한국학교수학회논문집 제 12 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 12, Number 4, 365-388, December 2009

한 변의 중점과 다른 두 점이 주어진 삼각형 작도문제의 해결에 대한 연구

한인기[1] · 이정순[2]

본 연구에서는 세 점이 조건으로 주어진 삼각형의 작도문제들 중에서 해결과정이 삼각형의 외접원 작도와 관련되는 문제들을 해결하고, 이들 작도문제 해결과정을 분석하여, 작도문제들 사이의 연결성을 밝혀 작도문제들을 체계화시켰다. 특히 Davydov의 이론적 지식에서 구체화의 개념을 바탕으로, 작도문제들이 일관된 체계를 형성해가는 과정을 상세하게 기술하였다. 이를 통해 이론적 지식의 구체화의 과정, 작도문제 해결의 교수학적 활용, 교수학적 의의에 대한 폭넓은 논의를 위한 기초자료를 제공할 수 있을 것이며, 학생들의 창의적 수학탐구 활동의 소재로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

주요용어 : 작도문제, 삼각형, 외접원, 이론적 사고, Davydov

I. 서 론

러시아의 유명한 수학자인 Fihtengolts(1939, p. 2)는 독일의 수학자 August Adler가 쓴 기하학적 작도의 이론을 러시아어로 번역하면서 '작도문제는 논리적인 사고와 연합적인 사고의 계발을 위한 뛰어난 도구'라고 주장하면서, 러시아의 중등학교 기하교육에 작도문제를 체계적이고 광범위하게 활용할 것을 주장하였다. 지금도 러시아의 기하교육에서 작도문제는 중요한 역할을 하고 있으며, Kiselev & Pybkin(1995)의 7-9학년 기하교과서를 보면, 각 단원마다 작도문제를 연습문제로 제공하고 있다.

작도문제의 해결을 위한 탐구는 기하학 발달의 역사를 풍부하게 만든 중요한 원천이었다. 예를 들어 3대 작도 불능문제를 통해 많은 수학적 개념들, 방법들이 고안되었으며, 가우스는 정17각형의 작도문제를 해결하면서 수학자로의 진로를 결정하였다.

한편 작도문제는 중등학교 기하교육의 발전을 위한 많은 교수학적 시사점과 개선 방안을 연구할 좋은 기회를 제공할 수 있다. 비록 국내의 연구에서는 기하교육의 다른 주제들에 비해 작도문제에 관련된 교수학적 논의가 다양하게 이루어지지는 않았지만, 최근 몇몇 연구자들에 의한 작도문제에 관련된 연구는 기하교육의 발전을 위한 의미로운 방향전환이라 할 수

1) 경상대학교 (inkiski@gsnu.ac.kr)
2) 금남중학교 (blwjdtns333@naver.com)

있다.

정창현(1992), 한인기(1999)는 작도문제의 의의 및 해결단계에 대한 분석을 제시하였으며, 장혜원(1997), 박명희・신경희(2006), 조완영・정보나(2002), 공선혜・한인기(2008)는 다양한 작도문제의 탐구, 중등학교 기하교육과 관련된 교수학적 논의를 제공하였다.

이들 연구를 통해, 수학탐구에서 작도문제의 특징 및 교수학적 가능성이 규명되고 있으며, 작도문제의 교수학적 활용에 대한 논의가 활발하게 이루어졌다. 그런데 이들 국내 연구에서는 선분들이 주어진 경우의 작도문제의 해결을 다루고 있을 뿐, 점들이 주어진 경우의 작도문제 해결에 대해서는 연구되지 못했다. 본 연구에서는 세 점이 조건으로 주어진 삼각형의 작도문제를 해결할 것이다.

한편 본 연구에서는 Davydov의 경험적 사고와 이론적 사고에 대한 문헌들을 분석하여, 이론적 사고의 중요한 개념인 '구체화'의 의미를 고찰하고, 한 변의 중점과 두 점이 주어진 삼각형의 작도문제들을 구체화시키는 과정, 즉 이들 작도문제를 하나의 일관된 체계를 구성하는 과정을 상세하게 기술할 것이다. 이를 통해 이론적 사고 활동의 구성, 세 점이 조건으로 주어진 삼각형의 작도문제를 해결하기 위한 방법, 이들 문제의 교수학적 가치에 대한 몇몇 논의를 제공할 것이다.

II. 경험적 사고와 이론적 사고

독일의 철학자 Kant와 Hegel은 사고를 오성(悟性, Verstand)과 이성(理性, Vernunft)로 구분하였는데, 철학대사전(김익달, 1970, p. 794)에 의하면 '칸트는 오성을 범주의 능력으로 보고 이성은 이념의 능력이라고 하는 새로운 구별을 하였다. 헤겔은 오성에는 추상적 개념의 능력을, 이성에는 구체적 개념의 능력을 서로 줌으로써 양자를 구별하였다'고 기술되어 있다. 즉 Kant와 Hegel에게 있어 오성은 범주화, 추상화에, 이성은 이념, 구체화와 관련된다는 것을 알 수 있다.

이러한 이분법적인 접근을 발전시킨 최근의 학자로는 Davydov를 들 수 있다. Davydov는 사고를 경험적 사고와 이론적 사고로 나누었다. Davydov(1996, p.62)에 의하면, '직관적인 형상에 근거하는 오성적 사고는 경험적 사고라고 부를 수 있다. 한편 자신의 고유한 기저의 탐구, 개념들의 탐구에 관련되는 이성적 사고는 이론적 사고라 할 수 있다'고 하였다. 즉 경험적 사고는 오성에 바탕으로 둔 사고 유형이며, 이론적 사고는 이성에 바탕을 둔 사고 유형이라 할 수 있다.

경험적 사고와 관련하여, Davydov(2004, p. 275)는 '경험적 사고는 연구하는 대상들의 직접적이고 감각적인 징표들을 바탕으로 한다. 경험적 사고를 통해 사람은 (1) 공통인 징표들을 추출하며 사물들을 분류하기 위해, 구체적이고 감각적인 주어진 것들을 비교하며, (2) 대상들을 어떤 분류에 포함시키기 위해, 구체적이며 감각적인 대상들을 인식한다'고 하였다. 즉 경험적 사고를 통해 추상적인 불변성, 공통성을 인식하여 대상들을 분류하게 된다는 것을 알 수 있다. 유치원이나 초등학교 저학년의 수학교육에서 대상들의 징표를 추출하고 사물들을 분류하는 활동은 경험적 사고와 관련시킬 수 있을 것이다. 그러나 공통인 것이 항상 본질이 되는 것은 아니다. 대상들의 본질을 밝히는 것은 이론적 사고에 관련된다.

Davydov는 경험적 사고의 이러한 한계를 넘어선 대상의 본질 규명은 이론적 사고에 관

련된다고 주장한다. Davydov(2000, p. 306)에 의하면, ‘이론적 사고의 내용은 매개화된, 반성적인, 본질적인 존재이다. 이러한 사고는 활동의 본질적인 측면의 이상화이며, 사물들의 공통된 형식, 측도, 규칙성들의 재현’이라고 하였다. 즉 이론적 사고는 직접적인 대상, 이들 대상에 대한 표상을 내용으로 하지 않으며, 본질적이며 반성적 존재인 개념을 대상으로 하며, 사물들의 일반화된 형식을, 사물의 매개화된 척도를, 사물들의 내적 규칙성을 재구성하게 된다.

중등학교 수학적 활동은 수학적 대상들의 본질, 이들 사이의 내적인 관련성의 탐구 및 재구성에 밀접하게 관련된다. 즉 중등학교의 수학적 활동은 이론적 사고에 더 큰 가중치를 가지게 된다. 결국 수학교육에 관련된 이론적 사고의 본질을 밝히는 것은 수학교육학의 중요한 연구 과제가 될 것이다.

Davydov(1996, p. 65)는 ‘이론적 사고는 경험적 사고의 내용과는 다른 자신만의 고유한 내용을 가지는데, 이것은 일관된 체계를 형성하는 객관적으로 상호 관련된 현상들의 영역이다. 이 객관화된 체계는 단편적인 사물들의 연결들을 통해 존재하며, 변증법에서는 이것을 구체라고 부른다’고 하면서, 이론적 사고에서 일관된 체계의 구성, 이 체계에서 객체들의 내적 관계 탐구가 중요한 사고 활동임을 강조하였다. 이때 한 가지 주목할 것은 ‘구체’, ‘구체화’의 의미이다. Davydov(1996, p. 73)에 의하면, ‘경험적 지식에서 구체화는 대상들의 상응하는 범주에 속하는 예들을 선별하는 것이지만, 이론적 지식에서의 구체화는 공통된 바탕으로부터 특정한 일관된 체계의 발현을 추출하고 해석하는 것’이라고 하였다. 즉 구체화는 일반적인 공통인 바탕으로부터 개별적인 특수한 체계를 구성하는 것이며, Euclid가 일반적 원리인 공리, 공준으로부터 특수한 기하학의 체계를 구성한 것은 이론적 지식의 구체화의 한 예라 할 수 있다.

한편 Davydov(1996, p. 65)에 의하면, 이론적 사고에서 ‘문제는 구체성을 발생과 매개화의 과정에서 형성되고 있는 것으로 묘사하는 것이다. 왜냐 하면 이러한 과정은 체계의 발현의 모든 다양성으로 귀착될 수 있기 때문이다’라고 하였다. 즉 이론적 사고에 관련하여, 중요한 연구 문제들 중의 하나는 구체화의 과정을, 즉 하나의 일관된 체계를 구성하는 과정을 상세하게 기술하는 것임을 알 수 있다.

본 연구에서는 한 변의 중점과 다른 두 점이 주어진 삼각형의 작도문제들로부터 일관된 체계를 형성하는데 바탕이 되는 바탕문제를 추출하고, 이 바탕문제를 중심으로 이들 작도문제의 구체화를 시도할 것이다.

III. 세 점이 주어진 삼각형 작도문제 해결을 위한 바탕문제

세 점이 주어진 삼각형의 작도문제에 대한 체계적인 문제 제기와 몇몇 문제의 해결을 Wernick(1982), Meyers(1996)에서 볼 수 있다. Wernick, Meyers는 삼각형의 꼭짓점 A, B, C, 외심 O, 내심 I, 수심 H, 무게중심 G, 변들의 중점 M_a, M_b, M_c, 수선의 발 H_a, H_b, H_c, 각의 이등분선과 변들의 교점 T_a, T_b, T_c를 조합하여 세 점을 만들고, 이들 세 점으로 삼각형을 작도하는 작도문제의 목록을 제시하였다. Wernick, Meyers는 이들 작도문제 중 일부는 해결가능, 해결불가능하다는 주장을 제시하였지만, 이에 관련하여 상세한 풀이나 이들 작도문제의 체계적 해결을 위한 방법은 제시하지 않았다.

본 연구에서는 Wernick, Meyers가 제시한 점들 이외에도 삼각형의 각의 이등분선과 외접원의 교점 W_a, W_b, W_c을 첨가시켜, 점들의 다양한 조합에 의한 삼각형 작도문제를 설정하여 조사하였다. 특히 삼각형의 각의 이등분선과 외접원의 교점인 W_a, W_b, W_c을 조건으로 포함하는 작도문제의 설정 및 해결은 본 연구에서 처음으로 시도되었다는 측면에서 큰 의미를 둘 수 있다.

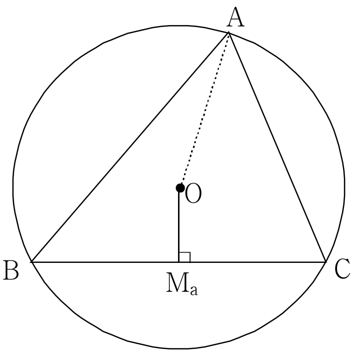
Wernick, Meyers가 제시한 작도문제의 목록과 W_a, W_b, W_c를 첨가시켜 얻어지는 작도문제의 개수가 매우 방대하므로, 본 연구에서는 이들 문제 중에서 해결과정이 삼각형의 외접원 작도와 관련되는 문제들을 해결하였다.

본 연구에서는 이들 작도문제의 해결과정을 분석하여, 문제해결의 기본이 되는 방법들, 관계들을 중심으로 바탕문제를 추출하였다. 바탕문제는 이론적 지식의 구체화를 위한, 즉 삼각형의 작도문제들의 일관된 체계를 형성하는 바탕이 되는 문제로, 다른 문제들의 해결을 위한 기본적인 관계, 기본적인 방법을 포함하고 있는 문제이다.

바탕문제. M_a, A, O[3)]

분석. M_a, A, O가 주어진 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 1). 점 O가 삼각형 ABC의 외심이므로, 중심이 O이고 반지름이 OA인 원을 작도하면 외접원을 얻을 수 있다. 이때 꼭짓점 B, C는 외접원에 속하게 된다.

한편 M_a는 변 BC의 중점이므로 선분 OM_a는 변 BC의 수직이등분선에 속한다. 결국 점 M_a를 지나 OM_a에 직교하는 직선을 그어 외접원과의 교점을 구하면, 구하는 꼭짓점 B, C를 얻을 수 있다.



[그림 1]

작도.

① 중심이 O이고 반지름이 OA인 원을 작도한다.

② 선분 OM_a를 작도한다.

---

3) '세 점 M_a, A, B가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라'를 의미함.

③ M_a를 지나 OM_a에 직교하는 직선을 작도한다.
④ ①의 원과 ③의 직선의 교점을 B, C라 한다.
⑤ 세 점 A, B, C를 연결하여 삼각형 ABC를 작도한다.

바탕문제로부터 첫째, 세 점 M_a, A, O가 주어진 경우 삼각형을 작도할 수 있으며, 둘째 외접원을 작도하면, 외심과 변의 중점을 연결하는 직선에 직교하는 직선과 외접원의 교점이 구하는 삼각형의 두 꼭짓점이 된다는 것을 알 수 있다.

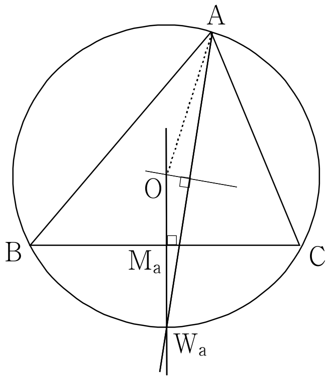
IV. 세 점이 주어진 삼각형 작도문제의 해결 방법

한 변의 중점과 다른 두 점이 주어진 삼각형의 작도문제 해결을 위한 바탕문제를 추출하였다. 바탕문제에서는 외심과 한 꼭짓점이 주어진 경우에 외접원을 작도하여 문제를 해결하였다. 이것 이외에도 외접원을 작도하는 방법은 외심과 W_a, W_b, W_c가 주어지는 경우, 대수적인 방법으로 외심 또는 외접원의 반지름을 구하는 경우로 나누어 생각할 수 있다.
본 연구에서는 한 변의 중점과 다른 두 점이 주어진 다양한 삼각형 작도문제들 중에서 해결과정이 외접원과 관련되는 문제를 (1) 외심과 꼭짓점을 이용하여 외접원을 작도하는 문제들, (2) 외심과 W_a, W_b, W_c를 이용하여 외접원을 작도하는 문제들, (3) 대수적인 방법으로 외접원을 작도하는 문제들로 나누어, 그 해결과정을 분석하고 문제들을 체계화하였다.

1. 외심과 꼭짓점을 이용하여 외접원을 작도하는 문제들

삼각형에서 외심 O와 한 꼭짓점이 주어지면, 중심이 O이고 반지름이 외심과 꼭짓점사이의 거리인 외접원을 작도할 수 있다. 이미 바탕문제에서 세 점 M_a, A, O가 주어진 경우에 외접원을 이용하여 문제를 해결하였다.
살펴볼 첫 번째 분류에 속하는 문제들은 점 M_a, A, O에서 O가 주어지지 않으며, 문제의 주어진 조건으로부터 점 O의 위치를 결정하여 바탕문제로 귀착시켜 작도를 수행하는 문제로부터 시작한다.

문제 1-1. M_a, A, W_a
분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자. 삼각형 ABC의 외심 O를 찾을 수 있으면, 바탕문제 3에 의해 문제가 해결된다. 외심 O를 구했다고 가정하자(그림 2). 삼각형 OW_aA는 이등변삼각형이므로, O는 선분 AW_a의 수직이등분선에 속한다. 그리고 W_a가 호 BC의 중점이고 M_a는 현 BC의 중점이므로, O는 직선 M_aW_a에 속한다. 이로부터 선분 AW_a의 수직이등분선과 직선 M_aW_a이 점 O가 된다는 것을 알 수 있다.



[그림 2]

작도.

① 선분 AW_a를 작도한다.

② 선분 AW_a의 수직이등분선을 작도한다.

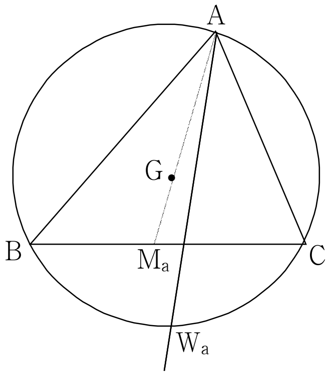
③ 직선 M_aW_a를 작도한다.

④ ②와 ③에서 얻어진 직선의 교점을 O라 한다.

⑤ M_a, A, O가 주어졌으므로 바탕문제를 이용해 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 1-2. M_a, G, W_a

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 찾을 수 있으면, 문제 1-1에 의해 문제가 해결된다. 꼭짓점 A를 구했다고 가정하자(그림 3). 무게중심 G는 중선 AM_a를 2:1로 나누므로, M_aG의 연장선에 $GA = 2M_aG$인 점 A를 잡을 수 있다. 이제 문제 1-1을 이용하면, 구하는 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.



[그림 3]

작도.

① 직선 M_aG를 작도한다.

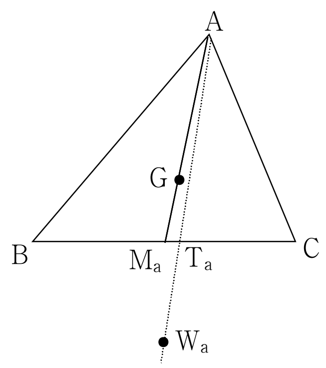
② 직선 M_aG에 $GA=2M_aG$인 점 A를 표시한다.

③ M_a, A, W_a가 주어졌으므로, 문제 1-1을 이용해 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 1-2에서는 삼각형의 한 꼭짓점 대신에 무게중심이 조건으로 주어지며, 삼각형의 무게중심의 성질인 '무게중심은 중선을 꼭짓점으로부터 2:1로 나눈다'는 것을 이용하여 꼭짓점의 위치를 결정하여 문제를 해결하였다.

문제 1-3. M_a, G, T_a

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자. 삼각형 ABC의 외접원과 각 A의 이등분선의 교점 W_a를 찾을 수 있으면, 문제 1-2에 의해 문제가 해결된다. 점 W_a의 위치를 구했다고 가정하자(그림 4). W_a는 직선 AT_a와 점 M_a를 지나 M_aT_a에 직교하는 직선의 교점이다. $M_aG : GA = 1:2$이므로, 직선 M_aG에 점 A를 잡을 수 있고, 이로부터 직선 AT_a가 얻어진다. 한편 직선 M_aT_a를 작도하여 점 M_a를 지나는 수선을 작도할 수 있으므로, 문제가 해결된다.



[그림 4]

작도.

① 직선 M_aG를 작도한다.

② 직선 M_aG에 $GA=2M_aG$인 점 A를 표시한다.

③ 직선 AT_a를 작도한다.

④ 직선 M_aT_a를 작도한다.

⑤ 점 M_a를 지나며 직선 M_aT_a에 직교하는 직선을 작도한다.

⑥ ③과 ⑤에서 얻어진 직선들의 교점을 W_a라 한다.

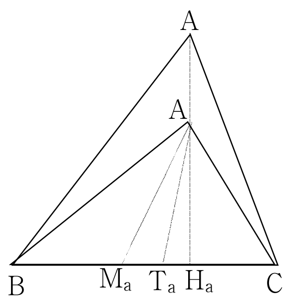
⑦ M_a, G, W_a가 주어졌으므로, 문제 1-2를 이용해 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 1-3에서는 M_a, G, T_a인 경우의 작도문제 해결을 살펴보았다. 문제해결을 위해 외접원을 작도하려면, 외접원에 속하는 점 W_a가 주어져야 하는데 문제에서는 W_a 대신에 T_a가 주어졌다. 이 문제에서는 직선 AT_a와 점 M_a를 지나 직선 M_aT_a에 직교하는 직선의 교점으로 점 W_a를 결정하여, 문제를 해결하였다.

한편, 문제 1-3의 해결과정에서 세 점 M_a, A, T_a가 주어져도 삼각형 ABC를 작도할 수 있음을 알 수 있다.

문제 1-4. M_a, T_a, H_a

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 구할 수 있으면, 문제 1-3과 같은 방법으로 문제가 해결된다. 가령 꼭짓점 A가 작도되었다고 가정하자(그림 5). 꼭짓점 A는 점 H_a를 지나며 직선 M_aT_a에 직교하는 직선에 속한다. 이때 A의 위치는 유일하게 정의되지 않으며, H_a를 지나며 직선 M_aT_a에 직교하는 직선에 속하는 임의의 점을 잡아도, 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.



[그림 5]

작도.

① 직선 M_aT_a를 작도한다.

② 점 H_a를 지나며 직선 M_aT_a에 직교하는 직선을 작도한다.

③ ②에서 얻어진 직선에서 점 A를 잡는다.

④ M_a, A, T_a가 얻어졌으므로, 문제 1-3과 같이 삼각형 ABC를 작도한다.

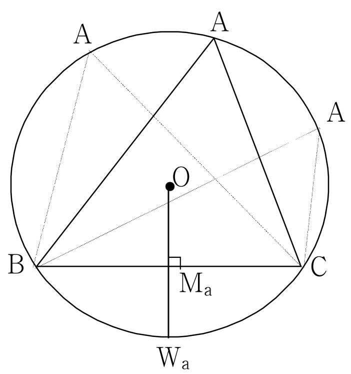
문제 1-4의 해결과정에서 점 H_a를 지나 직선 M_aT_a에 직교하는 직선의 어느 점을 A로 잡아도 M_a, T_a, H_a는 점 A의 위치에 종속되지 않으므로, 문제 1-4는 무수히 많은 삼각형 ABC를 해로 가지게 된다.

2. 외심과 W_a, W_b, W_c를 이용하여 외접원을 작도하는 문제들

외심이 주어진 경우에 외접원에 속하는 한 점을 알면 반지름을 구하여 외접원을 작도할 수 있다. 살펴볼 두 번째 분류에 속하는 문제들은 외심과 외접원에 속하는 점 W_a, W_b, W_c 중의 하나가 주어진 경우 외접원을 이용하여 삼각형을 작도하는 문제로 시작한다. 두 번째 분류의 문제들과 바탕문제의 관련성은 외접원을 작도하고 나서, 외심과 변의 중점을 연결하는 직선에 직교하는 직선과 외접원의 교점을 이용하여 꼭짓점들을 구하게 된다는 것이다.

문제 2-1. M_a, O, W_a

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 6). 점 O, W_a가 주어졌으므로 삼각형 ABC에 대한 외접원을 작도할 수 있으며, 바탕문제에서와 같이 점 M_a를 지나 선분 OM_a에 직교하는 직선을 작도하면 꼭짓점 B, C를 얻을 수 있다. 한편 꼭짓점 A는 점 W_a를 포함하지 않는 호 BC에 속하는 임의의 점을 잡아도 문제의 조건을 만족하게 된다.



[그림 6]

작도.

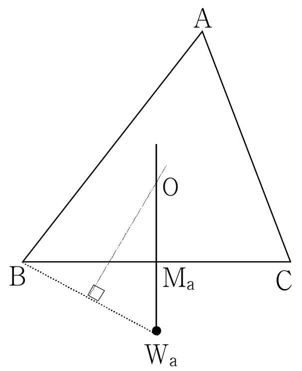
① 점 O를 중심으로 하며 선분 OW_a를 반지름으로 하는 원을 작도한다.
② 점 M_a를 지나 OW_a에 직교하는 직선을 작도한다.
③ ①의 원과 ②의 직선의 교점을 B, C라 한다.
④ 점 W_a를 포함하지 않는 호 BC에 속하는 점을 잡아 A라 한다.
⑤ 점 A, B, C를 연결하여 삼각형 ABC를 작도한다.

세 점 M_a, O, W_a가 주어진 경우에는 점 W_a를 포함하지 않는 호 BC에 어떤 점을 A로 잡아도 문제가 해결되므로, 이 문제는 무수히 많은 삼각형 ABC를 해로 가진다.

문제 2-2. M_a, B, W_a

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 7). 점 M_a, W_a가 주어졌으므로, 외심 O를 구한다면 문제 2-1과 같이 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

외심 O는 직선 M_aW_a에 속한다. 그리고 현 BW_a의 수직이등분선은 외심 O를 지난다. 즉 직선 M_aW_a와 현 BW_a의 수직이등분선의 교점이 외심 O가 되며, 이로부터 문제가 해결된다.



[그림 7]

작도.

① 직선 M_aW_a를 작도한다.

② 선분 BW_a를 작도한다.

③ 선분 BW_a의 수직이등분선을 작도한다.

④ ①의 직선과 ③의 직선의 교점을 O라 한다.

⑤ M_a, W_a, O가 주어졌으므로, 문제 2-1과 같이 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 2-2에서는 M_a, B, W_a가 주어진 경우에 삼각형 ABC를 작도하는 문제로, 외심 O가 주어지지 않았다. 이 문제에서는 외심 O를 결정하기 위해, 직선 M_aW_a와 현 BW_a의 수직이등분선의 교점이 외심이 된다는 것을 이용하였다.

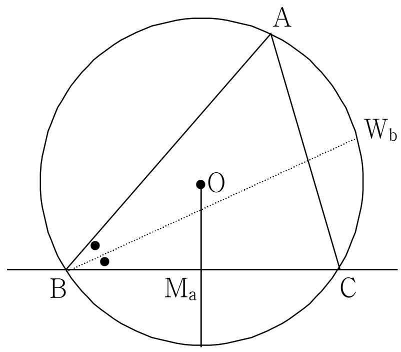
한편, 문제 2-1과 같이 점 W_a를 포함하지 않는 호 BC에 점 A를 임의로 잡을 수 있으므로, 무수히 많은 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

문제 2-3. M_a, O, W_b

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 8). 점 O, W_b가 주어졌으므로, 문제 2-1과 같이 삼각형 ABC의 외접원을 작도하고, 점 M_a를 지나 OM_a에 직교하는 직선을 작도하여 꼭짓점 B, C를 얻을 수 있다.

이제 꼭짓점 A에 대해 살펴보자. BW_b가 각의 이등분선이므로, 호 CW_b와 AW_b는 같다.

이로부터 꼭짓점 A를 구할 수 있다.



[그림 8]

작도.

① 점 O를 중심으로 하며 선분 OW_b를 반지름으로 하는 원을 작도한다.

② 점 M_a를 지나 OM_a에 직교하는 직선을 작도한다.

③ ①의 원과 ②의 직선의 교점을 B, C라 한다.

④ 호 CW_b와 같은 호 W_bA를 작도한다.

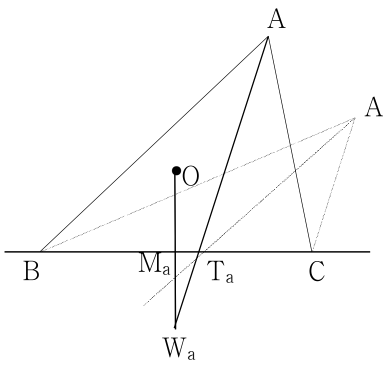
⑤ 점 A, B, C를 연결하여 삼각형 ABC를 작도한다.

세 점 M_a, O, W_b가 주어진 경우의 삼각형 ABC 작도문제 해결과정을 보면, 점 W_b 대신에 W_c가 주어져도 같은 방법으로 해결할 수 있음을 알 수 있다. 즉 세 점 M_a, O, W_c가 주어진 삼각형의 작도를 문제 2-3과 유사한 방법으로 해결할 수 있다.

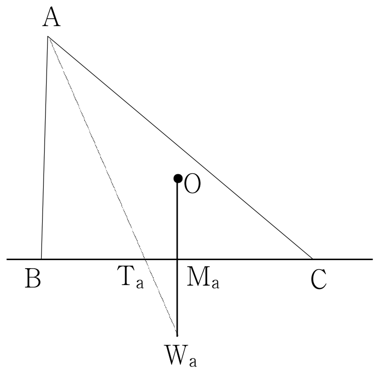
문제 2-4. M_a, O, T_a

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 9). 두 점 M_a, O가 주어졌으므로, W_a, W_b, W_c 중의 하나를 구하면 앞의 문제들을 이용하여 해결할 수 있다.

T_a가 주어졌으므로, W_a를 구한다고 하자. W_a는 직선 AT_a와 OM_a의 교점이다. 그림 9와 같이, 점 T_a를 고정시켜 놓고, 점 A를 다양하게 잡을 수 있다. 즉 이 문제는 무수히 많은 해를 가진다.



[그림 9]



[그림 10]

작도.

① 직선 OM_a를 작도한다.

② 직선 M_aT_a를 작도한다.

③ 직선 M_aT_a에 대해 점 O와 같은 쪽에 점 A를 잡는다.

④ 직선 AT_a를 작도한다.

⑤ ①과 ④에서 얻어진 직선들의 교점을 W_a라 한다.

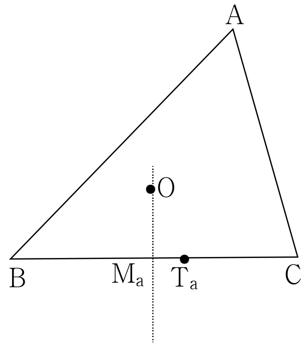
⑥ M_a, O, W_a가 얻어졌으므로, 문제 2-1과 같이 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 2-4에서는 점 M_a, T_a가 B-M_a-T_a-C와 같은 순서로 놓여있을 때의 경우를 살펴보았다. 점 M_a, T_a가 B-T_a-M_a-C와 같은 순서로 놓여있으면, 그림 10과 같이 점 A의 위치를 구할 수 있다.

문제 2-5. M_a, T_a, B

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 11). 두 점 M_a, T_a가 주어졌으므로, 외심 O를 구하면 문제 2-4와 같은 방법으로 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

꼭짓점 B, C는 직선 M_aT_a에 속한다. 꼭짓점 B가 주어졌으므로, $M_aB = M_aC$인 점을 잡으면 꼭짓점 C가 결정된다. 외심 O는 변 BC의 수직이등분선에 속하므로, 점 M_a를 지나며 BC에 수직인 직선을 긋는다. 이제 수직이등분선에서 임의로 외심 O를 잡으면, 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.



[그림 11]

작도.

① 직선 M_aT_a를 작도한다.

② 점 M_a를 지나 직선 M_aT_a에 수직인 직선을 작도한다.

③ ②의 직선에 임의로 외심 O를 잡는다.

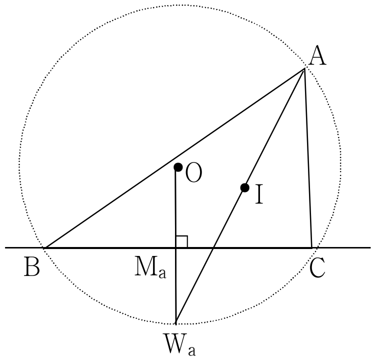
④ M_a, T_a, O가 주어졌으므로, 문제 2-4와 같이 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 2-5의 해결과정을 분석하면, 점 M_a를 지나며 BC에 수직인 직선에 임의로 외심 O를 선택하여도 세 점 M_a, T_a, B의 위치는 불변이므로, 무수히 많은 외심 O의 위치를 얻을 수 있고, 이 문제는 무수히 많은 해를 가지게 된다.

문제 2-6. M_a, O, I

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자. 두 점 M_a, O가 주어졌으므로, 앞에서 살펴본 바와 같이 외접원의 반지름을 구할 수 있으면, 그림 12와 같이 문제가 해결될 수 있다.

삼각형에서 내접원, 외접원의 반지름을 r, R, 내심과 외심사이의 거리를 d라 하면, $d^2 = R^2 - 2Rr$이고, $R = r + \sqrt{r^2 + d^2}$이다. 문제에서 O, I가 주어졌으므로, d를 구할 수 있다. 그리고 점 M_a를 지나 OM_a에 수직인 직선과 I의 거리가 r이다. 이로부터 외접원의 반지름 $R = r + \sqrt{r^2 + d^2}$을 작도할 수 있다. 이제 앞의 문제에서와 같은 방법으로 문제를 해결할 수 있다.



[그림 12]

작도.

① 직선 OM_a를 작도한다.

② 점 M_a를 지나 OM_a에 수직인 직선을 작도한다.

③ 점 I로부터 ②의 직선에서 수선을 그어, 내접원의 반지름 r을 구한다.

④ 두 점 O, I사이의 거리 d를 구한다.

⑤ $R=r+\sqrt{r^2+d^2}$ 인 선분을 작도한다.

⑥ 중심이 O이고 반지름이 R인 원을 작도한다.

⑦ ①의 직선과 ⑥의 원의 교점을 W_a라 한다.

⑧ 직선 W_aI와 ⑥의 외접원의 교점을 A라 한다.

⑨ 세 점 A, B, C를 연결하여, 삼각형 ABC를 작도한다.

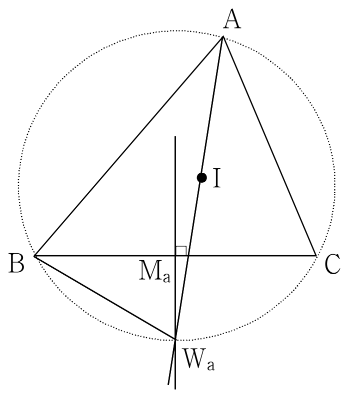
다른 문제들에서는 외접원의 반지름을 결정하기 위해, 외심과 외접원에 속하는 다른 한 점을 구했는데, 문제 2-6에서는 대수적인 방법을 이용하여 외접원의 반지름 $R=r+\sqrt{r^2+d^2}$ 을 직접 작도하여 문제를 해결하였다. 문제해결에 사용된 등식 $d^2=R^2-2Rr$의 증명을 살펴보자. 그림 12의 삼각형 OIW_a에 코사인 정리를 사용하면, $d^2=OW_a^2+IW_a^2-2OW_a\cdot IW_a\cdot\cos\angle OW_aI$이다. 이제 O로부터 직선 W_aA에 내린 수선의 발을 D라 하면, $IW_a\cdot\cos\angle OW_aI=W_aD$이다. $IW_a=W_aC$[4]이며, $d^2=OW_a^2+W_aC^2-2OW_a\cdot W_aD=R^2+W_aC^2-2R\cdot W_aD$가 된다. 한편 $W_aC^2=W_aM_a\cdot 2R$이므로, $d^2=R^2+2R(W_aM_a-W_aD)$이다. 이제 $W_aD-W_aM_a=r$임을 생각하면, $d^2=R^2-2Rr$이 증명된다.

문제 2-7. M_a, I, W_a

4) 등식 $IW_a=W_aC=W_aB$이 한인기, 꾸쉬니르(2008)의 244쪽에 증명과 함께 제시되어 있음.

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자. 두 점 M_a, I가 주어졌으므로, 점 O의 위치를 구하면 문제 2-6에 의해 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

그림 13에서 꼭짓점 B, C는 점 M_a를 지나며 직선 M_aW_a에 직교하는 직선에 속한다. 그리고 $W_aI = W_aB = W_aC$이므로, 꼭짓점 B, C의 위치를 결정할 수 있다. 한편 외심 O는 선분 W_aB의 수직이등분선과 직선 M_aW_a의 교점이므로, 쉽게 얻어질 수 있으며, 문제 2-6에 의해 구하는 작도를 얻을 수 있다.



[그림 13]

작도.

① 직선 M_aW_a를 작도한다.

② 점 M_a를 지나며 직선 M_aW_a에 직교하는 직선을 작도한다.

③ 직선 M_aW_a에 $W_aI = W_aB = W_aC$인 점 B, C를 작도한다.

④ 선분 BC의 수직이등분선을 작도한다.

⑤ ①과 ④에서 얻어진 직선의 교점을 O라 한다.

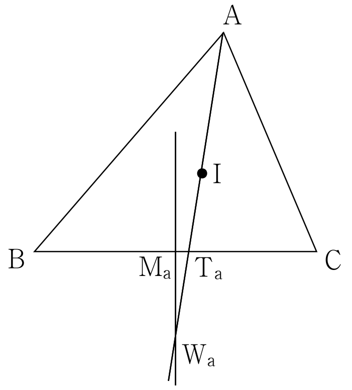
⑥ M_a, I, O가 얻어졌으므로, 문제 2-6의 방법으로 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 2-7에서는 삼각형의 각의 이등분선과 외접원의 교점인 W_a, W_b, W_c에 대한 중요한 성질인 $W_aI = W_aB = W_aC$을 이용하여 꼭짓점 B, C의 위치를 결정하였다. 그런 다음, 선분 W_aB의 수직이등분선과 직선 M_aW_a의 교점이 외심이 된다는 것을 이용하여 문제를 해결하였다.

문제 2-8. M_a, I, T_a

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자. 두 점 M_a, I가 주어졌으므로, 점 W_a의 위치를 구하면 문제 2-7에 의해 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

점 W_a는 점 M_a를 지나며 M_aT_a에 직교하는 직선과 직선 IT_a의 교점이다(그림 14). 이제 문제 2-7과 같은 방법으로 문제를 해결할 수 있다.



[그림 14]

작도.

① 직선 M_aT_a를 작도한다.

② 점 M_a를 지나며 직선 M_aT_a에 직교하는 직선을 작도한다.

③ 직선 IT_a를 작도한다.

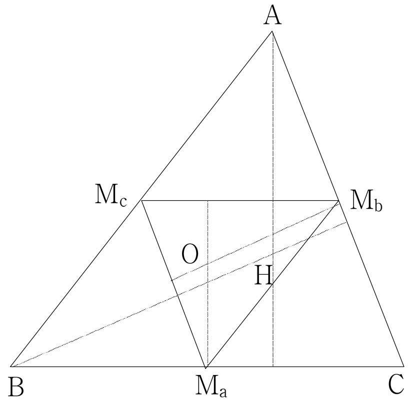
④ ②와 ③에서 얻어진 직선들의 교점을 W_a라 한다.

⑤ M_a, I, W_a가 얻어졌으므로, 문제 2-7과 같이 삼각형 ABC를 작도한다.

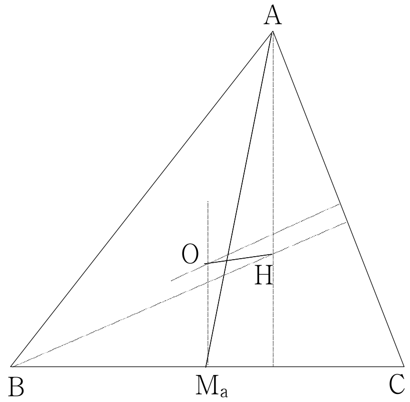
3. 오일러 직선의 성질을 이용하여 외접원을 작도하는 문제들

삼각형에서 외심, 무게중심, 수심은 한 직선에 속하며, 이 직선을 오일러 직선이라 부른다. 오일러 직선의 존재 및 성질을 증명하기 위해, 우선 등식 $2OM_a = AH$을 증명하자.

삼각형 ABC에서 높이들을 그어 수심 H를 작도하고, 변들의 중점 M_a, M_b, M_c를 잡아 외심 O를 작도하자(그림 15). 이때 M_aM_c와 AC, M_aM_b와 AB, M_cM_b와 BC가 평행하므로, 삼각형 ABC와 $M_aM_bM_c$는 닮음이고 닮음비는 2:1이다. 그런데 닮음인 삼각형 ABC와 $M_aM_bM_c$에서 대응하는 높이들의 비 또는 $AH:M_aO$는 닮음비와 같으므로, $AH:M_aO=2:1$이다.



[그림 15]



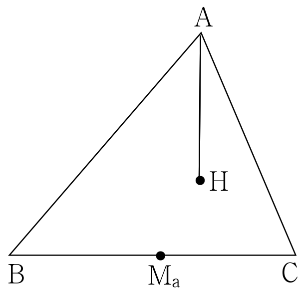
[그림 16]

이제 등식 $2OM_a = AH$으로부터 오일러 직선의 존재 및 성질을 살펴보자. 중선 AM_a, 선분 OH를 작도하여, 교점을 L이라 하자(그림 16). OM_a와 AH는 평행이므로, 삼각형 M_aOL과 AHL은 닮음이다. 그리고 $AH:M_aO=2:1$이므로 이들 삼각형의 닮음비는 1:2가 된다. 이로부터 $AL:LM_a=2:1$이므로, 점 L은 삼각형 ABC의 무게중심이다. 즉 삼각형에서 외심, 무게중심, 수심은 한 직선에 속하며, OG:GH=1:2가 성립한다.

문제 3-1. M_a, H, A

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자. 그림 17에서 두 점 M_a, A가 주어졌으므로, 점 O의 위치를 구하면 바탕문제에 의해 작도문제를 해결할 수 있다.

점 O는 점 M_a를 지나며 변 BC에 직교하는 직선에 속한다. 그런데 이 직선은 수선 AH와 평행하므로, 작도될 수 있다. 한편 $2OM_a = AH$이므로, 외심 O를 구할 수 있고, 문제가 해결된다.



[그림 17]

작도.

① 직선 AH를 작도한다.

② 점 M_a를 지나고 직선 AH에 평행한 직선을 작도한다.

③ ②에서 얻어진 직선에 $2OM_a = AH$인 점 O를 작도한다.

④ 중심이 O이고 반지름이 OA인 원을 작도한다.

⑤ 점 M_a를 지나며 ②에서 얻어진 직선에 직교하는 직선을 작도한다.

⑥ ④의 원과 ⑤의 직선의 교점을 B, C라 한다.

⑦ 점 A, B, C를 연결하여 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 3-1에서는 세 점 M_a, H, A이 주어졌으므로 등식 $2OM_a = AH$을 이용하여 외심의 위치를 결정한 다음, 바탕문제를 이용하여 삼각형 ABC를 작도하였다.

문제 3-2. M_a, H, O

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 18). 두 점 M_a, H가 주어졌으므로, A의 위치만 결정되면 문제 3-1과 같은 방법으로 해결할 수 있다.

M_aO와 AH는 평행이고 $2OM_a = AH$이므로, 점 A의 위치를 결정할 수 있다. 즉 직선 M_aO를 작도한 다음, 점 H를 지나 M_aO에 평행한 직선을 작도한다. 그런 다음 $2OM_a = AH$인 점 A를 작도한다.

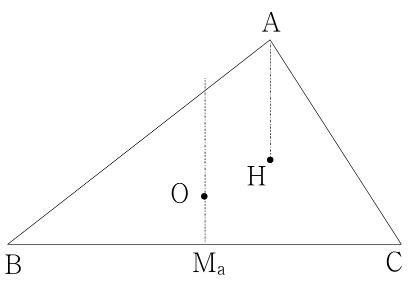
작도.

① 직선 M_aO를 작도한다.

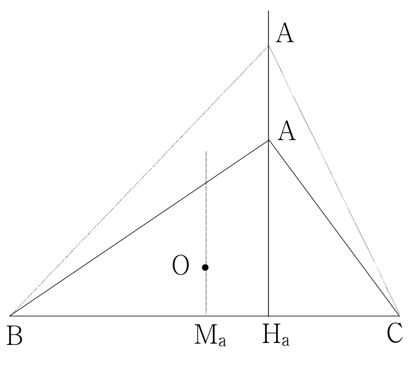
② 점 H를 지나 M_aO에 평행한 직선을 작도한다.

③ ②의 직선에 $2OM_a = AH$인 점 A를 작도한다.

④ M_a, H, A가 얻어졌으므로 문제 3-1과 같이 삼각형 ABC를 작도한다.



[그림 18]



[그림 19]

문제 3-3. M_a, H_a, O

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 19). 두 점 M_a, O가 주어졌으므로, A 또는 H의 위치만 결정되면 앞의 문제들과 같은 방법으로 해결할 수 있다.

점 A는 점 H_a를 지나며 직선 M_aH_a에 직교하는 직선에 속한다. 특히 그림 19와 같이 점 M_a, H_a, O의 위치는 점 A에 종속되지 않으므로, 무수히 많은 점 A를 잡을 수 있다. 이제 중심이 O이고 반지름이 OA인 원을 작도하여, 직선 M_aH_a와의 교점을 B, C라 놓으면, 삼각형 ABC가 얻어진다.

작도.

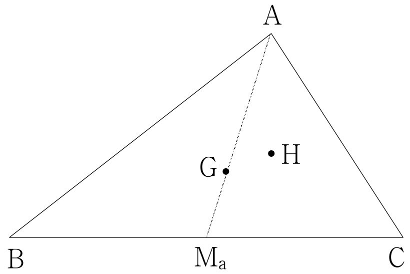
① 직선 M_aH_a를 작도한다.
② 점 H_a를 지나 M_aH_a에 직교하는 직선을 작도한다.
③ ②의 직선에 점 A를 작도한다.
④ 중심이 O이고 반지름이 OA인 원을 작도한다.
⑤ ④의 원과 직선 M_aH_a와의 교점을 B, C라 한다.
⑥ 세 점 A, B, C를 연결하여 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 3-3에서 꼭짓점 A는 H_a를 지나 M_aH_a에 직교하는 직선에 임의로 잡을 수 있으며, 이때 세 점 M_a, H_a, O의 위치는 불변이므로, 이 문제는 무수히 많은 해를 가지게 된다. 한 가지 주의할 것은 점 H_a가 그림 19와 같이 M_a-H_a-C와 같이 주어지면, 꼭짓점 A는 직선 OM_a의 오른쪽에 놓이게 되며, H_a-M_a-C인 경우에는 직선 OM_a의 왼쪽에 놓여야 한다.

문제 3-4. M_a, H, G

분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 20). 두 점 M_a, H가 주어졌으므로, O의 위치만 결정되면 문제 3-2와 같은 방법으로 해결할 수 있다.

오일러 직선의 성질에 의해 삼각형의 수심 H, 무게중심 G, 외심 O는 한 직선에 속하며, GH=2OG가 성립한다. 즉 직선 HG를 작도하여, GH=2OG인 점 O를 작도할 수 있다.

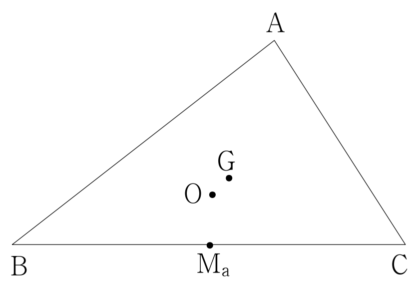


[그림 20]

작도.
① 직선 HG를 작도한다.
② ①의 직선에 GH=2OG인 점 O를 작도한다.
③ M_a, H, O가 주어졌으므로, 문제 3-2와 같이 삼각형 ABC를 작도한다.

문제 3-4에서는 오일러 직선의 성질인 등식 GH=2OG을 이용하여 외심 O의 위치를 결정하여, 작도문제를 해결하였다. 문제 3-4와 유사한 방법으로 다음 문제를 해결할 수 있다.

문제 3-5. M_a, O, G
분석. 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자(그림 21). 두 점 M_a, G가 주어졌으므로, H의 위치만 결정되면 문제 3-4와 같은 방법으로 해결할 수 있다.
오일러 직선의 성질에 의해 삼각형의 수심 H, 무게중심 G, 외심 O는 한 직선에 속하며, GH=2OG가 성립한다. 즉 직선 OG를 작도하여, 2OG=GH인 점 H를 작도할 수 있다.

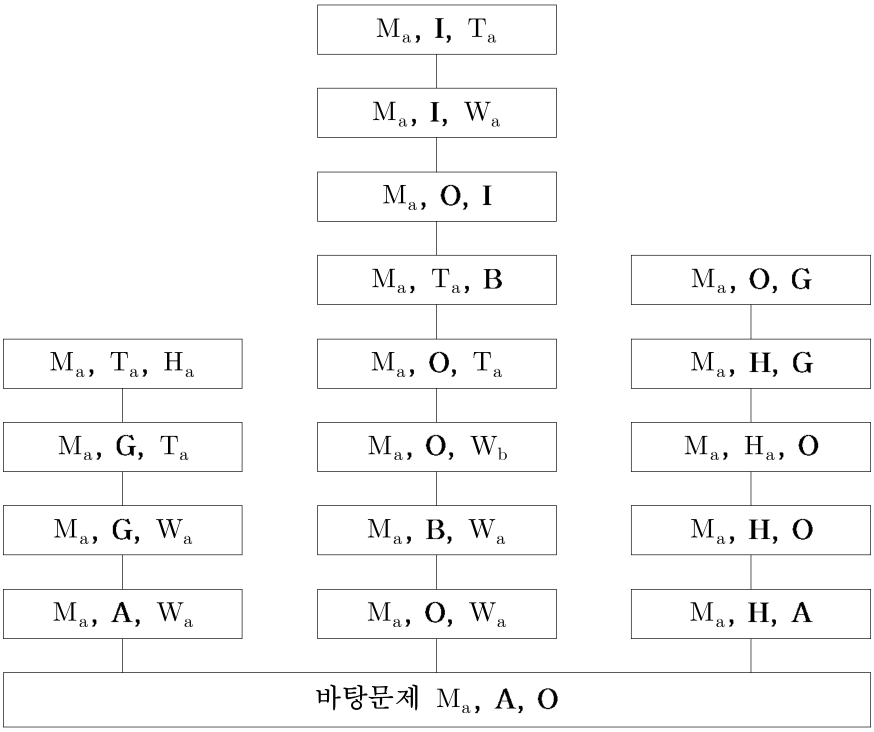


[그림 21]

작도.
① 직선 OG를 작도한다.
② ①의 직선에 2OG=GH인 점 H를 작도한다.
③ M_a, H, G가 주어졌으므로, 문제 3-4와 같이 삼각형 ABC를 작도한다.

본 연구에서는 이제껏 작도문제 해결의 연구에서 거의 연구되지 않은 주제인 '세 점이 주어진 경우의 삼각형 작도문제'에 대해 자세한 해결방법을 제시하고, 이에 대한 교수학적인 분석을 통해 해결에 사용된 수학적 사실들, 해결 방법의 특징들을 제시하였다. 그리고 바탕문제를 중심으로 해결된 작도문제들을 세 분류로 나누어 일관된 체계로 구성하여, 이론적 지식의 구체화의 과정을 상세히 기술하였다.
본 연구에서 얻어진 작도문제들의 구체화는 표 1과 같이 정리할 수 있다.

<표 1> 세 점이 주어진 작도문제들의 구체화



V. 결 론

본 연구에서는 Davydov의 경험적 사고와 이론적 사고에 대한 문헌들을 분석하여, 이론적 사고의 중요한 개념인 '구체화'의 의미를 고찰하고, 한 변의 중점과 두 점이 주어진 삼각형의 작도문제들을 구체화시키는 과정, 즉 이들 작도문제를 하나의 일관된 체계를 구성하는 과정을 상세하게 기술하였다.

이론적 사고는 본질적이며 반성적 존재인 개념을 대상으로 하며, 사물들의 일반화된 형식을, 사물의 매개화된 척도를, 사물들의 내적 규칙성을 재구성하게 된다. 이론적 사고에서는 일관된 체계의 구성, 이 체계에서 객체들의 내적 관계 탐구가 중요한 사고 활동이다. 한편 이론적 사고에서의 구체화는 일반화된(공통된) 바탕으로부터 특정한 일관된 체계의 발현을 추출하고 해석하는 것으로, Euclid가 일반적 원리인 공리, 공준으로부터 특수한 기하학의 체계를 구성한 것은 이론적 지식의 구체화의 한 예라 할 수 있다.

본 연구에서는 한 변의 중점과 다른 두 점이 주어진 삼각형의 작도문제들을 구체화하기 위해, 즉 이들 작도문제들을 일관된 체계로 구성하기 위해 바탕이 되는 바탕문제를 추출하였다. 바탕문제는 '변 BC의 중점 M_a, 꼭짓점 A, 외심 O가 주어진 삼각형 ABC의 작도문제'이며, 이로부터 첫째, 세 점 M_a, A, O가 주어진 삼각형을 작도할 수 있으며, 둘째 외심과 변의 중점을 연결하는 직선에 직교하는 직선과 외접원의 교점이 구하는 삼각형의 두 꼭짓점이 된다는 것을 분석하였다.

본 연구에서는 바탕문제와 관련된 세 점이 주어진 작도문제들을 (1) 외심과 꼭짓점을 이용하여 외접원을 작도하는 문제들, (2) 외심과 W_a, W_b, W_c를 이용하여 외접원을 작도하는 문제들, (3) 대수적인 방법으로 외접원을 작도하는 문제들로 분류하였다.

첫 번째 분류에 속하는 작도문제들로 (M_a, A, W_a), (M_a, G, W_a), (M_a, G, T_a), (M_a, T_a, H_a)가 있으며, 두 번째 분류에 속하는 작도문제들로 (M_a, O, W_a), (M_a, B, W_a), (M_a, O, W_b), (M_a, O, T_a), (M_a, T_a, B), (M_a, O, I), (M_a, I, W_a), (M_a, I, T_a)가 있으며, 세 번째 분류에 속하는 작도문제들로 (M_a, H, A), (M_a, H, O), (M_a, H_a, O), (M_a, H, G), (M_a, O, G)가 있다. 본 연구에서는 이들 작도문제 각각에 대한 탐색과정과 작도순서를 상세히 제시하였고, 그 해결과정의 특징을 분석하였다. 이를 통해 이들 작도문제를 해결하기 위한 방법, 이들 문제의 교수학적 가치에 대한 몇몇 논의를 제시할 수 있었다.

특히 본 연구에서는 삼각형의 각의 이등분선과 외접원의 교점 W_a, W_b, W_c가 조건으로 주어진 작도문제들을 연구하였는데, W_a, W_b, W_c를 포함하는 작도문제의 설정 및 해결은 본 연구에서 처음으로 시도되었다는 측면에서 큰 의미를 둘 수 있다.

본 연구의 결과는 이론적 지식의 구체화 과정, 작도문제 해결의 교수학적 활용, 교수학적 의의에 대한 폭넓은 논의를 위한 기초자료를 제공할 수 있을 것이며, 중등학교 학생들의 창의적 수학탐구 활동의 소재로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

공선혜 · 한인기 (2008). 대수적 방법을 이용한 방접원에 관련된 삼각형 작도문제의 해결 연구, 한국학교수학회논문집, 제 11권 3호, 399-420.

김익달 (1970). 철학대사전, 서울: 학원사.

박명희 · 신경희 (2006). Clairaut의 <기하학 원론>에 근거한 7-나 단계 작도단원의 자료 개발과 적용에 관한 연구, 한국수학사학회지, 제 19권 4호, 117-132.

장혜원 (1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 관한 고찰, 대한수학교육학회논문집, 제 7권 2호, 327-336.

정창현 (1992). 평면 도형의 작도에 관한 고찰, 수학교육, 제 31권 4호, 83-92.

조완영 · 정보나 (2002). 7차 수학과 교육과정 작도 영역의 교과서와 수업사례 분석, 학교수학, 제 4권 4호, 601-615.

한인기 (1999). 작도 문제 해결 방법, 수학교육 논문집, 제 9권, 153-164.

한인기 · 꾸쉬니르 (2008). 뇌를 자극하는 수학공부. 서울: 경문사.

Davydov V.V. (2004). Problemy Razvivayushego Obucheniya, Moskva: Arademiya.

Davydov V.V. (2000). Vidy Obobsheniya v Obuchenii, Moskva: Pedagogicheskoe Obshestvo Rossii.

Davydov V.V. (1996). Teoriya Razvivayushego Obucheniya, Moskva: INTOR.

Fihtengolts G.M. (1939). Predislovie perevodchika. In Adler A.(1940). Teoriya Geometricheskih Postoenii. Leningrad: Gos U-P Izd.

Kiselev A., & Pybkin N. (1995). Geometriya 7-9. Moskva: Drofa.

Meyers L. (1996). Update on William Wernick's "Triangle Constructions with Three Located Points", Mathematics Magazine, 69(1), 46-49.
Wernick W. (1982). Triangle Constructions with Three Located Points, Mathematics Magazine, 55(4), 227-230.

A Study on Solving Triangle Construction Problems Given by a Midpoint of Side and Other Two Points

Han, Inki[5] · Lee, Jeongsoon[6]

Abstract

In this paper we solve various triangle construction problems given by three points(a midpoint of side and other two points). We investigate relation between these construction problems, draw out a base problem, and make hierarchy of solved construction problems. In detail we describe analysis for searching solving method, and construction procedure of required triangle.

Key Words : Triangle, Construction problem, Circumscribed circle, Theoretical thinking, Davydov

5) Gyeongsang National University (inkiski@gsnu.ac.kr)
6) Geumnam Middle School (blwjdtns333@naver.com)