

LQ 제어기에 의한 극배치 방법

Pole Placement by an LQ Controller

박 민 호*

(Minho Park)

Abstract : This paper studies the problem of pole placement by an LQ controller for system having two distinct real poles. Using the so-called Pole's Moving Range (PMR) drawn in the s-plane and relational equations between closed-loop system poles and weighting matrices, we calculate the state weighting matrix to move two distinct real poles to a pair of complex poles. By numerical examples, we show that the proposed method is applied to improve system performance.

Keywords : LQ, weighting matrix, pole's moving-range, pole placement

I. 서론

시스템의 안정성을 보장하면서 시스템 출력이 원하는 설계 사양을 만족하도록 응답 특성을 개선하는 것이 제어기의 설계 목적이다. 제어 가능한 선형 시스템의 제어기를 설계하는 여러 방법 중에서 최적 제어 이론을 기반으로 한 LQ 제어기의 설계는 시스템의 상태방정식을 만족하면서 성능지수가 최소가 되도록 하는 제어 법칙을 계산하는 것이다. 일반적으로 제어 법칙은 성능지수 함수의 상태가중행렬과 제어가중행렬로 이루어지는 Riccati 방정식의 유일한 해와 상태변수의 곱의 형태로 표현되기 때문에 LQ 제어기의 설계 방법은 두 가중행렬의 설정 문제로 변경된다. 설정된 두 가중행렬의 값에 관계없이 시스템의 안정성에 대해서 이득여유와 위상여유를 보장하는 것이 LQ 제어기의 장점이고, 페루프 시스템 근의 위치는 두 가중행렬을 설정할 때 알 수 있는 것이 아니고 제어기 설계가 완료된 후에 알 수 있기 때문에 시스템의 응답 특성이 설계 조건을 만족할 때까지 가중행렬을 조정하여 제어기를 설계하는 것이 단점이다. 이는 가중행렬과 근의 관계식뿐만 아니라 가중행렬에 의해 이동되는 시스템 근의 이동 범위를 알 수 없기 때문에 발생한다.

이런 문제점의 해결 방안으로 극배치 기능을 가지는 LQ 제어기에 대한 연구가 많이 진행되고 있다. 1972년 Solheim은 대각행렬 형태의 두 가중행렬을 적용한 Hamiltonian 행렬에서 근과 가중행렬의 관계식을 유도하여 시스템의 실근을 페루프 실근으로 이동시키는 상태가중행렬 계산법을 제시하였고, 복소근에 대해서는 명확한 해법을 제시하지 못했다[1]. 1988년에는 Medanic 등은 조단 분리 방법과 Riccati 방정식을 이용하여 관계식을 유도하였지만, 페루프 근은 시스템의 근보다 왼쪽으로 실수축에 평행하게 이동되는 단점을 가지고 있다[2]. 1993년과 1995년에 Ochi는 Solheim이 사용한 Hamiltonian 행렬의 특성방정식에서 상태가중행렬의 미세변화에 따른 근의 변화를 Taylor 전개로 표현하여 근과 가중행렬의 관계를 유도하였는데, 계산량이 많다는 점이 단

점이 있다[3,4]. 1996년과 1998에 Sugimoto는 LQ 제어기가 포함된 페루프 시스템의 전달함수를 우측 coprime factorization을 이용하여 근과 가중행렬의 관계식을 유도하였는데 SISO 시스템에서는 원하는 페루프 근으로 정확하게 이동시키지 못하고, MIMO 시스템에서는 새로운 극점이 허수축에서 멀리 떨어진 곳에 추가되는 단점이 있다[5,6]. 1996년, 2001년, 2002년에 Fujinaka 등은 대각행렬의 제어가중행렬과 삼각함수로 이루어진 대칭행렬의 상태가중행렬을 적용하여 Hamiltonian 행렬의 특성방정식에서 복소근과 가중행렬의 관계식을 유도하였지만, 시스템의 입력 개수에 따라 관계식이 다르고, 시스템의 복소근만 원하는 페루프 복소근으로 이동시키는 한계를 가지고 있다[7-9]. 그리고 앞선 연구들의 공통적인 문제점은 가중행렬에 의해 이동되는 시스템 근의 영역을 알 수 없고 시스템의 서로 다른 두 실근의 이동을 다루지 않았다.

일반적으로 n 차 시스템의 특성방정식은 1차 또는 2차 방정식의 연속적인 곱의 형태로 근사화되고, 시스템의 근이 서로 다른 경우로 한정을 하면 n 차 시스템이 가질 수 있는 근의 종류는 1차 방정식의 근인 실근과 2차 방정식의 근인 서로 다른 두 실근과 복소근으로 3개이다. 3종류 근을 이동시키는 방법은 ①실근 \Rightarrow 실근, ②서로 다른 두 실근 \Rightarrow 서로 다른 두 실근, ③한쌍의 복소근 \Rightarrow 한쌍의 복소근, ④한쌍의 복소근 \Rightarrow 서로 다른 두 실근 그리고 ⑤서로 다른 두 실근 \Rightarrow 한쌍의 복소근으로 다섯 종류이다. 방법 ①과 ②의 실근은 Solheim이 제시한 방법[1]을 적용하면 원하는 실근으로 이동되고, 방법 ③과 ④의 복소근은 [10-12]에서 제시한 방법으로 원하는 복소근과 서로 다른 두 실근으로 이동된다.

이 논문은 근의 이동방법 중 ⑤번째인 서로 다른 두 실근을 복소근으로 이동시키는 방법에 관한 것으로 근과 가중행렬의 관계식과 서로 다른 두 실근의 이동범위를 좌표 평면에 표시하는 방법을 제시하고 SISO 시스템에 이 방법을 적용하여 본다. 먼저 II 장에서는 LQ 제어기의 기본개념과 상태피드백 이득의 특성을 알아본다. 그리고 근과 가중행렬의 관계식은 III 장에서 유도하고, IV 장에서는 근의 이동범위를 설명한다. V장의 예제에서 제시한 방법을 적용해보고, VI 장에 결론을 기술한다.

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2007. 12. 26, 채택확정 : 2009. 1. 20.

박민호 : 청양대학 전기전자과(minhinf@gmail.com)

II. LQ 제어기

선형 시불변 시스템의 상태방정식은

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= -Kx \end{aligned} \quad (1)$$

로 표현된다. A, B는 각각 $n \times n$, $n \times m$ 상수 행렬이고, 상태변수(state variable) x 는 $n \times 1$ 벡터이고, 제어입력(control input) u 는 $m \times 1$ 벡터이다. 시스템의 상태변수는 제어 가능하며, 시스템의 근은 0이 아닌 서로 다른 실근이라고 가정하면 n 개의 서로 다른 실근은

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (2)$$

와 같이 표현한다. 그리고 제어법칙 K 는 $n \times m$ 행렬로 최적제어 이론에 의해

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3)$$

의 성능지수를 최소화한다. 여기서 상태가중행렬 Q 는 $n \times n$ 인 양의 반한정대칭행렬, 제어가중행렬 R 은 $m \times m$ 인 양의 한정대칭행렬이다.

제한조건인 상태방정식을 만족하면서 (3)을 최소화하는 제어법칙은 제한조건 없이 Lagrange 곱수(multiplier)로 표현되는 성능지수를 최소화하는 것과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -V \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, V = BR^{-1}B^T \quad (4)$$

로 표현되는 Hamiltonian 시스템에서 유도되는 Lagrange 곱수 λ 는 Riccati 방정식

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (5)$$

의 유일한 해인 변수 P 에 의해

$$\lambda = Px \quad (6)$$

으로 표현되고 제어법칙은

$$u = -R^{-1}B^T \lambda = -R^{-1}B^T P x = -Kx \quad (7)$$

로 표현된다.

LQ 제어기의 설계 변수 중에서 제어가중행렬은 고정하고, 그림 1과 같이 상태가중행렬 Q_1 으로 근 λ_1 을 S_1 으로

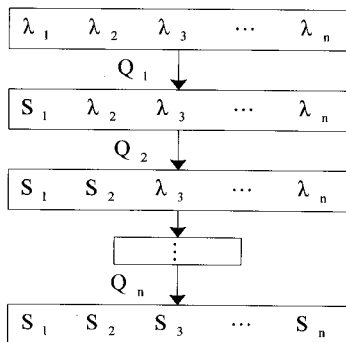


그림 1. 상태가중행렬과 근의 이동.

Fig. 1. State weighting matrix and pole shifting.

이동시킨 후, Q_2 로는 다른 근 λ_2 을 S_2 로 이동시킨다. 이와 같은 방식으로 상태가중행렬만 이용하여 n 개의 근을 순차적으로 원하는 근으로 이동시키면 최종적으로 얻어지는 상태가중행렬 Q 와 제어 법칙 K 는

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i, K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (8)$$

과 같이 각 단계의 상태가중행렬 Q_i 와 제어 법칙 K_i 의 합과 같다[1,13].

III. 근과 가중행렬의 관계식

$$|sI - F| = \begin{vmatrix} sI - A & V \\ Q & sI + A^T \end{vmatrix} \quad (9)$$

는 Hamiltonian 시스템의 특성방정식으로 상태변수가 n 개이면 Hamiltonian 시스템의 특성방정식은 허수축에 대칭인 n 쌍 즉 $2n$ 개의 근을 가진다. 그리고 상태가중행렬과 근의 관계식은 LQ 제어를 포함한 시스템의 근이 Hamiltonian 시스템의 좌반근과 같다는 조건에서 얻어진다[14].

행렬 A 는 시스템에 따라 다양한 형태를 가지지만

$$x = Tz \quad (10)$$

의 변환행렬 T 에 의해 항상

$$A = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

과 같은 형태의 대각행렬(diagonal matrix) Λ 로 변환된다. 그리고 상태방정식, 성능지수, Hamiltonian 시스템도 각각

$$\dot{z} = \Lambda z + \tilde{B}u, \quad (12)$$

$$J = \int_0^{\infty} (z^T \tilde{Q}z + u^T R u) dt, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & -\tilde{V} \\ -\tilde{Q} & -\Lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (14)$$

와 같이 변환된다. 여기서 기호 ($\tilde{\quad}$)는 대각행렬화된 시스템과 변수를 나타내고, $\tilde{B} = T^{-1}B$ 이고

$$\tilde{V} = \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}^T = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \dots & \tilde{v}_{1n} \\ \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} & \dots & \tilde{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{v}_{1n} & \tilde{v}_{2n} & \dots & \tilde{v}_{nn} \end{bmatrix} \quad (15)$$

이다.

n 차 시스템의 특성방정식은 j 개의 2차 방정식과 $(n-2j)$ 개의 1차 방정식의 연속적인 곱의 형식으로 근사화 된다. j 개의 2차 방정식의 근 중에서 이동할 임의의 한 쌍의 두 실근은 변환행렬 T 에 의해 항상 Λ 의 첫 번째와 두 번째에 위치시킬 수 있다. 편의상 이 두 실근을 $\lambda_{r1} = \lambda_1$, $\lambda_{r2} = \lambda_2$ 로 가정하여 설명한다. 그리고 이 두 실근과 관계된 상태가중행렬 \tilde{Q} 는

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

으로 정의한다. 여기서 $\tilde{q}_{11}, \tilde{q}_{12}, \tilde{q}_{22}$ 는

$$\begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \cos^2 \theta & \rho \cos \theta \sin \theta \\ \rho \cos \theta \sin \theta & \rho \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (17)$$

이다. 여기서 θ 의 범위는 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다. \tilde{Q} 를 이용하여 Hamiltonian 시스템의 특성방정식을 나타내면

$$|sI - \tilde{F}| = \begin{vmatrix} s - \lambda_{r1} & 0 & \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} \\ 0 & s - \lambda_{r2} & \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} \\ \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & s + \lambda_{r1} & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & 0 & s + \lambda_{r2} \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$\times \prod_{i=3}^n (s + \lambda_i)(s - \lambda_i)$$

이 된다. 상태가중행렬 \tilde{Q} 는 n개의 근 중에서 두 개의 실근 $\lambda_{r1}, \lambda_{r2}$ 만 페루프 복소근 $\gamma \pm j\delta$ ($\gamma \neq 0, \delta \neq 0$)으로 이동시킨다. 이동된 복소근($\gamma \pm j\delta$)은 특성방정식(18)의 근이 되고, 이 조건에서 근과 가중행렬의 관계식을 유도하면

$$\begin{vmatrix} s - \lambda_{r1} & 0 & \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} \\ 0 & s - \lambda_{r2} & \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} \\ \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & s + \lambda_{r1} & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & 0 & s + \lambda_{r2} \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$= s^4 - 2(\gamma^2 - \delta^2)s^2 + (\gamma^2 + \delta^2)^2$$

가 된다. (17)의 상태가중행렬의 조건을 적용하여 (19)를 정리하면

$$\begin{aligned} e_{r11}\tilde{q}_{11} + e_{r12}\tilde{q}_{12} + e_{r13}\tilde{q}_{22} &= e_{r14} \\ e_{r21}\tilde{q}_{11} + e_{r22}\tilde{q}_{12} + e_{r23}\tilde{q}_{22} &= e_{r24} \end{aligned} \quad (20)$$

의 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} e_{r11} &= \tilde{v}_{11}, e_{r12} = 2\tilde{v}_{12}, e_{r13} = \tilde{v}_{22}, \\ e_{r14} &= 2(\gamma^2 - \delta^2) - \lambda_{r1}^2 - \lambda_{r2}^2, \\ e_{r21} &= \lambda_{r2}^2 \tilde{v}_{11}, e_{r22} = 2\lambda_{r1}\lambda_{r2}\tilde{v}_{12}, \\ e_{r23} &= \lambda_{r1}^2 \tilde{v}_{22}, e_{r24} = (\gamma^2 + \delta^2)^2 - (\lambda_{r1}\lambda_{r2})^2 \end{aligned}$$

이다. 이 식을 정리하여 근과 가중행렬의 관계식을 ρ 와 θ 로 표현하면 다음과 같다.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-e_{r2} \pm \sqrt{e_{r2}^2 - 4e_{r1}e_{r3}}}{2e_{r3}} \right) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{e_{r14}}{\cos^2 \theta e_{r11} + \cos \theta \sin \theta e_{r12} + \sin^2 \theta e_{r13}} \\ &= \frac{e_{r24}}{\cos^2 \theta e_{r21} + \cos \theta \sin \theta e_{r22} + \sin^2 \theta e_{r23}} \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 $e_{r1} = e_{r14} e_{r21} - e_{r24} e_{r11}$,
 $e_{r2} = e_{r14} e_{r22} - e_{r24} e_{r12}$,
 $e_{r3} = e_{r14} e_{r23} - e_{r24} e_{r13}$,
 이다.

IV. 근의 이동범위 (Pole's moving-range)

상태가중행렬 Q에 의해 서로 다른 두 실근이 이동할 수 있는 페루프 복소근의 영역을 좌표평면에 그린 것이 근의 이동범위이다. 이 범위는 근과 가중행렬의 관계식으로부터 계산되는 상태가중행렬이 양의 반한정행렬이 될 조건을 만족하는 페루프 근의 영역이 된다.

(16)의 상태가중행렬이 양의 반한정행렬이 될 조건은 (17)의 행렬이 양의 반한정행렬이 될 조건과 같다[15]. 각을 표시하는 행렬 (17)의 θ 가 실수라는 조건과 행렬 (17)의 determinant가 0이기 때문에 첫 번째 피벗(pivot)인 $\rho \cos^2 \theta$ 가 양수가 되는 조건

$$\rho > 0 \quad (23)$$

이면 상태가중행렬 \tilde{Q} 는 양의 반한정행렬이 된다[15].

근이 0이 아니라서 (21)의 분모는 0이 되지 않는다. 그래서 θ 가 실수가 될 조건은 (21)의 분자의 근호안의 값이 항상 양수가 되는

$$e_{r2}^2 - 4e_{r1}e_{r3} \geq 0 \quad (24)$$

이다. 그리고 근이 서로 달라 (22)의 분모가 양의 값을 가지기 때문에 ρ 가 양수가 될 조건은

$$\begin{aligned} \gamma^2 - \delta^2 &> \frac{1}{2}(\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2) \\ \gamma^2 + \delta^2 &> |\lambda_{r1}\lambda_{r2}| \end{aligned} \quad (25)$$

이다.

ρ 에 의해 그려지는 근의 이동범위는 (25)의 쌍곡선 $\gamma^2 - \delta^2 > \frac{1}{2}(\lambda_{r1}^2 + \lambda_{r2}^2)$ 의 안쪽과 원 $\gamma^2 + \delta^2 > |\lambda_{r1}\lambda_{r2}|$ 의 바깥쪽의 공통 영역으로 그림 2와 같다.

s-평면에 그려지는 근의 이동범위는 (24)과 (25)의 공통영역이다. 구한 근의 이동범위와 설계 조건의 공통범위는 최적 제어 특성을 갖는 원하는 페루프 근의 범위가 된다. 시스템의 여러 근들은 지배근과 일반근으로 분류되며, 각각의

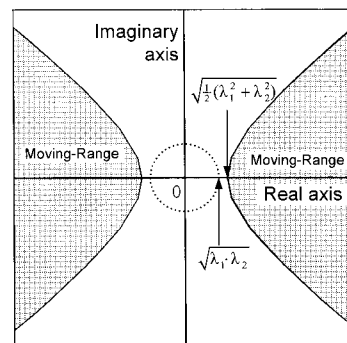


그림 2. ρ 에 의한 근의 이동범위.
 Fig. 2. Pole's Moving-Range by ρ .

근들은 개별적으로 원하는 페루프 근을 시각적으로 쉽게 선택 할 수 있도록 근의 이동범위를 s-평면에 표현하는 것이 장점이다.

V. 예제

제시한 방법의 보다 폭 넓은 활용법을 설명하기 위해 기존의 시행착오 방법으로 설계된 LQ 제어를 가진 시스템을 대상으로 선택하였다. 새로운 LQ 제어를 제시한 방법으로 설계하여 설계 조건의 영역에 있지 않은 시스템의 근을 이동시켜 그 타당성을 확인한다.

사용할 3차 SISO 시스템의 상태방정식은

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

이며, 설계 조건은 오버슈트(overshoot)가 30%를 초과하지 않고, 정상상태에 도달하는 시간이 6.0초 이내라고 가정한다. 기존의 방법으로 설계한 가중행렬을

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1 \quad (27)$$

이라고 하면 LQ 제어기의 제어법칙은

$$K_0 = [12.0828 \quad 10.0496 \quad 2.0083] \quad (28)$$

이 된다. 이 제어법칙은 시스템 A의 근 1, -2, -3을 각각 -1.0210, -1.9831, -3.0041으로 이동시킨다.

그림 4에서 제어기 K₀에 대한 모의실험 결과를 보면 응답이 정상상태에 도달하는데 걸리는 시간이 7.6초이고 오버슈트가 21.9% 발생한다. 이렇게 설계 사양을 만족하지 못하는 이유는 K₀를 포함한 시스템 A₁(=A₀-BK₀)의 페루프 3개 근 -1.0210, -1.9831, -3.0041 중에서 2개가 설계 영역에 있지 않기 때문이다.

근중에서 허수축에 가까운 근 -1.0210과 -1.9831을 지배근으로, 가장 멀리 떨어진 -3.0041은 일반근으로 가정하고, 지배근은 2차 방정식의 근으로, 일반근은 1차 방정식의 근으로 설정한다. 이미 설계된 LQ 제어를 사용하기 위해서 제어가중행렬은 그대로 사용하고 상태가중행렬만 설계하여 근을 이동시킨다. 먼저 A₁의 일반근인 실근(-3.0041)을 이동시키는 상태가중행렬을 계산하고, 다음으로 지배근인 두 실근(-1.0210, -1.9831)을 페루프 복소근으로 이동시키는 상태가중행렬을 계산하여 LQ 제어를 설계한다.

1. 1차 방정식의 실근(-3.0041) 이동

시스템 A₁은 서로 다른 실근을 가지기 때문에 (10)의 변환행렬 T₁₁에 의해 행렬 (11)의 λ₁ = -3.0041이 되는 대각행렬로 변환된다. Solheim이 유도한 관계식에서 실근(-3.0041)의 이동범위를 계산하면

$$r_s \leq -3.0041 \quad (29)$$

이 된다. 이 영역과 설계사양의 공통영역에서 페루프 근으로 -4.0을 선택하면 상태가중행렬은

$$\tilde{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 0.3126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

으로 계산되고, 제어법칙은

$$K_{11} = [14.0992 \quad 13.0413 \quad 3.0041] \quad (31)$$

이 된다.

2. 2차 방정식의 두 실근(-1.0210, -1.9831) 이동

서로 다른 근을 가지는 A₂(=A₁-BK₁₁)는 (10)의 변환행렬 T₁₂에 의해 λ_{r1} = -1.0210, λ_{r2} = -1.9831가 되는 대각행렬로 변환된다. 그리고 λ_{r1}, λ_{r2} 값을 근의 이동범위는 (24)와 (25)에 대입하여 얻어지는 근의 이동범위는 그림 3이다. 이 범위에서 원하는 페루프의 복소근을 -3.0 ± j1.0로 선택하여 (21)와 (22)에 대입하면 θ, ρ, Q̃₁₂이 계산되며 그 값은 표 1과 같다.

3. 설계된 LQ 제어기

설계조건을 만족하는 범위에서 선택된 근으로 이동시키는 상태가중행렬 Q₁은 앞에서 계산한 상태가중행렬의 합으로 표현되며 그 값은

$$Q_1 = Q_0 + \sum_{i=1}^2 (T_{1i}^{-T} \tilde{Q}_{1i} T_{1i}^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} 1564.000 & -94.224 & -115.940 \\ -94.224 & 75.120 & 32.538 \\ -115.940 & 32.538 & 18.000 \end{bmatrix} \quad (32)$$

또는

$$= \begin{bmatrix} 1564.000 & 946.283 & 144.187 \\ 946.283 & 595.374 & 97.569 \\ 144.187 & 97.569 & 18.000 \end{bmatrix}$$

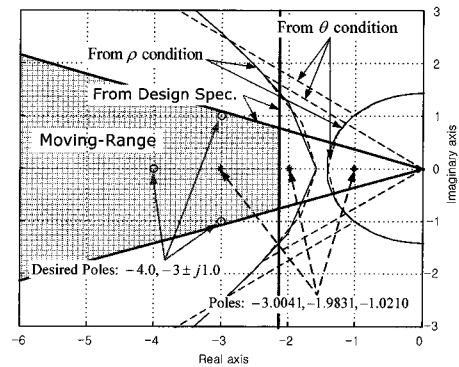


그림 3. 근의 이동범위.

Fig. 3. Pole's moving-range.

표 1. 상태가중행렬 Q̃₁₂.

Table 1. State weighting matrix Q̃₁₂.

	θ	ρ	Q̃ ₁₂
1	-18.2336	546.3441	$\begin{bmatrix} 492.8564 & -162.3631 & 0 \\ -162.3631 & 53.4877 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2	-7.5688	118.3085	$\begin{bmatrix} 116.2559 & -15.4473 & 0 \\ -15.4473 & 2.0525 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

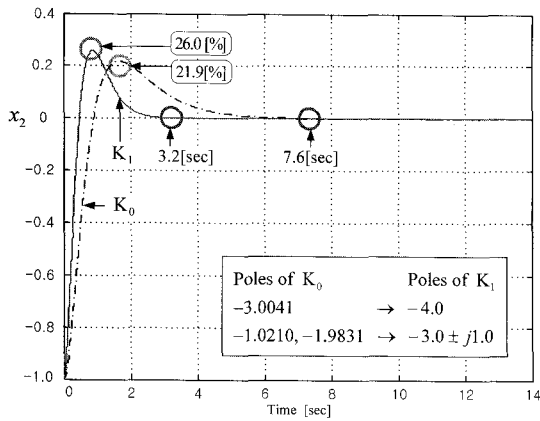


그림 4. 모의실험.

Fig. 4. Simulation.

가 된다. 상태가중행렬이 서로 달라도 동일한 제어법칙을 가지기 때문에 (32)의 상태가중행렬에서 얻어지는 제어법칙은

$$K_1 = [46.0 \ 33.0 \ 6.0] \quad (33)$$

이 된다[16].

4. 모의실험

그림 4는 초기조건이 $x(0) = [0 \ -1 \ 0]$ 일 때 상태피드백 이득 K_0 와 K_1 에 대한 모의실험 결과이다. 상태피드백 이득 K_0 를 적용한 모의실험의 응답특성은 오버슈트가 21.9%이고 정상상태 도달시간은 7.6초이다. 반면에 상태피드백 이득 K_1 에 대한 모의실험의 응답특성은 오버슈트가 26.0%이고 정상상태 도달 시간은 3.2초이다. 제안한 방법으로 설계된 LQ 제어기 K_1 는 기존의 제어기 K_0 보다 응답 특성이 개선되었다.

VI. 결론

이 논문은 Hamiltonian 시스템의 특성방정식을 이용하여 시스템의 서로 다른 두 실근을 원하는 페루프 복소근으로 이동시키는 LQ 제어기 설계 방법에 관한 것이다. 근과 가중행렬의 관계식은 특별한 형태의 상태가중행렬을 포함한 Hamiltonian 시스템의 특성방정식에서 유도하고, 유도한 식에서 계산된 상태가중행렬에 의해 서로 다른 두 실근이 이동할 수 있는 페루프 복소근의 이동범위를 s-평면에 표시한다. 이 근의 이동범위에서 원하는 페루프 복소근을 선택하여 상태가중행렬을 계산하는 방법으로 LQ 제어기를 설계한다.

이 결과가 갖는 의미는 첫 번째 기존의 연구[1,7-12]에서 다루지 않은 서로 다른 두 실근을 페루프의 한 쌍의 복소근으로 이동시키는 방법을 제시하여 기존 방법의 개념을 확대하였고, 두 번째 근의 이동범위를 s-평면에 표시하여 페루프 근을 보다 쉽게 선택 할 수 있는 방법을 제시한 것이다.

기존의 연구[1,11,12]와 함께 적용하면 서로 다른 근을 갖는 시스템의 모든 근(하나의 실근, 서로 다른 두 실근, 복소근)을 원하는 페루프 근(하나의 실근, 서로 다른 두 실

근, 복소근)으로 이동시키는 극배치 기능을 가진 LQ 제어기를 설계할 수 있다.

이 논문은 시스템이 서로 다른 근을 가지는 경우에만 적용할 수 있다. 일반적으로 시스템은 같은 근이 2개 이상 있을 수 있고, 이런 경우 행렬 A를 대각행렬로 변환할 때 조단블럭이 포함되어 제시한 방법을 적용할 수 없다. 그래서 시스템의 중복 근을 이동시킬 LQ 제어기 설계 방법에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] O. A. Solheim, "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues," *Int. J. Control*, vol. 15, no. 1, pp. 143-160, 1972.
- [2] J. Medanic, H. S. Tharp, and W. R. Perkins, "Pole placement by performance criterion modification," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 5, pp. 469-472, 1988.
- [3] Y. Ochi and K. Kanai, "A new way of pole placement in LQR and its application to flight control," *In Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Monterey, CA, pp. 1295-1301, 1993.
- [4] Y. Ochi and K. Kanai, "Pole placement in optimal regulator by continuous pole-shifting," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 6, pp. 1253-1258, 1995.
- [5] K. Sugimoto, "A polynomial matrix approach to the ILQ regulator design," *Proc. IEEE CDC, Kobe, japan*, pp. 4164-4169, 1996.
- [6] K. Sugimoto, "Partial pole placement by LQ regulators: An inverse problem approach," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 5, pp. 706-708, 1998.
- [7] T. Fujinaka and H. Shibata, "Admissible region for pole positioning with optimal regulator," *Proc. IEEE CDC, Kobe, japan*, pp. 3631-3635, 1996.
- [8] T. Fujinaka and S. Omatu, "Pole placement using optimal regulators," *T.IEE japan*, vol. 121-C, no. 1, pp. 240-245, 2001.
- [9] T. Fujinaka, G. Ghen, H. Shibata, and S. Omatu, "Pole shifting with modal dissipative control," *Proceedings of the IEEE International Conferences on Control Applications*, pp. 932-937, 2002.
- [10] 박민호, 홍석교, "LQR 제어기의 과도 상태 개선 방법에 관한 연구," 대한전기학회 하계학술대회 논문집, pp. 2239-2241, 2004.
- [11] 박민호, 홍석교, 이상혁, "근의 이동범위를 고려한 LQR 제어기 설계," 제어·자동화·시스템공학 논문집, 제11권 제10호, pp. 864-869, 2005.
- [12] 박민호, 박문수, 박덕기, 홍석교, 이상혁, "극배치 특성을 갖는 LQR 제어기 설계," 제어·자동화·시스템공학 논문집, 제13권 제6호, pp. 574-580, 2007.
- [13] M. Saif, "Optimal modal controller design by entire

eigenstructure assignment," *IEEE Proc.*, vol. 136, no. 6, pp. 341-344, 1989.

- [14] J. B. Burl, *Linear Optimal Control: H_2 and H_∞ Methods*, Addison Wesley Longman, 1999.
- [15] G. Strang, *Linear Algebra and its applications*, 3rd Ed., Harcourt Brace & Company, 1988.
- [16] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, *Optimal Control*, Prentice-Hall, 1989.



박민호

1991년 아주대학교 제어공학과 졸업.
 1993년 동 대학원 제어계측공학과 석사.
 2007년 8월 동 대학원 전자공학과 박사.
 2008년~현재 청양대학 전기전자과 전임강사.
 관심분야는 최적제어, Robust Control.