz.com)
7) 경상대학교 사범대학 부설중학교 (rnswk@chol.com)

관련하여 폭넓게 활용되고 있고 우리 생활 속에 밀접하게 관련된 분야가 되고 있다(조태근 외 4인, 2002). 물론 이외에도 주식투자에서 그래프를 분석하여 투자동향을 파악하는데 응용되기도 하는 등 실제 생활의 여러 방면에서 부지불식간에 실용화되고 있는 실정이다(오카베 츠네하루, 김병학 역, 2002).

그럼에도 미분은 고교 교육과정이나 학생들에게 그다지 인기 없는 교과목으로 전락되고 있다는 점에서 그 원인과 해결책을 교육적 차원에서 심히 고려해 봐야 할 필요가 있는 것이다. 실제로 연구진의 교육현장에서 일어난 예를 통해 그 심각성을 살펴보자. “멀리서 다가오는 차의 속도를 측정하여 속도위반 차량을 찾아내는 교통단속 시스템은 수학과 교육과정에서 볼 때 어떠한 영역과 관련이 있을까?”라는 질문을 연구진이 근무하는 중소도시의 한 일반계 고등학교 2학년 심화반 학생들에게 제시하였다. 10여분이 지난 후에야 그들 중 다섯 명만이 미분과 관련된 것 같다고 답할 뿐이었다. 또 다른 예로 우리나라의 한 신문[8]에서는 『국가경쟁력은 과학기술 수준이 좌우하고 과학기술은 수학 수준이 좌우한다. 그 수학의 핵심 개념인 미적분이 국내에선 한동안 찬밥 취급을 받았다. 공부하기 어려워 사교육비 부담을 키운다는 이유로 인문계 과목에서 빼버린 것이다. 덩달아 이공계 학생들까지 미적분 공부를 접었다. 지난해 공대 신입생의 61%가 미적분이 빠진 인문계 수리시험을 치렀다. 과학기술과 학문의 기반을 우리 스스로 무너뜨린 것이나 다름없다. 2012학년도 수능시험 개편으로 내년부터 인문계 고교생들도 미적분을 다시 배운다니 다행이다. ‘미적분 몰라도 사는 데 아무 지장 없다’는 무지한 발상으로 이공계 분야에 잡초만 무성하게 만들어버린 이런 어리석은 일을 다시 되풀이해서는 안 된다.』라고 하는 논평을 실은 바 있어 학생과 수학계에 대해 미분 기피현상에 대한 우려의 목소리를 전하고 있다. 다행히 교육과학기술부(MEST)에서는 2010년부터 일반계 고등학교 2학년 교육과정에도 미적분학을 편성하여 이수하게 함으로써 미적분의 활용성과 적용성의 가치를 인식하도록 하겠다는 방침을 밝힌 바 있다.

미분은 해석학 이론에 기초를 이루는 영역으로 그 중요성에 대한 인식은 높아지고 있으나, 미분에 대한 선행 연구들은 대부분의 학생들이 미적분학을 어려워하고, 공식을 통한 기계적 계산으로 형식주의에 빠져 있으며, 문제해결 과정에서 많은 오류를 범하고 있음을 지적하고 있다. 김부윤 · 김윤영(2000)은 고등학교 학생들은 미분에 대한 학습을 공식 암기와 문제를 푸는 테크닉에 대한 연습으로 생각하고 있는 실정이라 하였으며, 김상우(2001)는 고등학교에서의 극한에 대한 정의가 Cauchy의 ε-δ에 의한 것이 아니라 극한에 도달하는 과정만 중요시 한 직관적인 것이란 점에서 미분의 본질적 개념 학습보다 알고리즘적 학습만 하게 되는 결과를 초래하였으며, 이러한 학습은 궁극적으로 학생들로 하여금 극한 개념을 어려워하게 하고 미분에 관한 문제해결 과정에 많은 오류를 범하게 하는 한 원인이 된다고 하였다. 그 외에도 김정희 · 조완영(2004)은 고등학교 학생들의 미분 문제풀이 과정에서 나타나는 오류를 정리 분석하여, 그 원인으로 개념에 대한 불충분한 이해와 문제해결을 쉽게 포기하려는 수학적 성향의 부족을 지적하면서 미분계수와 접선 그리고 도함수에서 학생들이 갖는 오개념에 대해 조사하였다. 정종규(2001)는 고등학교 1학년 지수 · 로그 단원을 중심으로 문제해결에 있어서의 오류를 분석하고 그 유형을 분류하여 그에 따른 지도방안에 대해 제시하였다.

최근의 오류에 대한 선행연구를 단계별로 살펴보면, 먼저 유아를 대상으로 한 것으로 황해익 · 고은미(2006)는 유아의 수학학습 잠재력 측정과정에서 나타난 오류 및 전략 유형을

8) 2008년/12월/16일자 조선일보 시사닷컴

분석하여 오류의 개선과 효과적 전략 사용에 대한 수학학습 잠재력 평가의 교수적 기능을 살펴보고자 하였으며, 안성훈・김은옥・고대돈(2004)은 초등학생의 ICT 활용 학습에서의 오류에 대한 처치 방안을 연구하였다. 중학교 교육과정에서의 오류에 대한 연구로는 김용호(2000)의 일차부등식에서 문제해결 과정에 발생하는 오류 유형에 대한 분석이 있다. 고등학교 교육과정에서의 오류에 대한 연구로는 김종명・김상래(2006)의 수열의 극한과 무한급수 단원에서의 문제해결에서 발생하는 오류유형에 대한 분석연구가 있으며, 일반적 수학교육에 대한 것으로 이대현・박배훈(2001)이 직관을 오류와 관련하여 고찰한 것이 있다.

이러한 다양한 측면에서의 오류 누적으로 인해 학생들은 그 분야에 대해 부정적 태도를 가지게 되고, 계속되는 학습부진으로 수학에 대한 흥미를 잃게 되는 것이다. 수학에 있어 오류(Error)는 다른 교과와는 달리 오답으로 처리되고 인식되는 경향이 강하다. 이러한 오류에 대한 부정적인 견해는 학습자의 학습활동을 방해하고 수학 교과에 대한 흥미를 잃어버리게 하는 요인으로 작용하기도 한다. Borasi는 이와 같은 수학에 대한 생각을 바탕으로 질문보다는 답이 중요하고, 학생들의 통찰보다는 교사의 지혜에 근거하고 있다고 지적하면서 오류가 틀린 것을 결과적으로 치료하는 것이 아니라 사고와 탐구를 자극할 수 있고 학문에 대한 더 깊은 이해를 할 수 있다는 점에서 오류의 긍정적인 역할을 강조하고 있다(노은정, 2002, 재인용). Maurer(1987)는 인지과학적 접근을 통해 밝혀진 이론에서 학생들의 오류의 특성은 우연적이거나 실수에 의한 것이 아니라 지속적이고 체계적・규칙성이 있으며, 교사가 그것을 파악하여 지도한다면 오류를 교정하고 재학습이 가능해진다고 하였다. 이처럼 학습에서 오류는 절대적인 것이 아니라 학습자 자신의 올바른 개념형성을 위해 학생이나 교수 모두에게 피드백 할 수 있도록 하는 중요한 자료가 된다. 따라서 단지 오류를 없애기 위한 진단과 처방의 목적이 아니라 오류가 학습자에게 부정적인 것만 아니라는 인식을 갖게 할 수 있다면 다양한 사고와 탐구를 자극하게 하여 수학학습에 대한 깊이를 더해 줄 수 있을 것이다.

본 연구에서는 교수・학습 방법 측면에 대한 합리적인 지도 방안 모색을 위한 기초자료를 제공하기 위해 고등학교 수학 교육과정을 중심으로 2학년 학생들이 미분 문제해결 과정에서 보이는 오류의 유형을 분류하고 분석하는 것에 그 목적을 둔다.

2. 연구 문제

이상의 연구 목적을 위해 다음과 같이 연구문제를 설정하였다.

첫째, 관련 이론 및 선행 연구 분석, 현장 지도 경험을 바탕으로 미분에 대한 오류 유형을 설정한다.

둘째, 고등학교 수학 교과서를 중심으로 미분 검사지를 제작한다.

셋째, 미분 검사지를 투입하여 문제에 대한 오류 원인을 분류・분석한다.

Ⅱ. 연구의 실제

1. 연구 절차

본 연구는 고등학교 수학 교육과정에서 학생들이 미분 문제해결 과정에서 보이는 오류의 유형을 알아보기 위해 N. M. Hadar & O. Zaslavsky(1987)의 오류 분석 모델과 연구진의

교육현장 경험을 바탕으로 오류 분석틀을 개발하였다. 개발된 오류 분석틀에 기초하여 미분 검사지를 제작 · 투입해 결과를 분석하는 절차로 연구가 진행되었다. 본 연구에서 사용한 검사지는 고등학교 수학Ⅱ의 교과서(박두일 외, 2007; 이강섭 외, 2007; 임재훈 외, 2007; 우정호 외, 2007; 조태근 외, 2007)를 분석하여 개발하였으며, 교과 전문가의 내용 타당도 검증을 거쳤다. 오류가 발생할 수 있는 문항을 개발하기 위해 학생들이 평소 접할 수 있는 일반화된 문제를 중심으로 예비검사를 실시하고, 그 결과 문항 자체 결함, 이해가 모호한 문항 등을 수정 보완하였다. 이러한 전문가의 검토와 예비검사를 바탕으로 선정된 최종 문항은 고등학교 2학년에게 적용되었고, 학생들이 제출한 검사지를 연구진이 한데 모여 채점한 후 문항별 분석을 하였다. 그리고 오류를 보인 문항은 분석틀에 맞게 분류 · 분석하였다. 예비검사지는 진주시 소재 G고등학교 일부 학급을 대상으로 실시하였으며, 본 검사지는 경남 지역 3개 고등학교 2학년 총 3학급 105명을 대상으로, 해당 학교 담임교사의 협조를 얻어 자율학습 시간을 이용하여 투입하였다. 학생들이 문제해결 과정에 대한 자신의 생각이나 풀이과정을 자유롭게 기술할 수 있도록 답란을 충분하게 제공하였으며, 학생들이 문제해결 과정에 자유롭게 반응할 수 있도록 하기 위해 시간의 제약은 두지 않았다.

2. 오류 유형 분석틀 개발

1) 오류 유형의 예상

본 연구에서는 오류 유형의 분석틀을 개발하기 위하여 먼저 N. M. Hadar & O. Zaslavsky(1987)가 문장제 문제 풀이과정에서 제시한 6가지 오류 모델-오용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 필수적인 사실 · 개념의 부족한 숙련, 요구되지 않은 해답, 기술적 오류-을 바탕으로, 연구자들의 학교 현장의 경험을 통해 충분히 예측할 수 있는 학생들의 오류의 유형을 다음과 같이 예상하였다. 단, 기술상의 오류-풀이과정에서 나타나는 계산 혹은 기술상의 오류-는 누구나 예측할 수 있으며 가장 빈번하게 나타나는 오류이므로 다음 설명에서는 생략하였다.

(1) 잘못 사용된 오류

▣ 진술되지 않은 조건을 주어진 것처럼 사용하는 경우

○ $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 극한값을 구하여라.

위 문제에서 주어진 함수가 미분가능한지 그렇지 않은지에 대한 언급이 전혀 주어지지 않았지만 학생들은 위 문제 풀이에서 미분가능성이 주어진 것처럼 풀이를 시도하려 할 것이다.

[예상되는 응답] 9)

$t=2h$라 두면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\times 2=2f'(a)$이다.

9) [예상되는 응답]은 범할 수 있는 학생의 오류에 대한 해결과정을 나타낸 것이다.

그러나 이 문제에는 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이거나 미분가능함에 대한 진술이 없으므로 주어진 극한에 대한 값을 바로 구할 수는 없게 된다. 따라서 이 문제의 풀이를 위해서는 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 풀이하여야 한다.

[풀이] 10)

① $f(x)$가 $x=a$에서 미분 불가능한 경우, $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은 존재하지 않는다.

② $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능한 경우,

$t=2h$라 두면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\times 2=2f'(a)$이다.

▣ 관련 없는 정보를 풀이에 사용하는 경우

○ $y=\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$의 $x=1$에서의 미분 계수를 $f(1)$, $f'(1)$을 사용하여 나타내시오.(단, 모든 x에 대하여 $f(x)>0$)

위 문제에서 분명히 $y=\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$라는 y와 $f(x)$라는 관계가 주어졌음에도 불구하고, 일반적으로 함수에서 y와 $f(x)$가 같은 것으로 생각하는 관습으로 인하여 학생이 임으로 $y=f(x)$라는 관계를 재설정하여 문제를 푸는 오류를 범할 수 있다.

[예상되는 응답]

일반적으로 $y=f(x)$이므로 $f(x)=\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$이고, 모든 x에 대하여 $f(x)>0$이므로 $\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}=1$이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\{f(x)\}^{-\frac{1}{2}}\times f'(x)=0$이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$\frac{1}{2}\{f(1)\}^{-\frac{1}{2}}\times f'(1)=0\,\frac{1}{2}(f(1))^{-\frac{1}{2}}\times f'(1)=0$이다.

[풀이]

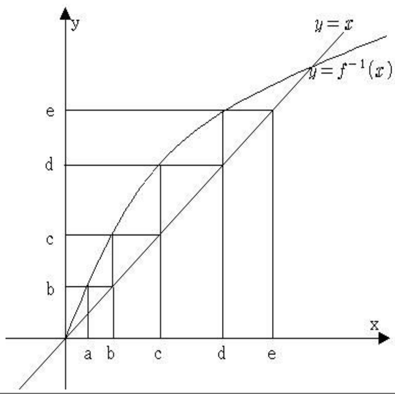
$y=\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}$이므로 $y'=\frac{1}{2}\{f(x)\}^{-\frac{1}{2}}\times f'(x)$이다. 따라서 $x=1$에서의 y의 미분계수는

$y'=\frac{1}{2}\{f(1)\}^{-\frac{1}{2}}\times f'(1)$이다.

10) [풀이]는 올바른 문제해결에 대한 한 방법을 나타낸 것이다.

▣ 세부 항목을 잘못 옮겨 쓰거나 빠뜨리는 경우

○ 함수 $y=f(x)$에 대한 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 오른쪽 그림과 같을 때, $y=f(x)$의 구간 $[c, d]$에서의 평균변화율을 구하여라.



위 문제에서는 함수의 역함수에 대한 언급과 그래프상의 설명은 있지만 처음 주어진 조건 $y=f(x)$에 대해 생각하고 $y=f^{-1}(x)$에 대해서는 생략하게 되어 생기는 오류이다.

[예상되는 응답]

$f(c)=d$이고 $f(d)=e$이므로 구하고자 하는 평균 변화율은 $\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}=\dfrac{e-d}{d-c}$이다.

[풀이]

구간 $[c, d]$에서 $f(x)$의 평균변화율은 $\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$이다.

$f^{-1}(c)=d$이므로 $f(d)=c$, $f^{-1}(b)=c$이므로 $f(c)=b$이다. 따라서 $\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}=\dfrac{c-b}{d-c}$이다.

(2) 잘못 해석된 언어의 오류

▣ 다른 의미로 해석하여 수식이나 용어를 나타내는 경우

○ 함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$로 정의한다. $g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $g(1)$의 값을 $f'(1)$을 사용하여 나타내어라.

가끔 학생들은 문제에서 주어지는 의미를 자의적으로 해석하고 스스로 판단해 버리는 경향이 많다. 이 문제에서 예상할 수 있는 오류는 함수 $f(x)$에 대해 1과 x사이의 평균 변화율을 $g(x)$로 정의하고 있는데, 학생은 $g(x)$를 x에서의 $f(x)$의 순간변화율로 자의적으로 해석하여 오류를 일으킬 가능성이 있다.

[예상되는 응답]

$g(x)=f'(x)$이므로 $g(1)=f'(1)$이다.

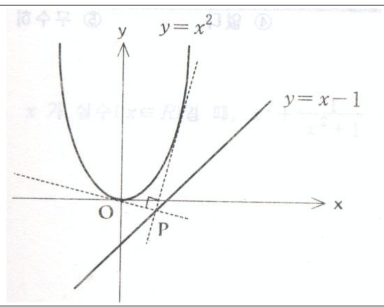
[풀이]

$g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)$이다.

따라서 $\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이다.

▣ 그래프를 잘못 해석한 경우

○ $y=x-1$ 위의 점 P에서 $y=x^2$에 그은 두 접선이 오른쪽과 같을 때, P의 좌표를 구하여라.



학생들은 사실 그래프에서 많은 오류를 보이며, 자세히 살펴보기 보다는 힐끔 쳐다보고 문제를 풀이하려는 경향이 많다. 그렇게 되면 너무나 당연한 사실도 전혀 다르게 전개되어 큰 오류를 범하게 될 것이다. 만약 위 문제의 그래프에서 두 접선이 수직이 아니라 $y=x-1$와 음의 기울기를 가지는 접선이 수직인 것으로 잘못 해석한다면 학생들은 다음과 같은 오류를 범할 수 있을 것이다.

[예상되는 응답]

$y=x^2$ 위의 점 $(t,\ t^2)$에서의 접선의 방정식을 구하면, $y'=2x$이므로 접선의 방정식은 $y=2t(x-t)+t^2$이다. 한 접선이 $y=x-1$과 수직이므로 접선의 기울기는 $2t=-1$이므로 $t=-\dfrac{1}{2}$이다. 그러므로 한 접선의 방정식은 $y=-(x+\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{4}=-x-\dfrac{1}{4}$이므로, $y=x-1$와의 교점을 구하면 $(\dfrac{3}{8},-\dfrac{5}{8})$이다.

[풀이]

$y=x^2$ 위의 점 $(t,\ t^2)$에서의 접선의 방정식을 구하면 $y'=2x$이므로 접선의 방정식은 $y=2t(x-t)+t^2$이다. 이 직선이 $y=x-1$ 위의 점 $(x,\ x-1)$ 위를 지나므로

$x-1=2t(x-t)+x^2 \quad \therefore t^2-2tx+x-1=0$

이 방정식의 두 근을 $t_1,\ t_2$라 두면 근과 계수와의 관계에 의해서 $t_1\cdot t_2=x-1$.

그리고 두 직선이 수직이어야 하므로 $(2t_1)(2t_2)=-1$. 여기서 $t_1t_2=-\dfrac{1}{4}$이므로

$x-1=-\dfrac{1}{4}$에서 $x=\dfrac{3}{4},\ y=-\dfrac{1}{4} \quad \therefore$ P의 좌표는 $(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{4})$.

(3) 논리적으로 부적절한 추론의 오류

○ 모든 점에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 $f(0)=0$이고, $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=3$이면 $\lim_{x\to0}f'(x)=3$임을 보여라.

문제해결에서 논리적 추론은 논리적 기술 방식과 전개 방법에 익숙하지 않은 학생들이 일으키게 되는 오류 중 많은 부분을 차지할 것이다. 그러한 오류를 일으키는 학생의 예상되는 응답을 살펴보면 다음과 같다.

[예상되는 응답]

함수 $f(x)$가 미분가능이므로 평균값의 정리에 의하여 x와 0사이에 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(t)$ 인 t가 $0 \leqq t \leqq x$에서 존재한다. 그러므로 $3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}f'(t)$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f'(t)=3$ 이다.

이 문제의 풀이를 보면 결론 부분에서 $\lim\limits_{x\to 0}f'(t)=3$ 이라고 했는데 x, t의 관계에 대한 언급이 부족하므로 다음과 같이 수정하여야 한다.

[풀이]

함수 $f(x)$가 미분가능이므로 평균값의 정리에 의하여 x와 0사이에 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(t)$ 인 t가 $0 \leqq t \leqq x$에서 존재한다. 그러므로 $3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}f'(t)$.

$0 \leqq t \leqq x$에서 $x\to 0$일 때 $t\to 0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{t\to 0}f'(t)=3$ 이다.

(4) 필수적인 사실 개념이 부족한 숙련에서의 오류

▣ 알고리즘의 무지에서 오는 경우

○ 함수 $f(a)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 극한값 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}$ 을 $f'(a)$를 써서 나타내어라.

미분 문제 중 미분계수를 구하는 문제는 알고리즘적 문제일 것이다. 하지만 알고리즘에 익숙하지 않은 학생들은 미분계수를 구하는 문제에서 오류를 범하게 될 것이다. 위의 문제의 경우 알고리즘에 의지하지 않고 $h\to 0$이므로 $-h\to 0$라고 판단하게 되면 $a-h$와 $a+h$를 동일한 것으로 생각해서 문제해결에서 잘못을 범하게 될 것이다.

[예상되는 응답]

$h\to 0$ 이므로 $-h\to 0$,

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$이다.

그러나 미분의 정의에 의하면 $f(a-h)$에서의 $-h$와 분모의 h, 그리고 $h\to 0$에서의 h 모두가 동일해야 하므로 이 문제의 올바른 풀이는 다음과 같다.

[풀이]

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{-h\to 0}-\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}=-f'(a)$이다.

▣ 기초적인 개념의 부족에서 오는 경우

○ $I=[-1,1]$에서 정의된 함수 $y=\lvert x\rvert$의 도함수를 구하여라.

도함수를 구하라는 문제에서는 정의보다는 공식에 의해 문제를 풀이하려는 경향이 짙다. 그러나 이 문제를 단순히 정의역의 범위를 나누어 도함수를 구하다보면 $x=0$에서의 좌미분계수와 우미분계수가 일치하지 않으므로 $x=0$에서의 미분계수가 존재하지 않는다라는 기초적인 사실을 놓치기 쉽다. 예상되는 학생들의 응답과 올바른 풀이는 다음과 같다.

[예상되는 응답]

$y=\begin{cases} x & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ -x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$이므로 $y'=\begin{cases} 1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ -1 & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$이다.

[풀이]

$y=\begin{cases} x & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ -x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$이므로 $y'=\begin{cases} 1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ -1 & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$이고, $x=0$에서의 도함수는 정의되지 않는다.

▣ 오개념에서 오는 오류의 경우

○ 함수 $f(x)$에 대하여 두 집합 A, B를 $A=\left\{a \mid \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{가 존재}\right\}$, $B=\left\{a \mid \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\text{가 존재}\right\}$와 같이 정의할 때, 두 집합을 포함관계에 의해 나타내어라.

만약 학생이 미분이 시작되기 전 극한에 대한 오개념 혹은 미분의 정의에 대한 오개념이 형성되어 있다면 문제 풀이에 많은 오류를 범하게 될 것이다. 이 문제에서 집합 A와 B가 같음은 너무나 쉽게 알 수 있지만, 극한 혹은 미분계수에 대한 오개념이 형성되어 있다면 문제해결에 어려움이 따를 것이다.

(5) 요구되지 않은 해답의 오류

○ 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 극한값의 존재 여부를 조사하여라.

학생들은 문제를 신중히 읽기보다는 자신이 필요한 부분만 습관적으로 읽고 문제 풀이에 임하게 된다. 이 문제에서 보면 요구하는 답은 극한의 존재 여부이지 $f'(1)$의 값은 아니다. 그러므로 답안에는 극한이 존재한다고 답안을 제출해야 한다. 하지만 학생들은 이 문제에서 $f'(1)$의 값을 구하기 쉽다.

[예상되는 응답]

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$이므로 $f'(1)=-\dfrac{1}{4}$이다.

2) 오류 유형 분석틀 개발

위에서 살펴본 예상되는 오류를 통해, 오류 유형을 내용상의 오류(C), 개념상의 오류(N), 기술상의 오류(D)로 대분류 하고, 내용상의 오류(C)는 다시 오용된 오류(U), 잘못 해석된 언어(A), 논리적으로 부적절한 추론(L)으로, 개념상의 오류(N)는 필수적인 사실 개념이 부족한 숙련에 따르는 오류(E), 기술상의 오류(D)는 요구되지 않은 해답(R), 기술적 오류(T), 풀이과정에서의 오류(P)로 중분류 하였다. 그리고 이들 중분류는 다시 좀 더 구체적인 오류의 경우들로 소분류 하여 오류 분석을 위한 틀을 <표 1>과 같이 완성하였다. <표 1>에서 괄호 속의 문자나 숫자는 오류 유형을 코드화[11]한 것이다.

<표 1> 오류 유형 분석틀

대분류	중분류	소분류	
내용상 오류 (C)	잘못 사용된 오류(U)	1	진술되지 않은 조건을 주어진 것처럼 사용하는 경우
		2	관련 없는 정보를 풀이에 사용하는 경우
		3	세부 항목을 잘못 옮겨 쓰거나 빠뜨리는 경우
	잘못 해석된 언어의 오류(A)	1	다른 의미로 해석하여 수식이나 용어를 나타내는 경우
		2	그래프를 잘못 해석한 경우
	논리적으로 부적절한 추론의 오류(L)	1	논리적으로 부족한 추론의 경우
개념상 오류 (N)	필수적인 사실 개념이 부족한 숙련에서의 오류(E)	1	알고리즘의 무지에서 오는 경우
		2	기초적인 개념의 부족에서 오는 경우
		3	오개념에서 오는 오류의 경우
기술상 오류 (D)	요구되지 않은 해답의 오류(R)	1	요구하는 답을 제시하지 않는 경우
	기술적 오류(T)	1	계산상 오류의 경우
		2	자료를 잘못 뽑는 경우
		3	대수 기호를 잘못 다루는 경우
		4	연산방식에서의 오류의 경우
	풀이과정 제시에서의 오류(P)	1	답만 제시한 경우
		2	현 단계까지는 옳으나 다음 단계의 풀이과정이 제시되지 않은 경우
		3	답은 맞으나 풀이과정이 틀린 경우

3. 검사지 제작

본 검사지는 미분 단원에서 나타나는 오류 유형을 알아보기 위하여 선행연구와 학교수학 교육현장에서 학생들이 전형적인 오류를 드러내는 문항을 참조하고, 고등학교 수학Ⅱ 교과서에 있는 문제를 중심으로 다항함수의 미분단원 내용을 바탕으로 검사지를 작성하였다. 사전 검사지는 현직 교사 3명이 미분 단원의 7개의 소단원에서 학교현장에서 학생들이 빈번하게 오류를 범하는 문제들을 3~4문항을 선별하여 25문항씩을 출제한 후, 공통적인 유형의

11) 대분류, 중분류는 영문의 첫 글자를 대문자로 나타내었다. 즉 내용(contents)상의 오류는 C, 개념(notion)상의 오류는 N, 기술(description)상의 오류는 D로 표현하였으며, 중분류는 오류의 의미를 대표하는 낱말을 사용하였다: 사용(use), 해석(analysis), 논리적(logic), 필수적(essential), 요구(require), 기술적(technical), 과정(process). 이렇게 구분하여 조합한 코드, 예를 들어 'CU1'은 내용상의 오용된 오류로 진술되지 않은 것을 마치 주어진 정보처럼 지적하는 경우를 말한다.

문제를 최대한 선별하고 수업시간 50분에 해결할 수 있도록 난이도를 고려하여 20문항으로 구성하였다. 이를 G고등학교 한 반에 투입한 결과, 학생들이 해결하지 못하는 문항이 다소 많아 미분법의 활용 문제와 같은 난이도가 높은 문항과 무응답이 많았던 복잡한 계산 위주의 문항은 수정하거나 삭제하고 정의와 개념 위주의 문제를 선별하여 본 검사지를 작성하였다. 본 검사지는 모두 19개의 문항으로 구성되어 있으며, 각 문항은 미분 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 오류 및 오개념과 접근방법을 조사하기 위한 것으로써 그에 대한 구체적인 내용은 ①평균변화율・미분계수・도함수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있는가? ②미분가능성과 연속성의 관계를 이해하고 있는가? ③미분법의 기본 공식을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있는가? ④미분계수의 기하학적 의미를 이해하고 있는가? ⑤미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가? ⑥도함수를 이용하여 함수의 극대・극소와 최댓값・최솟값을 각각 구할 수 있는가? 등을 포함하고 있으며 검사지의 구성 체계는 <표 2>와 같다.

<표 2> 검사지 구성 체계

문항	요 소	내 용
1	평균변화율과 미분계수	평균변화율의 정의와 미분계수의 정의를 이해하기
2	평균변화율의 정의	평균변화율의 정의를 이해하고 구하기
3	평균변화율 구하기	주어진 구간에서 평균변화율 구하기
4	미분법의 기본공식	함수의 도함수를 미분법을 이용하여 나타내기
5	미분가능성과 연속	함수의 미분가능성과 연속 이해하기
6	미분가능성과 연속	미분가능성을 이용하여 상수값 구하기
7	미분가능성과 극값	함수의 그래프에서의 미분가능성과 극값 이해하기
8	미분가능한 함수	미분가능한 함수를 구하기
9	접선의 방정식	미분계수를 이용하여 접선에 수직인 직선의 방정식 구하기
10	함수의 증가와 감소	도함수를 이용한 삼차함수의 증가・감소의 범위 구하기
11	함수의 극값과 최대・최소	함수의 극대・극소를 이용한 함수의 최댓값과 최솟값 구하기
12	미분계수	함수의 미분계수의 존재 유무 파악하기
13	미분계수와 도함수의 정의	평균변화율・미분계수・도함수의 정의 기술하기
14	역함수와 평균변화율	주어진 함수의 평균변화율을 역함수를 이용하여 구하기
15	미분계수의 정의	미분계수의 정의의 두 가지 표현 알기
16	극한값과 미분가능	극한값과 미분계수와의 관계 이해하기
17	미분계수와 극한값	미분계수의 정의를 이용하여 극한값 구하기
18	미분계수와 접선의 기울기	미분계수와 접선의 기울기와의 관계를 이해하고 점의 좌표 구하기
19	미분계수의 기하학적 의미	미분계수의 기하학적 의미 이해하기

4. 결과 분석

<표 3>은 본 연구를 위해 개발한 오류 분석틀에 따라 학생들이 풀이과정에서 보인 오류의 유형을 정리한 것이다. 본 연구는 검사에 참여한 학생들이 보인 모든 오류를 대상으로 하였으며, 분석틀의 오류 유형에 포함되는 경우는 모두 표시하였다.

<표 3> 풀이과정에서 분석된 문항별 오류 유형

오류유형 / 문항번호	C						N			D							
	U			A		L	E			R	T				P		
	1	2	3	1	2	1	1	2	3	1	1	2	3	4	1	2	3
1		○	○	○				○		○	○		○			○	
2		○						○	○	○							
3													○			○	
4		○					○				○						
5			○										○				
6	○		○				○				○		○			○	
7						○		○				○			○		
8						○	○	○	○		○				○		○
9		○	○							○	○					○	
10								○			○						○
11		○				○		○									○
12									○	○				○			
13								○	○								
14					○							○					
15															○		
16															○		
17	○	○															
18		○							○								
19	○			○	○							○				○	

오류 분석시 연구진의 관점에 따라 나타난 모든 경우를 코드화시켰으며, 학생들이 문제해결과정에서 오류를 보인 대표적인 예를 살펴보면 다음과 같다.

▣ 함수 $f(x)=x^2+2x-5$에 대하여 구간 $[0, a]$에서의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

$f(1)=1+2-5$
$=-2.$
$2a+2=-2$
$2a=-4$
$a=-2$

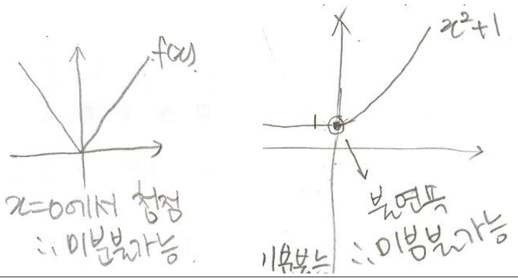
$f'(x)=2x+2$
$f'(1)=4$

평균변화율의 정의를 숙지하고 있지 않다. 그리고 1에서의 함수값 $f(1)$과 a에서의 미분계수 $f'(a)$를 같다고 하여 답을 도출하고 있다. 임의로 관련 없는 정보를 보충하고, 또한 필요 없는 정보를 풀이에 사용하는 오류를 범하고 있다.

[그림 1] NE2, CU2 오류 유형

▣ $x=0$에서 다음 함수의 미분가능성을 조사하여라.

(1)$f(x)=|x|$ (2)$g(x)=x|x|$ (3)$h(x)=x+|x|$ (4)$k(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \geqq 0) \\ 1 & (x<0) \end{cases}$



함수 $f(x)$가 연속이지만 미분불가능한 경우는 그래프 상에서 꺾이는 경우라는 것만을 숙지하여 좌우미분계수가 같음에도 불구하고 육안상 꺾여 보인다 하여 미분불가능하다고 단정 짓는 오류를 범하고 있다.

[그림 2] NE2, CL1 오류 유형

▣ 곡선 $y=x^3-2x^2+3$ 위의 점 A(2, 3)를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y=ax+b$이다. 이 때, ab의 값을 구하여라.

$y=f(x)=x^3-2x^2+3$
$f(2)=3,\ f'(2)=a$
$f'(x)=3x^2-4x$
$\therefore a=f'(2)=12-8=4$
이 때, 직선의 방정식도 점 A를 지나므로
$3=4\cdot 2+b \ \therefore b=-5$ $\therefore ab=-20$

접선에 수직인 직선의 방정식을 구하는 문제를 접선의 방정식을 구하고 있다. 주어진 조건을 잘못 받아들여 오류를 범하고 있다.

[그림 3] CU3 오류 유형

▣ 삼차함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+(5a-4)x+2$가 실수 전체의 구간에서 증가함수가 되도록 하는 a의 값의 범위를 구하여라.

$f'(x)=x^2+2ax+(5a-4)>0$
$D/4=a^2-(5a-4)<0$
$a^2-5a+4=(a-4)(a-1)<0$
$\therefore 1<a<4$

함수 $f(x)$가 증가구간과 감소구간을 모두 가지는 경우는 증가하는 구간에서는 $f'(x)>0$을 만족해야 하지만 모든 구간에서 증가하면 $f'(x)\geqq 0$이다. 필수적인 개념에 대한 불충분한 지식에서 오는 오류를 범하고 있다.

[그림 4] NE2 오류 유형

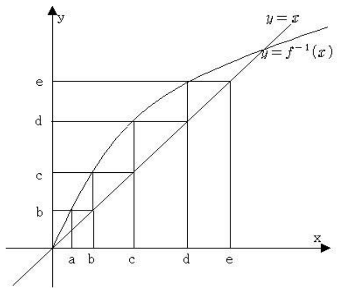
▣ 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$에 대하여 $x=-1$에서의 미분의 계수의 존재 여부를 말하고, 미분계수가 존재한다면 미분계수를 구하여라.

$$f'(x)=\frac{(x+1)'(x^2-1)-(x+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)-(x+1)2x}{(x^2-1)^2}$$
$$=\frac{(x^2-1)-(x+1)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)-\cancel{(x+1)}2x}{(x+1)^{\cancel{2}}(x-1)^2}$$
$$=\frac{\cancel{(x-1)}-2x}{(x+1)(x-1)^{\cancel{2}}}=\frac{-1}{x^2-1}$$

$x=-1$에서의 미분계수의 존재여부를 확인하지도 않고, 기계적으로 알고리즘을 이용하여 문제를 해결하려고 하고 있다.

[그림 5] DR1, NE3 오류 유형

▣ 함수 $y=f(x)$에 대한 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 오른쪽 그림과 같을 때, $y=f(x)$의 구간 $[c, d]$에서의 평균변화율을 구하여라.



$$\begin{cases} f(x)=a \\ f^{-1}(a)=x \end{cases}$$

$$\frac{f^{-1}(d)-f^{-1}(c)}{d-c}$$

$$\frac{e-b}{d-c}$$

$\cancel{f(c)=d \quad f^{-1}(d)=c}$

$\cancel{f(d)=e \quad f^{-1}(e)=d}$

↳ 반대 경우부터 고려해 보아야 함

$f^{-1}(d)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=d \quad \therefore \alpha=e$

$f^{-1}(c)=\beta \Rightarrow f(\beta)=c \quad \therefore \beta=b$

$f(x)$에서 평균변화율을 구하지 않고 $f^{-1}(x)$에서 구하고 있다. 그리고 그래프에서 $f^{-1}(d)$의 값을 잘못 읽고 있다.

[그림 6] CA2 오류 유형

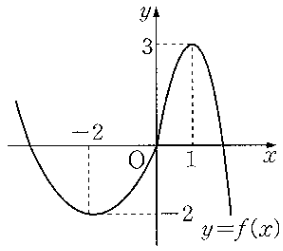
Ⅲ. 결론 및 제언

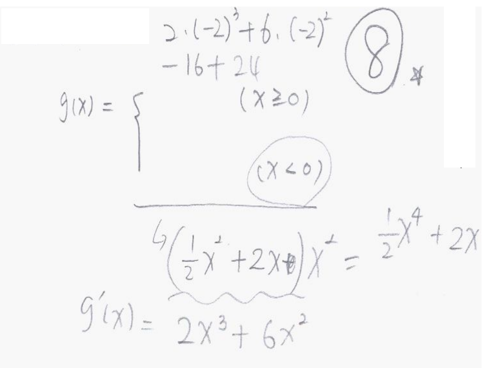
미분 분야는 적분과 더불어 수학에서 중요한 이론 분야이며 물리학, 통계학 등의 자연과학뿐만 아니라 인문 · 사회과학 등 모든 분야에서 중요한 역할을 하고 있다. 미적분에 관한 원리들은 일반적인 보편성의 내용들을 입증하는 데 주축이 되고, 수학의 내용을 이해하고 응용문제를 풀어가는 데 기본적인 역할을 하며, 창의적인 사고를 기르게 하고 많은 학습영역에 응용되며 풍부한 학습 기회를 제공해 준다.

본 연구는 고등학교 수학 교육과정에서 학생들이 미분 문제해결 과정에서 보이는 오류의

유형을 알아보기 위해 첫째, N. M. Hadar & O. Zaslavsky(1987)의 오류 분석 모델과 연구진의 교육현장 경험을 바탕으로 오류 분석틀을 개발하였다. 검사지는 미분단원에서 나타나는 오류 유형을 알아보기 위하여 선행연구와 학교수학 교육현장에서 학생들이 전형적인 오류를 드러내는 문항을 참조하고, 고등학교 수학Ⅱ 교과서에 있는 문제를 중심으로 다항함수의 미분단원 내용을 바탕으로 작성하였다. 그리고 연구를 위해 개발한 오류 분석틀에 따라 학생들이 풀이과정에서 보인 오류의 유형을 정리하여 모든 경우를 코드화시켰다.

▣ 모든 실수에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 오른쪽과 같다. $g(x)=x^2f(x)$로 정의되는 함수 $g(x)$에 대하여 $g'(-2)$의 값을 구하여라.





주어진 함수의 그래프의 개형은 $x \geq 0$인 경우는 위로 볼록하고, $x<0$인 경우는 아래로 볼록하다. 따라서 $x<0$인 경우의 함수가 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -2)$인 이차함수라고 생각하여 함수식을 $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$라고 식을 세워 문제를 해결하고 있다. 함수 그래프의 개형만으로는 함수 $f(x)$가 어떤 함수인지도 알 수 없는데 임의로 함수를 해석하여 문제를 해결하는 오류를 범하고 있다.

[그림 7] CA2 오류 유형

학생들이 문제해결 과정에서 보인 오류를 분석해 보면, 개념상의 부족으로 인한 오류(NE2)와 관련 없는 자료의 오용(CU2), 그리고 기술적인 계산상의 오류(DT1)가 주를 이루고 있다. [그림 1, 6]은 주어진 문제를 정확히 확인하지 않아 자의적으로 정보를 보태거나 그래프를 잘못 해석하여 일으키는 오류이다. 학생들은 문제해결 과정에서 문제를 정확하게 읽지 않고 주어진 식을 대충 한번 읽어보고 시작하는 경향이 강하다. 이런 학생들에게 주어진 문제가 무엇인지 말로 설명하라고 하면 아무 말도 못하는 경우를 흔히 접할 수 있다. 따라서 문제 풀이에서 정확한 문제 인식과 주어진 자료의 이용에서 엄밀함을 강조할 필요가 있다. [그림 2, 3]은 논리적으로 부적절한 비약이나 필수적인 사실 개념이 부족하여 일으키는 오류이다. 수학Ⅱ의 미적분 단원은 중등학교에서의 수학교과의 종합적인 영역임을 감안할 때, 미분 학습을 하기 위해 필요한 선수학습의 중요성은 새삼 강조할 필요가 없다. 또한 미분의 개념을 이용하는 문제에서도 엄밀한 정의를 사용하기 보다는 대부분 직관적으로 답을 제시하는 오류를 일으키고 있다. 이것은 미분 지도에서 기초적이거나 필수적인 개념의 지도에는 정의의 지도가 매우 강조되어야 함을 알 수 있다. [그림 5]는 요구하지 않은 답을 제시하는

오류이다. 문제해결 과정에서 학생들은 주어진 문제에 답이 정해진 수의 형태로 존재한다라는 전제하에 문제에 대한 검토는 하지 않고 알고리즘적 문제풀이에 익숙해져 있다. 하지만 문제에 대한 검증이 우선되어야 하며, 문제풀이의 시작은 문제의 확인에서부터 문제풀이의 시작이 이루어져야 할 것이다. 따라서 학생지도에서는 문제이해가 우선적이고 가장 중요함을 강조할 필요가 있다.

이러한 유형별 오류 분석 결과를 바탕으로 교수·학습 지도 방법 측면에서 지도 방안에 대한 내용을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 학생들의 오류는 개념상의 부족으로 인한 오류(NE2), 관련 없는 자료의 오용(CU2)과 기술적인 계산상의 오류(DT1)가 주를 이루었음을 알 수 있다. 따라서 교사는 미분 단원의 도입 단계에서 기초적이고 기본적인 개념학습 지도에 중점을 두어야 하며 오개념으로 인한 잘못된 스키마가 형성되지 않도록 해야 할 필요가 있다.

둘째, 미분에 대한 개념은 충분히 정립되었다 하더라도 대수적 계산상의 오류 및 알고리즘적인 오류도 보여주고 있어 결과적 답안을 요구하는 수학문제의 특성상 세부적 학습지도도 병행해야 함을 보여준다.

셋째, 교사는 학습지도 시 학생이 보일 수 있는 반응을 미리 예상하고 이에 대비하여 수업을 준비해야 함은 당연하다. 그러나 연구자가 예상한 오류와 유사하다거나 전혀 다른 반응을 나타내기도 한 경우도 있었다는 점에서 이를 토대로 학습지도의 참고 자료가 될 수 있다고 본다.

넷째, 연구결과를 살펴보면 학생들의 오류는 기초적 개념 부족에서부터 논리적 추론에 이르기까지 전반적으로 나타나고 있다. 이는 교실에서 교사가 언제나 학생의 시각과 입장에서 수학적 개념을 이해하고, 문제를 해결하려는 노력이 필요함을 알 수 있다.

본 연구에서 나타난 학생들의 미분 문제풀이 과정에서의 오류 유형을 통해 교사가 미리 수업 전에 준비하여 충분히 대비한다면 학생들이 일으키는 오류를 많이 줄일 수 있으며, 또한 오류를 일으키는 학생의 교정 작업에도 많은 도움이 될 것이다. 또한 아무런 준비나 계획 없이 미분 수업의 교재 연구 및 심화 학습자료 개발에 본 연구는 많은 시사점을 제공해 줄 수 있을 것이다. 위와 같은 학생의 미분 문제해결에서 보이는 오류 유형 분석 자료는 좀 더 나은 미분 학습지도를 위한 방안을 제공할 것이란 점에서 그 의의를 찾고자 하며 그에 대한 좀 더 구체적인 후속연구를 기대해 본다.

참고문헌

교육과학기술부 (2008). 교육인적자원부 고시 제2006-75호 및 제2007-79호 초등학교 교육과정 해설.

김부윤 · 김윤영 (2000). 고등학교 수학에서의 미분 단원의 내용 구성에 관한 고찰, 수학교육논문집 제10집, 한국수학교육학회 pp. 221-236.

김상우 (2001). 고등학교 2학년을 대상으로 한 극한에 대한 오개념 및 오류에 관한 오류, 경상대학교 교육대학원 석사학위논문.

김용호 (2001). 일차부등식의 문제해결과정에서 발생하는 오류유형 분석-중학교 교육과정을 중심으로, 공주대학교 대학원 석사학위논문.

김정희 · 조완영 (2004). 고등학교 학생들의 미분 문제풀이 과정에서 나타나는 오류, 수학

교육학논총, 제26집, 대한수학교육학회 pp. 489-508.
김종명・김상래 (2006). 수열의 극한과 무한급수의 문제해결에서 발생하는 오류유형 분석, 교육과학논문집 제12집 1권, pp. 17-35, 관동대학교 출판부.
노은정 (2002). 수학학습에서 오류의 활용 효과-정의 지도를 중심으로, 이화여자대학교 대학원, 석사학위논문.
박두일 외 8인 (2007). 고등학교 수학Ⅱ, 교학사.
조태근 외 4인 (2007). 고등학교 수학Ⅱ, 금성출판사.
조태근 외 4인 (2002). 고등학교 수학Ⅱ 교사용 지도서, 금성출판사.
안성훈・김은옥・고대돈 (2004). 초등학생의 ICT 활용 오류처치 방안 연구, 컴퓨터교육학회논문지 제7권 제2호, pp. 35-46, 한국컴퓨터교육학회.
이강섭 외 6인 (2007). 고등학교 수학Ⅱ. 지학사.
이대현・박배훈 (2001). 수학교육에서 직관과 그 오류에 관한 고찰, 수학교육94, pp.15-25, 한국수학교육학회.
임재훈 외 9인 (2007). 고등학교 수학Ⅱ, 두산.
오카베 츠네하루, 김병학 역 (2002). 그림으로 이해하는 미분과 적분, 경문사.
우정호 외 5인 (2007). 고등학교 수학Ⅱ, 대한교과서.
정종규 (2001). 수학문제 해결에 있어서의 오류 분류 및 그 지도방안에 대한 연구-고등학교 1학년 지수・로그함수 단원을 중심으로, 경상대학교 교육대학원 석사학위논문.
황해익・고은미 (2006). 유아의 수학학습 잠재력 측정과정에서 나타난 오류 및 전략 유형 분석, 열린유아교육연구 제11권 제4호, pp.265-285, 열린유아교육학회.
Maurer, S. H. (1987). New Knowledge about Errors and New Views about Leareners : What they Msucators and More Educators Would Like to Know(pp.165-188). In Schoenfeld, A. H. (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education, London : Lawrence erlbaum associates, publishers hillsdale, Newjerse.
Movshovitz-Hadar, N. & Zaslavsky, O. (1987). Error Analysis in Mathematics Education, Journal of Research in Mathematics Education 10, pp. 163-172.
Movshovitz-Hadar, Orit-Zaslavsky, & Shlomo (1987). An Analysis of children's written Solution to Word Problems, Journal of Research in Mathematics Education 10, pp. 163-172.

전영배 · 노은환 · 최정숙 · 김대의 · 정의창 · 정찬식 · 김창수

Analysis of Error Types in the Differential Problem Solving Progress

Jun, Young Bae[12] · Roh, Eun Hwan[13] · Choi, Jung Sook[14] · Kim, Dae Eui[15]
Jeong, Eui Chang[16] · Jung, Chan Sik[17] · Kim, Chang Su[18]

Abstract

Calculus is used in various parts of human life and the basis of social science such as economics and public administration. Yet that is still considered important in the field of science and technology only, and there have been a lot of disputes on that phenomenon. Fortunately, calculus is going to be taught as part of the academic high school second-year mathematics curriculum in and after 2010. Students who face calculus for the first time should be helped not to lose interest in differentiation learning, not to be apprehensive of it nor to avoid it. The purpose of this study was to examine the types of errors made by students in the course of solving differentiation problems in an effort to lay the foundation for differentiation education. A pilot test was conducted after generalized differentiation problems to which students were usually exposed were selected, and experts were asked to review the pilot test. And then a finalized test was implemented to make an error analysis according to an error type analysis framework to serve the purpose.

Key Words : Error analysis, The types of error, Error type analysis framework, Differentiation problem solving

12) Gyeongsang National University (skywine@gmail.com)
13) Chinju National University of Education (ehroh@cue.ac.kr)
14) Samcheonpo Girls' High School (mtjss@hanmail.net)
15) Gyeongsang National University High School (goodidea01@hanmail.net)
16) Saryang Middle School (widejec@hanmail.net)
17) Namgang Elementary School (jcs1988@dreamwiz.com)
18) Gyeongsang National University Middle School (rnswk@chol.com)