

폴리토픽 모델을 위한 PI 형 H_∞ 제어기의 LMI 기반 설계

LMI-based Design of PI-type H_∞ Controller for Polytopic Models

최 한 호*
(Han Ho Choi)

Abstract : The robust stabilization problem of a multivariable uncertain system with a polytopic model is considered. A PI-type H_∞ controller with a low pass filter is used for robust stabilization and noise rejection. The problem is reduced to an LMI optimization problem. A sufficient condition for the existence of the PI controller is derived in terms of LMIs. The PI gain matrices are parameterized by using the solution matrices to the existence conditions. Finally, a numerical design example is given.

Keywords : LMI (Linear Matrix Inequality), PI control, robust control, uncertain system

I. 서론

PID 제어기는 산업계에서 가장 많이 사용되는 제어 알고리즘으로 PID 이득을 구하기 위한 많은 다양한 방법들이 제안되었다. 이들의 대부분은 대상시스템이 SISO로 2차에 dead time이 포함된 형태로 모델링 될 수 있다는 가정에 기반 하였다[1,2]. 많은 공정시스템들이 이러한 가정을 충족시키기는 하지만 반면에 이를 충족시키지 않는 시스템도 많다. 이를 고려하여 최근 MIMO의 고차 시스템을 위한 LMI 기반의 PID 제어기 설계방법이 연구되었다. [3-6], [10]에서는 MIMO의 고차 시스템을 위한 PID 설계 문제를 부가적인 비선형 구속조건을 갖는 정적 출력 제한 안정화 문제로 변환하고 비볼록(nonconvex) 조건을 사용하여 PID 이득을 매개변수화하였다. 그리고 비볼록 조건을 풀기위한 반복적인 LMI 기반의 알고리즘을 제안하였다. 이들 방법들은 시스템 모델이 LTI라는 가정이나 외란입력으로부터 출력의 전달함수가 0이라는 가정을 사용하였다. 이러한 구조적인 가정들은 어떤 경우에는 만족되지 않는다. 그리고 실제의 경우 출력은 잡음에 영향을 받게 되어 기존 방법들의 응용은 제한이 될 수 밖에 없다. 이러한 점을 고려하여 본 논문에서는[3-6], [10]의 구조적인 가정들이 만족되지 않는 MIMO 시스템을 위한 강인한 PI 형의 H_∞ 제어기 설계문제를 다룬다. 제안된 PI 제어기는 측정 잡음의 제어기에 대한 영향을 줄이기 위해 저역통과 필터를 포함하도록 하였다. 우리는 PI 형의 H_∞ 제어기가 존재할 LMI 조건을 유도한다. 그리고 이를 이용한 설계알고리즘과 수치적인 예를 보인다.

II. 대상 시스템과 예비 결과

다음과 같은 폴리토픽 모델을 본 논문에서는 고려할 것이다[4].

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N \beta_i [A_i x + B_i u + D_i w] \quad (1)$$

$$y = \sum_{i=1}^N \beta_i [C_i x + E_i w]$$

$$z = \sum_{i=1}^N \beta_i [F_i x + G_i w]$$

여기에서 $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p, z \in R^q, w \in R^r$ 은 상태, 입력, 측정출력, 제어출력, 외란입력이다. $A_i, B_i, D_i, C_i, E_i, F_i, G_i$ 는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이며 β_i 는 미지의 변수로 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0$$

폴리토픽모델은 비선형 시스템을 여러 동작점에서 동작하여 얻은 상태공간 모델의 convex interpolation으로부터 얻어질 수 있음에 유의해야 한다[4]. 그리고 [3-6]의 방법으로 (1)을 위한 PID 제어기를 구할 수 없음에 유의해야 한다.

보조정리 1 [7]: 다음의 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Fx$$

여기에서 $x \in R^n, z \in R^q, w \in R^r$ 은 상태, 측정출력, 외란입력이다. 주어진 양수 γ 에 대하여 아래의 행렬식을 만족시키는 해 $P > 0$ 이 존재하면 $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ 의 H_∞ 성능 구속조건이 만족된다.

$$P > 0, \quad \begin{bmatrix} AP + PA^T + PE^T EP & * \\ B^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

보조정리 2 [7]: 주어진 하나의 행렬 N 와 두 개의 대칭행렬 Q 와 R 에 대하여 다음의 LMI를 고려하자.

$$\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} > 0$$

위의 LMI가 성립할 필요충분조건은 다음 중 하나이다.

$$R > 0, \quad Q - NR^{-1}N^T > 0$$

$$Q > 0, \quad R - N^T Q^{-1}N > 0$$

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2008. 10. 2., 채택확정 : 2008. 11. 27.
최한호 : 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)

III. 제어기와 확장 모델

측정출력은 잡음에 의해 훼손되므로 잡음의 증폭을 감소하기 위해 미리 선정된 시상수를 갖는 저역통과필터를 포함하는 형태의 PID 제어기가 실제의 경우에 사용된다. 이러한 사실을 고려하여 다음과 같은 1차의 저역통과를 포함하는 PI 제어기를 고려하기로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_f &= -\rho y_f + \rho y \\ u &= K_P y_f + K_I \int_0^t y_f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서 $K = [K_P, K_I] \in R^{m \times 2p}$ 는 PI 이득행렬이고 ρ 는 기지의 양수이다. ρ^{-1} 이 필터 시상수임에 유의하라. 다음의 확장된 상태변수 v 를 이용하여

$$v = [x^T, y_f^T, \int y_f^T d\tau]^T \in R^{n+2p}$$

아래와 같은 확장 시스템 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \sum_{i=1}^N \beta_i [\hat{A}_i v + \hat{B}_i w], \\ z &= \sum_{i=1}^N \beta_i \hat{F}_i v \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{F}_i$ 는 다음처럼 주어진다.

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i K \\ C_i & H \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_i = \begin{bmatrix} D_i \\ E_i \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_i = [F_i, G_i K]$$

그리고 H, \bar{C}_i, \bar{E}_i 는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \rho I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \in R^{2p \times 2p}, \quad \bar{C}_i = \begin{bmatrix} \rho C_i \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{2p \times n}, \\ \bar{E}_i &= \begin{bmatrix} \rho E_i \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{2p \times r} \end{aligned}$$

IV. 주요 결과

보조정리 1은 다음을 만족시키는 공통의 양한정 행렬 P 가 존재하면 (3)의 시스템이 $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ 의 H_∞ 성능 구속조건을 만족시킨다는 것을 의미한다.

$$P > 0, \quad \begin{bmatrix} \hat{A}_i P + P \hat{A}_i^T + P \hat{F}_i^T \hat{F}_i P & * \\ \hat{B}_i^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

여기에서 *는 대칭성에 의해 쉽게 유추할 수 있는 행렬블록을 의미한다. [8]에 주어진 정리 4와 보조정리 2를 이용하면 다음의 행렬식 (5)가 어떤 $X, Y \in R^{\mu \times \mu}$ 에 대하여 해 $P > 0$ 이 존재할 때 그 해 P 는 행렬식 (4)도 만족시킴을 보일 수 있다.

$$P > 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{\pi}_i X + * & * & * \\ \bar{P} - X + Y^T \bar{A}_i^T & -Y + * & 0 \\ \bar{B}_i^T & 0 & \bar{B}_i^T 0 - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

여기에서 $\mu = (n + 2p + q)$ 이고 $\bar{P}, \bar{A}_i, \bar{B}_i$ 는 다음처럼 정의

된다.

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0.5I \end{bmatrix} \in R^{\mu \times \mu}, \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} \hat{A}_i & 0 \\ \hat{F}_i & -I \end{bmatrix} \in R^{\mu \times \mu}, \\ \bar{B}_i &= \begin{bmatrix} \hat{B}_i \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{\mu \times q} \end{aligned}$$

P, X, Y 를 다음처럼 가르도록 하자.

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ X_4 L & X_4 & 0 \\ 0 & 0 & X_7 \end{bmatrix}, \\ Y &= \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & 0 \\ 0 & X_4 & 0 \\ 0 & 0 & Y_7 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 P_1, X_1, Y_1 는 $n \times n$ 행렬들, P_2, X_2, Y_2 는 $n \times 2p$ 행렬들, P_3, X_4 는 $2p \times 2p$ 행렬들, X_7, Y_7 는 $q \times q$ 행렬들로 결정해야할 변수 행렬들이고 L 은 $2p \times n$ 차원의 상수행렬로 다음처럼 정의된다.

$$L = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N C_i \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{2p \times n} \quad (7)$$

$KX_4 = Z$ 의 변수치환을 이용하고 (6)과 (7)의 P, X, Y, L 를 (5)에 대입하여 다음처럼 단순화된 LMI를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Q_{i11} & * & * & * & * & 0 & * \\ Q_{i21} & Q_{i22} & * & * & * & 0 & * \\ Q_{i31} & Q_{i32} & Q_{i33} & * & * & * & 0 \\ Q_{i41} & Q_{i42} & Y_1^T F_i^T & Q_{i44} & * & 0 & 0 \\ Q_{i51} & Q_{i52} & Q_{i53} & -Y_2^T & Q_{i55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{i63} & 0 & 0 & Q_{i66} & 0 \\ D_i^T & \bar{E}_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$P > 0$

여기에서

$$\begin{aligned} Q_{i11} &= \bar{A}_i X_1 + B_i Z L + *, \\ Q_{i22} &= \bar{C}_i X_2 + H X_4 + *, \\ Q_{i21} &= X_2^T \bar{A}_i^T Z^T B_i^T + \bar{C}_i X_1 + H X_4 L, \\ Q_{i31} &= F_i X_1 + G_i Z L, \\ Q_{i32} &= F_i X_2 + G_i Z, \quad Q_{i33} = -X_7 - X_7^T, \\ Q_{i41} &= P_1 - X_1 + Y_1^T \bar{A}_i^T, \\ Q_{i42} &= P_2 - X_2 + Y_1^T \bar{C}_i^T, \quad Q_{i44} = -Y_1 - Y_1^T, \\ Q_{i51} &= P_2^T - X_4 L + Y_2^T \bar{A}_i^T + Z^T B_i^T, \\ Q_{i52} &= P_3 - X_4 + Y_2^T \bar{C}_i^T + X_4^T H^T, \\ Q_{i53} &= Y_2^T F_i^T + Z^T G_i^T, \quad Q_{i55} = -X_4 - X_4^T, \\ Q_{i63} &= 0.5I - X_7 - Y_7^T, \quad Q_{i66} = -Y_7 - Y_7^T \end{aligned}$$

결국 이는 다음의 정리를 의미한다.

정리 1: 주어진 γ 에 대하여 LMI (8)을 만족시키는 해 행렬 $P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_4, X_7, Y_1, Y_2, Y_7, Z$ 가 존재한다고 가정하자. 그리고 제어기 (2)의 이득이 $K = ZX_4^{-1}$ 로 주어진다 고 하자. 그러면 시스템 (1)과 (2)의 폐회로 시스템은 안정하고 $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ 의 H_∞ 성능 구속조건이 만족된다.

V. 설계 알고리즘과 설계 예

앞 절의 주요 결과는 다음의 LMI 기반 설계 알고리즘으로 요약될 수 있다.

설계알고리즘:

1단계: 주어진 시스템을 (1)의 형태로 나타낸다.

2단계: LMI (8)의 해 $P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_4, X_7, Y_1, Y_2, Y_7, Z$ 를 LMI 최적화 알고리즘을 사용해서 구한다.

3단계: $K = ZX_4^{-1}$ 를 이용하여 이득 K 를 구한다.

제안된 결과의 효용성을 보이기 위해 [9]에 주어진 L-1011 항공기의 lateral 축동역학 모델을 고려해보자. [9]을 참조해 자료는 다음과 같다고 하자.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.98 & -0.57 & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.5555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.98 & 5.43 & 0 & -0.034 \\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.39 & -5.5555 & 0 & -1.89 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} -0.032 \\ 0 \\ 0 \\ -1.6 \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$E_1 = E_2 = [1, 0]^T$, $F_1 = F_2 = C_1$, $D_1 = D_2 = B_1$, $G_1 = G_2 = [0, 1]^T$ 로 하고 저역통과필터의 시상수를 $\rho^{-1} = 1$ 로 하여 주어진 설계알고리즘에 따라 $\gamma = 3.325$ 에 대하여 다음과 같은 PI 이득을 얻을 수 있다.

$$K_p = [1.439, 0.908], \quad K_I = [0.068, 0.031]$$

초기조건을 $x_1(0) = -x_2(0) = 1$, $x_3(0) = -x_4(0) = 0$ 으로 하고 $\beta_1 = 0.5(1 - \sin t)$, $\beta_2 = 1 - \beta_1$ 외란입력을 $w(t) = \sin 20t$ 로 가정하였을 때 시뮬레이션 결과가 그림 1에 보여 지고 있다. 그림 1로부터 제안된 제어기에 의해 대략적인 외란 제거가 이루어짐을 알 수 있다.

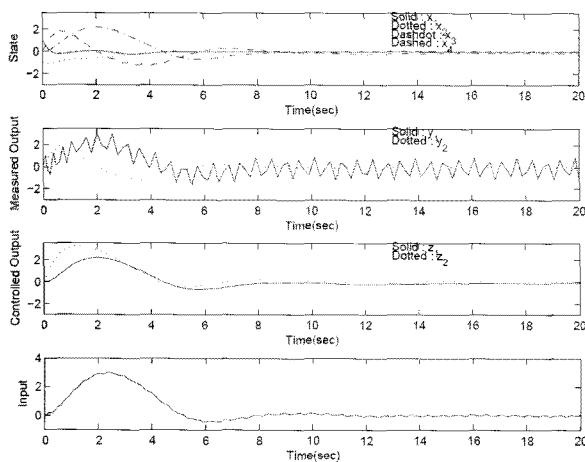


그림 1. 시뮬레이션 결과.
Fig. 1. Simulation results.

VI. 결론

폴리토픽모델에 대한 강인한 PI 제어기 설계문제를 다루었다. 저역통과 필터를 포함하는 PI 형 H_∞ 제어기의 존재 조건을 LMI를 사용하여 유도하였다. LMI 존재조건을 해를 이용하여 제어기의 이득을 매개변수화 하였다. 마지막으로 설계알고리즘을 설계 예와 함께 제시하였다.

참고문헌

- [1] P. Cominos and N.Munro, "PID controllers: Recent tuning methods and design to specification," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 149, no. 1, pp. 46-53, Jan. 2002.
- [2] H. Takatsu and T. Itoh, "Future needs for control theory in industry-Report of the control technology survey in Japanese industry," *IEEE Trans. Control Systems Technology*, vol. 7, no. 3, pp. 298-305, May 1999.
- [3] F. Zheng, Q.-G. Wang, and T. H. Lee, "On the design of multivariable PID controllers via LMI approach," *Automatica*, vol. 38, no. 3, pp. 517-526, Mar. 2002.
- [4] C. Lin, G. G.Wang, and T. H. Lee, "An improvement on multivariable PID controller design via iterative LMI approach," *Automatica*, vol. 40, no. 3, pp. 519-525, Mar. 2004.
- [5] Y. He and Q. G. Wang, "An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 51, no. 10, pp. 1678-1683, Oct. 2006.
- [6] S. Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, E., and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," *PA : SIAM*, 1994.
- [7] B. Kristiansson, B. Lennartson, and C.-M. Fransson, "From PI to H_∞ control in a unified framework," *In Proc. of the 39th CDC*, pp. 2740-2745, Sydney, Australia, Dec. 2000.
- [8] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou, "A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty," *Sys. Contr. Lett.*, vol. 40, no. 1, pp. 21-30, May 2000.
- [9] A. Galimidi and B. Bamish, "The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 31, no. 5, pp. 410-419, May 1986.
- [10] 이재관, 최한호, "불확실성을 갖는 MIMO 시스템을 위한 선형행렬부등식 기반 PID 제어기 설계 방법," 제어·자동화·시스템공학 논문지, 제11권, 제9호, pp. 750-754, 2005.

최한호

제어·자동화·시스템공학 논문지 제13권 제9호 참조.