

인공위성 궤도결정을 위한 Unscented 변환 기반의 배치필터와 다른 배치필터들과의 성능비교

박은서, 박상영[†], 최규홍
연세대학교 천문우주학과 우주비행계어 연구실

Performance Comparison of the Batch Filter Based on the Unscented Transformation and Other Batch Filters for Satellite Orbit Determination

Eunseo Park, Sang-Young Park[†], and Kyu-Hong Choi
Astrodynamics & Control Lab., Department of Astronomy, Yonsei University, Seoul 120-749 Korea
E-mail: spark@galaxy.yonsei.ac.kr

(Received February 3, 2009; Accepted February 10, 2009)

요 약

이 연구의 목적은 선형화 과정이 필요 없는 Unscented 변환(Unscented Transformation)을 사용한 후처리 배치 알고리즘을 소개하고, 기존 최소자승법을 이용한 후처리 배치 필터와 반복 UKF 스무더(Iterative Unscented Kalman Filter Smoother)들과 비교하여 추정방법간의 성능비교와 장단점을 분석하는 것이다. 연구에 사용된 위성 궤도 결정시스템의 동역학 방정식은 지구의 비대칭 중력장의 영향, 대기항력, 태양복사압 및 달과 태양의 중력으로 구성되었다. 관측 데이터로는 지상국으로부터 측정된 위성의 거리, 방위각과 고도각이 사용되었다. 특히, 비선형성의 영향에 대한 추정 방법 간의 성능과 장단점의 비교를 위해 위성의 초기 궤도오차별, 관측데이터의 관측 잡음의 크기별 테스트를 수행하였다. 이 연구를 통해 소개된, 선형화 과정이 필요 없는 Unscented 변환 기반의 후처리 배치 필터는, 비선형성의 특징이 증대된 상황에서 기존의 후처리 배치 알고리즘들에 비해 초기 궤도오차별, 관측데이터 잡음의 크기별 테스트 시 평균적으로 각각 약 5%와 12%정도의 정밀도 향상결과를 보였다. 또한, 기존 최소자승법을 이용한 후처리 배치필터가 발산한 상황에서도, 수렴성을 확보하는 안정적인 결과를 얻을 수 있었다. 그러므로 Unscented 변환 기반의 후처리 배치필터가 인공위성 궤도 결정 시스템에 효율적으로 사용할 수 있음을 제시하였다.

Abstract

The main purpose of the current research is to introduce the alternative algorithm of the non-recursive batch filter based on the unscented transformation in which the linearization process is unnecessary. The presented algorithm is applied to the orbit determination of a low earth orbiting satellite and compared its results with those of the well-known Bayesian batch least squares estimation and the iterative UKF smoother (IUKS). The system dynamic equations consist of the Earth's geo-potential, the atmospheric drag, solar radiation pressure and the lunar/solar gravitational perturbations. The range, azimuth and elevation angles of the satellite measured from

[†]corresponding author

ground stations are used for orbit determination. The characteristics of the non-recursive unscented batch filter are analyzed for various aspects, including accuracy of the determined orbit, sensitivity to the initial uncertainty, measurement noise and stability performance in a realistic dynamic system and measurement model. As a result, under large non-linear conditions, the presented non-recursive batch filter yields more accurate results than the other batch filters about 5% for initial uncertainty test and 12% for measurement noise test. Moreover, the presented filter exhibits better convergence reliability than the Bayesian least squares. Hence, it is concluded that the non-recursive batch filter based on the unscented transformation is effectively applicable for highly nonlinear batch estimation problems.

Keywords: satellite orbit determination, unscented transformation, batch filter

1. 서 론

비선형 추정 문제는 비선형적 확률 시스템의 상태변수를 추정하는 것으로 정의 된다. 대표적인 비선형 추정 문제인 인공위성의 궤도결정은 요구되는 시각의 인공위성의 위치와 속도 그리고 궤도결정 시스템을 이루는 파라미터들을 추정하는 것을 기본 목적으로 한다. 가장 널리 알려진 해석적 근사법 기반의 추정방법은 최소자승법 기반의 배치 필터와 확장 칼만 필터(Extended Kalman Filter, EKF)이다. 이 대표적인 두 필터들은 시스템을 이루는 비선형 함수들을 해석적인 테일러급수 전개식의 1차항으로 선형화하여 근사한다. 하지만 이러한 선형근사의 영향으로 상태변수의 추정 및 공분산의 예측이나 갱신에 관련하여 대상 시스템의 비선형성이 심한 경우 추정과정의 불안정성 혹은 추정결과 부정확성이 증대되는 단점이 있다(Gelb 1974, Julier et al. 1995, Wan & van der Merwe 2001). 궤도 결정문제에서 가장한 초기궤도가 실궤도와 차이가 클 경우, 취득된 관측 값에 포함된 잡음성분이 클 경우 그리고 취득된 관측 값의 수가 부족하고 관측 가능한 시간이 넓게 떨어져 분포하는 경우 비선형성이 증가한다(Lee & Alfriend 2003). 기존 해석적 선형 근사의 한계를 극복하는 대안으로 확률적 근사방법인 Unscented 변환(Unscented Transformation, UT)을 기반으로 기존의 EKF를 개선한 Unscented 칼만 필터(Unscented Kalman Filter, UKF)가 고안되었다(Julier et al. 1995, Julier & Uhlmann 1997). UKF의 핵심인 확률적 근사방법인 UT는 주어진 상태 변수의 확률적 정보인 평균값과 공분산 값을 기준으로 평균값 주변의 분산점인 시그마 포인트(sigma point)를 추출(sampling)하고 비선형 방정식을 그대로 이용하여 다음 시각으로의 상태변수의 확률분포 즉 확률밀도 함수를 표현하는 방법이다. 이러한 분산점 표본추출 기반의 비선형 변환(UT)을 이용한 필터 방법은 달리 시그마 포인트 추정 법(sigma point filtering)이라 불린다(van der Merwe et al. 2004). UKF는 기존 EKF에 대해 다음과 같은 장점을 지니고 있다. (1) 비선형 방정식의 선형 근사과정 없이 EKF에 비해 비선형성에 대한 대응이 좋고 더욱 안정적인 수렴성과 정확한 추정 값을 얻을 수 있다. (2) 선형화 과정이 필요한 복잡한 계산(상태변수에 대한 비선형 방정식의 편미분)이 없으므로 손쉬운 구성이 가능하다. (3) 선형 근사는 미분 가능한 함수에만 적용되나 UKF는 미분 불가능한 불연속 함수형태의 시스템에도 적용이 가능하다(Wan & van der Merwe 2001). 이러한 UKF의 상대적으로 뛰어난 성능

은 탄도미사일 추적(Farina et al. 2002), 인공위성의 실시간 궤도결정(Lee & Alfriend 2007) 및 실시간 자세결정(Crassidis & Markley 2003) 등 다양한 분야의 연구에서 검증되고 있다. 하지만, 이러한 UT 기반의 추정방법에 대한 연구는 주로 실시간 연속 필터 부분에서 다루어졌다. UT의 기존 후처리 배치필터에 응용은 이후 Park et al.(2007)에 의해 시도되었으며 기존 최소자승법 기반의 배치 필터 알고리즘의 약점을 보완하기 위한 UT 기반의 배치필터 구성에 대한 내용을 다루었다. 이 연구에서는 Park et al.(2007)이 구성한 UT를 후처리 배치필터의 성능을 검증하기 위해, 기존 후처리 필터들과 비교하는 것을 주목적으로 한다. 구체적인 연구내용은 다음과 같다. 첫 번째로는 분산점 표본 추출(sigma point sampling)기반의 UT를 이용한 후처리 배치 필터(Park et al. 2007)를 소개하고, 두 번째로는 궤도결정 시스템에 대한 다양한 수치 실험을 통해 기존의 최소자승법 기반의 필터와 UKF 기반의 반복적 완화필터(Iterative UKF Smoother, IUKS)(Crassidis & Junkins 2004, Psiaki 2005, Psiaki & Wada 2007) 그리고 이 연구에서 소개된 UT 기반의 배치 필터의 결과를 정리하여 안정성과 정밀도를 비교 분석하였다.

2. 시스템 모델

이 연구에서 사용된 궤도결정 시스템의 동역학 모델은 코웰 방법(Vallado 1997)을 이용하여 구성하였다. 우선 지구 비대칭 중력장의 수치모델은 JGM(20 × 20)(Schuts et al. 1996)을 사용하였고, 지구 대기항력을 계산하기 위한 밀도 함수는 Harris-Priester모델(Harris & Priester 1962)을 사용하였으며, 태양 복사압에 의한 섭동, 태양과 달의 중력에 의한 섭동을 고려하였다. 동역학 모델의 수치적분을 위해서 적분스텝 고정 룬계-쿠타(Runge-Kutta) 4차 적분기를 사용하였다.

관측 모델은 지구상에 위치한 지상 관측소에서 관측한 인공위성의 거리(Range, ρ)와 고도각(Elevation, el) 그리고 방위각(Azimuth, az)에 대해 관측소 중심좌표계(Topocentric Coordinate)에서 식 (1)과 같이 표현된다(Crassidis & Junkins 2004).

$$\rho = \sqrt{\rho_u^2 + \rho_e^2 + \rho_n^2} \quad az = \tan^{-1} \left(\frac{\rho_e}{\rho_n} \right) \quad el = \tan^{-1} \left(\frac{\rho_u}{\sqrt{\rho_u^2 + \rho_e^2}} \right) \quad (1)$$

여기서, ρ_u, ρ_e, ρ_n 는 각각 지상관측소 중심좌표계의 up, east, north 방향의 성분이다.

3. 추정이론

3.1 최소자승법 기반의 후처리 배치필터

시스템의 비선형 동역학, 관측 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t) + \nu_k \quad (3)$$

여기서, \mathbf{x}_k 는 상태 벡터, \mathbf{y}_k 는 관측 벡터이며 \mathbf{u}_k 는 시스템 잡음 벡터 그리고 ν_k 는 덧셈형태의 관측 잡음 벡터이다. 시스템 잡음 벡터와 관측 잡음벡터는 각각 공분산이 $\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k$ 이며, 평균이 0인 가우시안 분포를 따르고 서로 비 상관관계다.

후처리 최소자승 추정 법은 초기 시각으로부터 일정 기간 동안 확보된 실 관측 값 묶음을 이용하므로, 식 (3)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{y}}_k \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_N \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_k, t) + \tilde{\nu}_k \quad (4)$$

여기서, k 는 선택된 기점 시각 ($t_1 \leq t_k \leq t_N$)이며, N 은 관측 기점의 개수, \sim (tilde) 부호는 전체 묶음을 의미한다.

일반적인 위성 궤도결정 시스템은 비선형 시스템이고 최소 자승법을 이용한 추정방법의 완전한 닫힌 해를 구하기가 매우 복잡하거나 불가능하므로(Montenbruck & Gill 2000), 설정된 초기 궤도 값(\mathbf{x}_k)과와 미지의 실 궤도의 차이 값($\Delta\mathbf{x}_k$)이 매우 작다고 가정하여, 식 (2)의 동역학 방정식과 식 (4)의 관측방정식은 다음과 같이 선형화 된다(Tapley et al. 2004).

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_k \Delta\mathbf{x}_k \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \tilde{\mathbf{H}}_k \Delta\mathbf{x}_k + \tilde{\nu}_k \quad (6)$$

여기서, \mathbf{F}_k 와 $\tilde{\mathbf{H}}_k$ 는 각각 추정 변수에 대한 비선형 방정식 \mathbf{f} 와 $\tilde{\mathbf{h}}$ 의 편미분이다.

식 (5,6)을 이용하여 기준 시각(t_k)에서의 상태변수의 차이($\Delta\mathbf{x}_k$)의 추정 값($\Delta\tilde{\mathbf{x}}_k$)은 다음과 같이 정리되며, 설정된 초기 궤도 값(\mathbf{x}_k)을 반복적으로 수정하게 된다(Tapley et al. 2004).

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}_k = (\tilde{\mathbf{H}}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{-1})^{-1} (\tilde{\mathbf{H}}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \Delta\tilde{\mathbf{y}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{-1} \Delta\tilde{\mathbf{x}}_k) \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\tilde{\mathbf{H}}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_k + \tilde{\mathbf{P}}_k^{-1})^{-1} \quad (8)$$

여기서, $\Delta\tilde{\mathbf{x}}_k$, $\Delta\tilde{\mathbf{P}}_k$ 는 각각 사전 추정 값과 공분산이며, $\Delta\hat{\mathbf{x}}_k$, $\Delta\hat{\mathbf{P}}_k$ 는 추정된 추정 값과 공분산이다. $\Delta\tilde{\mathbf{y}}_k$ 는 관측 잔차이며 $\tilde{\mathbf{R}}_k$ 은 관측 잡음의 공분산 값이다. 아래첨자 k 는 모든 관측 값이 기준 시각(t_k)을 기준으로 계산됐음을 나타내며, 식 (7,8)의 우변의 행렬식은 각각 다음과 같이 계산된다.

$$\tilde{\mathbf{H}}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_k = \sum_{i=1}^N (\mathbf{H}_i \Phi_{i,k})^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \Phi_{i,k}), \quad \tilde{\mathbf{H}}_k^T \tilde{\mathbf{R}}_k^{-1} \Delta\tilde{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^N (\mathbf{H}_i \Phi_{i,k})^T \mathbf{R}_i^{-1} \Delta\mathbf{y}_i \quad (9)$$

여기서, \mathbf{H}_i 는 시각 t_i 에서의 상태변수에 대한 비선형방정식(\mathbf{h})에 대한 편미분, $\Phi_{i,k}$ 는 시간 t_k 에서 t_i 로의 상태전이 행렬, $\Delta\mathbf{y}_k$ 와 \mathbf{R}_i 는 각각 시각 t_i 에서의 관측 잔차와 관측 잡음의 공분산 값이다.

3.2 Unscented 변환 기반의 후처리 배치필터

Unscented 변환(Unscented Transformation, UT)의 가장 큰 특징은 테일러 1차 급수를 이용한 해석적 근사를 사용하지 않고 시스템모델을 이루는 비선형 방정식을 그대로 이용하여 필터를 구성하는 것이다(Wan & van der Merwe 2001). UT 기반의 후처리 배치필터의 핵심은 기존의 최소자승법 기반의 배치 필터의 선형화 과정에 해당하는 식 (5,6)의 \mathbf{F}_k 와 $\tilde{\mathbf{H}}_k$ 를 UT로 대체하는 것이다. 시스템 방정식인 식 (2,3)을 대상으로 기점시각(t_k)에서의 초기 추정 값과 공분산을 다음과 같이 가정한다.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{initial}, \hat{\mathbf{P}}_k = \hat{\mathbf{P}}_{initial} \quad (10)$$

UT를 위해 주어진 초기 값과 공분산 정보를 이용하여 확률적 분산점인 시그마 포인트($\hat{\chi}_{i,k}$)들은 다음과 같이 선택할 수 있다(Wan & van der Merwe 2001).

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{i,k} &= \hat{\mathbf{x}}_k & i = 0, \\ \hat{\chi}_{i,k} &= \hat{\mathbf{x}}_k + \left(\sqrt{(L + \lambda) \hat{\mathbf{P}}_k} \right)_i & i = 1, \dots, L \\ \hat{\chi}_{i,k} &= \hat{\mathbf{x}}_k - \left(\sqrt{(L + \lambda) \hat{\mathbf{P}}_k} \right)_{i-n} & i = n + 1, \dots, 2L\end{aligned}\quad (11)$$

여기서, L 과 λ 은 각각 상태벡터의 차원과 크기조정 매개변수이다.

UT 기반의 배치필터는 최소자승법 기반의 배치필터와 같이, 일정기간 확보된 관측 값을 모두 이용하여 정해진 기점 시각의 상태변수를 추정하는 것이므로 다른 시각으로의 상태변수와 공분산의 전과과정은 필요하지 않다. 그러므로 정해진 시각의 시그마 포인트와 공분산 값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\chi}_{i,k} = \hat{\chi}_{i,k}, \quad \bar{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k, \quad \bar{\mathbf{P}}_k = \hat{\mathbf{P}}_k, \quad i = 0, \dots, 2L \quad (12)$$

여기서, 기점 시각에 선택된 시그마 포인트 $\bar{\chi}_{i,k}$ ($i = 0, \dots, 2L$)는 각 관측 시각($t_j, j = 1, \dots, N, j \neq k$)의 계산된 관측 값을 생성하기 위해 전과되며, 각 관측 시각의 계산된 관측 값은 식 (13)과 같이 비선형 함수 \mathbf{h} 를 통해 생성된다(Fraser & Potter 1969). 이는 최소자승법 기반의 배치필터식이 관측 값 계산을 위해 식 (9)에서처럼 선형 근사된 상태전이 함수($\Phi_{i,k}$)와 관측방정식($\hat{\mathbf{H}}_k$)을 사용한다는 점과 구별되는 특징이다(Park et al. 2007).

$$\tilde{\gamma}_{i,k} = \tilde{\mathbf{h}}(\bar{\chi}_{i,k}) = \begin{bmatrix} \gamma_{i,1} \\ \gamma_{i,2} \\ \vdots \\ \gamma_{i,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\bar{\chi}_{i,1}, t_1) \\ \mathbf{h}(\bar{\chi}_{i,2}, t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(\bar{\chi}_{i,N}, t_N) \end{bmatrix}, \quad i = 0, \dots, 2L \quad (13)$$

여기서, 오른쪽 식의 $\bar{\chi}_{i,k}(t_j, j = 1, \dots, N, j \neq k)$ 는 각 관측 시각 ($t_j, j = 1, \dots, N, j \neq k$)에 대해 전과된 시그마 포인트를 나타내며, N 은 총 관측 시각의 개수다.

각 관측 시각에 해당하는 관측 값 묶음 ($\bar{\mathbf{Y}}_k$)과 공분산($\bar{\mathbf{P}}_k^{YY}$)은 다음 식을 통해 계산된다.

$$\bar{\mathbf{Y}}_k = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \vdots \\ \bar{y}_N \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{2L} \mathbf{W}_i^{(m)} \tilde{\gamma}_{i,k} \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_k^{YY} = \sum_{i=0}^{2L} \mathbf{W}_i^{(c)} [\tilde{\gamma}_{i,k} - \bar{\mathbf{Y}}_k][\tilde{\gamma}_{i,k} - \bar{\mathbf{Y}}_k]^T + \bar{\mathbf{R}}_k \quad (15)$$

여기서, $\bar{\mathbf{R}}_k$ 은 관측 잡음의 공분산 행렬이고, 교차 공분산 행렬($\bar{\mathbf{P}}_k^{xY}$)은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{P}}_k^{xY} = \sum_{i=0}^{2L} \mathbf{W}_i^{(c)} [\bar{\chi}_{i,k} - \bar{\mathbf{x}}_k][\tilde{\gamma}_{i,k} - \bar{\mathbf{Y}}_k]^T \quad (16)$$

표 1. 관측데이터 생성과 궤도결정에 사용된 동역학모델 및 모델계수.

	관측데이터 생성	궤도결정
중력장 모델 (차수)	EMG96 (70 × 70)	JGM (20 × 20)
대기밀도모델 (대기항력계수)	Jaccia70 (2.0)	Harris-Priester (2.3)
태양복사압계수	1.0	1.2
태양, 달의 중력(천체력계산)	포함 (DE405)	포함 (해석적 근사방법)
인공위성의 질량 대 면적 비	0.020m ² kg	0.022m ² kg
수치적분방법	Gauss-Jackson	Runge-Kutta 4차

이득(gain) 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}_k = \bar{\mathbf{P}}_k^{xY} \left(\bar{\mathbf{P}}_k^{YY} \right)^{-1} \quad (17)$$

그러므로, 정해진 기점시각 (t_k)에서의 상태변수는 다음 식에 의해 갱신된다.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k \left(\tilde{\mathbf{Y}}_k - \bar{\mathbf{Y}}_k \right) = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k \Delta \tilde{\mathbf{z}}_k \quad (18)$$

여기서, $\Delta \tilde{\mathbf{z}}_k$ 는 확보된 모든 관측 시각에 대한, 실 관측 값($\tilde{\mathbf{Y}}_k$)와 계산된 관측 값($\bar{\mathbf{Y}}_k$) 간의 차이인 관측 잔차 혹은 혁신 행렬이다.

식 (10)에서 초기 값($\hat{\mathbf{x}}_{initial}$)은 식 (18)에 의해 반복적으로 수정 및 갱신되며, 다음과 같이 정리할 수 있다(Park et al. 2007).

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{K}_k^i \left(\tilde{\mathbf{Y}}_k - \bar{\mathbf{Y}}_k^i \right) = \hat{\mathbf{x}}_k^i + \mathbf{K}_k^i \Delta \tilde{\mathbf{z}}_k^i \quad (19)$$

여기서, $\hat{\mathbf{x}}_k^{i+1}$ 는 $i+1$ 번째 반복 때 추정결과이고, $\hat{\mathbf{x}}_k^i$ 와 \mathbf{K}_k^i 는 각각 i 번째 반복 때 추정결과와 이득행렬이며, $\Delta \tilde{\mathbf{z}}_k^i$ 는 확보된 모든 관측 시각에 대한 실 관측 값($\tilde{\mathbf{Y}}_k$)와 i 번째 반복 때 계산된 관측 값($\bar{\mathbf{Y}}_k^i$) 간의 차이인 관측 잔차 행렬이다.

3.3 UKF 기반의 반복적 완화 필터

반복적 완화법은 요구된 시각의 상태를 추정하는데 있어서 그 시각의 과거와 미래에 해당하는 관측 값을 모두 이용하여 추정 오차 혹은 시스템에 가해진 잡음(관측 잡음 등)의 영향을 완화(smoothing)시키는 것을 목적으로 한다. 반복 완화법의 특징은 일정 시간동안 관측 값 묶음을 확보한 상태에서 정해진 기점 시각의 상태추정을 위해 그 기점 시각의 과거와 현재에 취득된 관측 값을 이용하는 것이다. 과거로부터 기점시각으로의 관측 값을 이용한 추정을 전방필터링(forward filtering)이라 하고 미래에서 기점시각으로의 관측 값을 이용한 추정을 후방필터링(backward filtering)이라 한다. 각각의 전-후방 필터링은 전형적인 칼만 필터를 사용하는데, 이점이 앞서 기술한 최소자승법 및 UT 기반의 후처리 배치필터와의 차이점이다.

반복적 완화법의 기본적인 연산과정은, 우선 전방필터링을 통해 과거의 관측 값을 기반으로 기점 시각의 상태($\hat{\mathbf{x}}_k^f$)와 공분산(\mathbf{P}_k^f)을 추정하고, 확보된 관측의 마지막 시각에서부터 기점시각으로 즉, 기점시각 기준 이후 관측 값을 기반으로 시간상 역으로 상태($\hat{\mathbf{x}}_k^b$)와 공분산(\mathbf{P}_k^b)을 계산한다. 기점 시각에 대한 첫 번째 필터의 결과와 두 번째 결과의 결과를 합한 값 즉, 완화(smoothed)된 상태($\hat{\mathbf{x}}_k^s$)와

표 2. 성능 비교를 위한 초기오차 및 관측 잡음 설정.

초기오차 ^a	경우 1	경우 2	경우 3	경우 4	경우 5	경우 6
초기위치 성분 당 오차 [km]	1	5	10	15	20	40
초기속도 성분 당 오차 [m/sec]	1	5	10	15	20	40
관측잡음 ^b	경우 1	경우 2	경우 3	경우 4	경우 5	경우 6
Range 관측잡음 [m]	25	50	100	200	400	800
Elevation 관측잡음 [deg]	0.015	0.030	0.060	0.120	0.240	0.480
Azimuth 관측잡음 [deg]	0.015	0.030	0.060	0.120	0.240	0.480

^a경우 1에서 6까지의 초기오차별 성능비교 시, 관측잡음은 경우 1로 고정

^b경우 1에서 6까지의 관측잡음별 성능비교 시, 초기오차는 경우 1로 고정

공분산(\mathbf{P}_k^s)은 다음과 같이 나타낼 수 있다(Wan & van der Merwe 2001).

$$\hat{\mathbf{x}}_k^s = \mathbf{P}_k^s \left[\left(\mathbf{P}_k^{-b} \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k^{-b} + \left(\mathbf{P}_k^f \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k^f \right] \quad (20)$$

$$\left(\mathbf{P}_k^s \right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_k^f \right)^{-1} + \left(\mathbf{P}_k^{-b} \right)^{-1} \quad (21)$$

요구 시각의 상태 추정 정밀도 향상을 위하여, 수렴 조건을 만족시킬 때까지 같은 구간을 반복적으로 수행하는 반복 필터 알고리즘을 사용한다. 일정 기간 동안의 순차적으로 취득된 관측 값 묶음이 확보된 상태에서 이를 이용하여 특정 시각의 상태를 추정하는 방법을 고정점 완화법(Fixed-Point Smoothing)이라 정의한다. 이 반복적 고정점 완화법은 확보된 관측 값을 모두 이용해서 하나의 특정 상태를 추정한다는 의미에서 전통적인 후처리 배치 필터와 유사한 개념을 갖게 된다(Crassidis & Junkins 2004). 반복적 고정점 완화법의 구체적인 연산과정은, 우선 기점 시각으로부터 정해진 마지막 관측 시각까지 실시간 필터를 사용하여 전방필터링을 수행하고, 마지막 관측 시각의 추정결과를 기준으로 다시 기점시각으로의 후방필터링을 수행한다. 이때 추정된 기점시각에서의 결과를 기준으로 마지막 시각까지 반복적으로 필터링을 수행하여 수렴조건에 만족할 때 까지 기점시각의 상태를 갱신한다. 이 연구에서는 전-후방 필터로 실시간 UKF를 사용한 반복적 고정점 완화법인 반복적 UKF 스무더(Iterative UKF Smoother, IUKS)(Psiaki & Wada 2007)를 선택하였으며 그 이유는 다음과 같다. (1) 실시간 필터를 기반으로 하지만 고정점 완화법을 적용함으로써 IUKS는 배치 필터의 개념으로 분류할 수 있다. (2) 해석적 근사과정이 없는 UKF를 사용하였으므로 소개된 UT 기반의 후처리 배치필터와 상대적인 비교가 가능하다.

4. 수치실험

위성의 궤도결정을 위한 관측 데이터와 궤도결정 결과의 정밀도를 비교하기 위한 실궤도(True Orbit)는 수치 모사에 의해 생성하였다. 수치 모사를 위해 AGI 사의 Satellite Tool Kit에 내장된 수치 전파기인 HPOP(Hight Precision Orbit Propagator)를 사용하였다(Marshall & Patrick 1997, Roh et al. 2007). 이 연구에서는 실궤도 생성과 실제 관측 데이터 모사에 사용되는 동역학 모델(STK의 HPOP) 및 모델 계수와 테스트를 위해 설정한 궤도결정 시스템에 사용되는 동역학 모델과 모델계수들의 값을 달리 설정하였다. 그 이유는 동일한 동역학 모델과 관측 모델을 사용한 모사의 경우, 이론적 섭동 모델과 실제 섭동력과의 차이가 반영되지 않는 문제가 있기 때문이다. 그러므로, 관측 모델

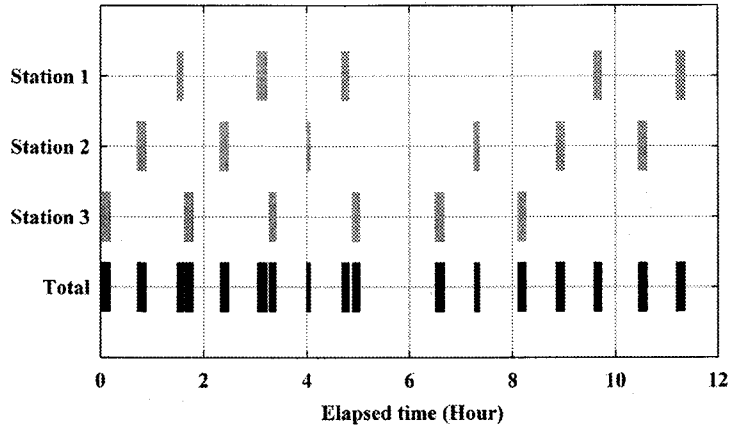


그림 1. 3개 지상 관측소 별 관측가능 시간 분포.

은 동일하게 적용하고, 실 관측데이터를 생성할 때 사용한 섭동모델과 궤도결정을 위해 계산된 관측 데이터를 계산할 때 사용한 섭동모델을 다르게 설정함으로써, 실제 정량적 섭동력들에 대한 이론적 섭동모델의 차이를 반영하고자 했다. 각각 선택된 동역학 모델의 선택사양은 표 1과 같다.

실제 값이라 가정된 궤도의 초기 접촉궤도는, 장반경 6778.14km, 이심률 20^{-5} 궤도 경사각 51.60° , 승교점 적경 25° , 근지점 파라미터 30.05° , 진근점 이각 359.95° 으로 정하였다. 이 초기궤도 값을 기준으로 12시간동안 전파된 위성의 위치와 속도정보를 토대로 지상에 고정된 3개 지상국에서 관측한 위성의 거리, 방위각, 고도각을 계산하고 관측 잡음을 첨가하여 관측 데이터를 모사하였다. 1번 지상 관측소의 위치는 [측지경도 30.23° , 측지위도 86.23° , 측지높이 0.04km], 2번 지상관측소 위치는 [측지경도 -30.00° , 측지위도 -70.00° , 측지높이 0.10km] 그리고 3번 지상관측소의 위치는 [측지경도 36.62° , 측지위도 139.82° , 측지높이 0.05km]이며, 3가지 종류의 관측 데이터인 거리, 방위각 그리고 고도각 생성에 사용된 위성과 지상국간의 기하학적 관계는 관측방정식인 식 (1)을 사용하였다. 또한 3가지 종류의 관측 데이터에 부여되는 관측 잡음은 가우시안 백색잡음 형태로 가정하였다. 관측 데이터 모사는 2000년 1월 1일 12시(UTC)부터 12시간 동안 30초 간격으로 이루어졌다. 인공위성은 12시간 동안 3개의 지상 관측소에 대해 총 17번의 교신 기회를 갖으며, 각 지상관측소 및 전체 관측 가능한 시간은 그림 1로 나타내었다. 3개의 지상 관측소들의 관측 가능 시간은 전체 12시간의 위성 운행 시간에 대해 약 20% 정도의 기간이다. 궤도결정에서, 추정하고자 하는 상태변수는 인공위성의 위치(γ)와 속도(v) 그리고 지구 대기저항 계수와 관련한 탄도계수의 역수 값(대기항력 계수와 위성의 면대 대 질량비의 곱으로 정의)으로 상정했다. 후처리 방식으로 반복과정이 필요한, 최소사승법을 이용한 배치 필터와 UT 기반의 배치 필터들의 수렴기준(ϵ , convergence criteria)은 식 (22)을 사용하였으며(Vallado 1997), 10^{-3} 으로 동일하게 설정하였다.

$$RMS_b = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N \Delta \tilde{y}_i^T \tilde{R}_i^{-1} \Delta \tilde{y}_i}{n_{meas} \times N} \right\}, \quad \left| \frac{RMS_a - RMS_b}{RMS_b} \right| < \epsilon \quad (22)$$

여기서, \tilde{R}_k 은 관측 잡음의 공분산, RMS_b 는 이전 반복에서의 관측 잔차($\Delta \tilde{y}_k$)의 제곱평균, RMS_a 는

다음 반복에서의 관측 잔차의 제곱평균, n_{meas} 는 관측 종류의 개수, N 은 총 관측 시각의 수이다.

개발된 UT 기반의 후처리 배치 필터와 비교대상이 된 추정방법은 최소자승법기반의 후처리 배치 필터와 IUKS 이다. 궤도결정 테스트는 다양한 시나리오를 설정하여, 비선형성에 대한 각 필터들의 장단점을 비교 분석하기 위해 (1) 초기궤도오차, (2) 관측 잡음의 수준별로 각각 6가지 경우를 각 필터들에 대해 수행하였다. 필터의 추정 정밀도는 기준궤도에 대한 위치오차의 RMS(Root Mean Square)값과 인공위성의 동경(Radial)방향, 진행(Along)방향, 교차방향(Cross) 성분 오차의 RMS 값을 대상으로 비교하였다. 또한 필터 계산 시각과 반복을 요하는 필터의 경우 수렴하기까지의 반복 회수를 기준으로 필터의 안정성을 비교하였다.

4.1 초기궤도오차에 따른 영향

초기궤도의 오차가 궤도결정 정밀도에 미치는 영향을 분석하기 위해서 최소 자승법을 이용한 후처리 배치 필터, 고정점 완화방법기반의 IUKS, 그리고 이 연구에서 소개된 UT기반의 비 재귀적 후처리 배치 필터에 대해 각각 총 12시간에 해당하는 임무 기간 동안 6가지 수치 실험을 수행하였다. 우선 초기 궤도오차에 대한 테스트 시 관측 데이터 시간간격은 30초로 고정하고 관측 잡음은 가우시안 백색잡음으로 가정하였으며, 거리와 방위각 및 고도각에 대한 잡음 수준은 각각 $25m(1\sigma)$, $0.015\text{도}(1\sigma)$, $0.015\text{도}(1\sigma)$ 로 고정하였다. 표 2의 설정에 의거하여 경우-1에서 경우-6까지 각 축에 초기 위치와 속도에 부여된 오차를 증가시키면서, 각 추정방법들에 따른 궤도결정을 수행하였다. 각 필터에 대한 초기 위치 속도의 공분산 값(P_0)은 초기궤도 오차의 10% 수준으로 가정하였다. 즉, 경우-1에 대해 $[(100m)^2, (100m)^2, (100m)^2, (0.1m/sec)^2, (0.1m/sec)^2, (0.1m/sec)^2]$ 의 공분산 값으로부터 초기궤도 오차가 상대적으로 큰 경우-6에 대해 $[(3000m)^2, (3000m)^2, (3000m)^2, (3m/sec)^2, (3m/sec)^2, (3m/sec)^2]$ 를 가정하였다. 대기 항력계수와 관련한 탄도계수의 역수 B^* 의 초기 공분산 값은 $(0.005m^2/kg)^2$ 로 동일하게 설정하였다.

경우-1에서 경우-6까지는 최소자승법 기반의 필터를 제외한 2가지 필터들은 모두 수렴하였고, 추정 위치오차의 RMS 값은 표 3에 정리하였다. 3가지 필터 모두 후처리 배치 필터의 설정이므로, 취득 가능한 관측 값을 모두 사용하여 초기 시각에서의 위치와 속도 그리고 탄도계수 값들을 결정하였다. 그리고 결정된 초기 값들을 기준으로 총 12시간동안의 궤도전파를 수행하고, 실궤도 값에 대한 위치 오차 결과를 그림 2에서 그림 7의 그래프들로 표현하였다. 궤도결정 정밀도는 개발된 UT기반 배치 필터의 궤도결정 위치오차의 RMS가 약 54.7m 수준, 최소자승법의 결과는 55.0m 수준으로 거의 같은 정밀도였고, IUKS는 약 62m 수준으로 상대적으로 정밀도가 앞선 두 가지 필터에 비해 떨어졌다. 하지만 상대적으로 초기궤도 오차가 큰 경우-5에서 경우-6인 경우, 기존 최소자승법 기반의 필터는 각각 그림 6과 그림 7에서 표현된 것처럼 발산하는 현상을 보였다. 반면에, 개발된 UT기반의 배치 필터와 IUKS는 최종 궤도결정오차의 변동이 거의 없고 안정적인 수렴성을 보여줬다. 이는 전통적인 최소자승법은 초기에 가정한 궤도 값이 알려지지 않은 실궤도 값과 거의 근접하다는 가정 하에 그 작은 차이에 대해 선형 근사를 취하므로 초기궤도의 오차가 커지면 커질수록 선형근사에 대한 오차가 증가하기 때문이다. 반면에, UT 기반의 배치 필터와 IUKS는 선형근사과정이 없고 확률적 근사를 기반으로 시스템을 이루고 있는 비선형 모델들을 그대로 사용하기 때문에 상대적으로 초기궤도 오차의 크기에 따른 비선형성에 좀 더 안정적으로 대응할 수 있다.

UT를 이용한 배치 필터의 관측 값 기반의 갱신은 기존 최소자승법과 매우 유사하다. 즉, 특정 기

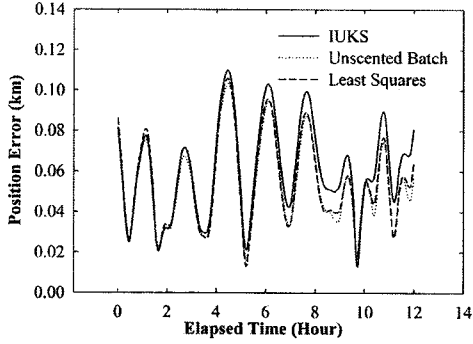


그림 2. 초기오차 경우-1 대한 추정결과.

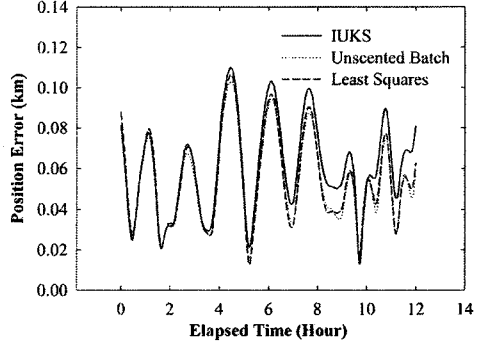


그림 3. 초기오차 경우-2 대한 추정결과.

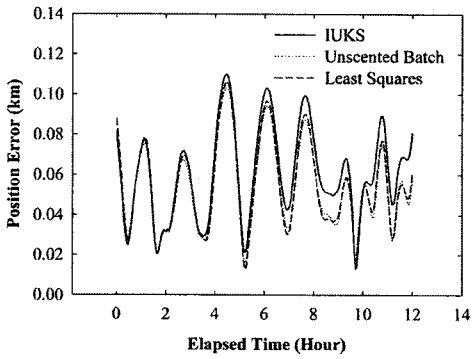


그림 4. 초기오차 경우-3 대한 추정결과.

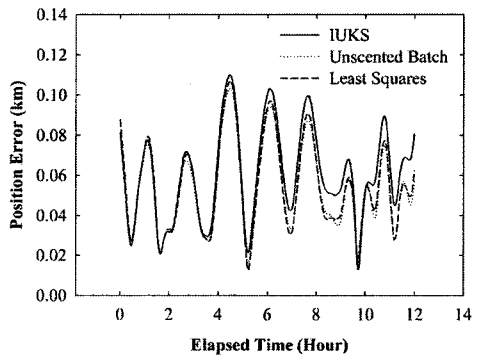


그림 5. 초기오차 경우-4 대한 추정결과.

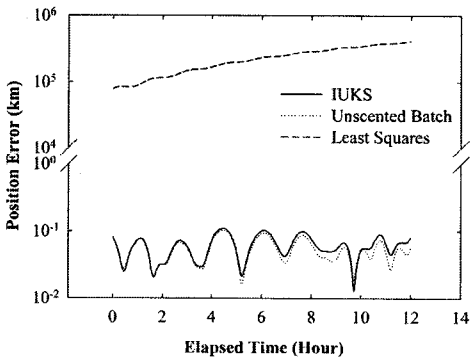


그림 6. 초기오차 경우-5 대한 추정결과.

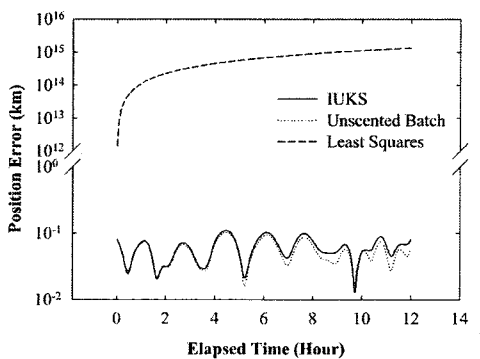


그림 7. 초기오차 경우-6 대한 추정결과.

표 3. 초기궤도 오차에 대한 각 추정방법 별 궤도 결정 오차.

추정방법	경우	반경오차 [m, RMS]	진행오차 [m, RMS]	교차오차 [m, RMS]	위치오차 [m, RMS]	계산시간 [sec]	반복횟수
IUKS	1	11.64	60.75	8.66	62.24	112	5
	2	12.52	60.75	10.31	62.44	111	5
	3	12.88	60.77	11.23	62.60	112	5
	4	13.00	60.78	11.53	62.66	111	5
	5	13.06	60.78	11.65	62.68	111	5
	6	13.12	60.79	11.77	62.71	112	5
Unscented Batch	1	10.48	53.1	8.3	54.75	109	5
	2	10.48	53.13	8.3	54.78	133	6
	3	10.48	53.13	8.3	54.79	152	7
	4	10.47	53.12	8.3	54.78	153	7
	5	10.48	53.09	8.31	54.74	176	8
	6	10.45	52.97	8.35	54.63	199	9
Least Squares	1	11.06	53.33	8.33	55.10	76	7
	2	10.99	53.29	8.11	55.01	131	12
	3	11.04	53.37	8.14	55.10	226	21
	4	11.04	53.27	8.05	55.00	151	14
	5	×	×	×	×	×	×
	6	×	×	×	×	×	×

점 시각의 상태를 추정하기 위해 다른 모든 시각의 관측 값을 모아 처리하는 일괄처리 방식을 따른다. 이에 비해, IUKS는 전방-후방 필터링을 반복적으로 수행하며 각각의 전-후방 필터링은 UKF의 알고리즘을 그대로 사용하기 때문에 내부적으로 연속적인 추정이 이뤄진다. 그러므로, 시간적으로 넓게 떨어져 분포하는 관측 가능한 트랙에 대해 보통 실시간 필터처럼 수렴하기 위한 일정한 시간이 필요하다. 그림 2에서 그림 5를 보면 IUKS의 기점 시각 추정 값을 기준으로 전파된 궤도의 위치오차가 그림 1의 관측이 가능한 시각의 트랙에 해당하는 부분에서 다른 두 배치 필터보다 오차가 약간씩 증가하는 현상을 확인할 수 있다.

UT 기반의 필터는 시그마 포인트 샘플링과 관련한 고유한 특징 때문에 최소자승법보다는 연산 시간이 더 오래 걸린다. 하지만 경우-3과 경우-4에서는 비선형성의 영향으로 최소자승법의 반복회수가 상대적으로 현저히 증가하여 결과적으로 UT기반의 배치 필터의 연산시간이 비슷하거나 더 빠르게 나타났다.

4.2 관측 잡음에 따른 영향

관측 잡음의 크기 정도가 궤도결정 정밀도에 미치는 영향을 분석하기 6가지 경우에 대한 수치 실험을 수행하였다. 우선 초기궤도 오차는 표 2의 초기오차 설정 중 최소값으로, 관측 시간간격은 30초로 정하고, 거리와 방위각 및 고도각에 대한 관측 잡음 수준은 각각 $25m(1\sigma)$, $0.015\text{도}(1\sigma)$, $0.015\text{도}(1\sigma)$ 로부터 크기를 2배씩 최대 32배까지 증가시키면서 각 추정방법에 따른 궤도결정 결과를 도출하였다. 최소자승법, UT 기반의 배치필터, IUKS 모두 6가지 경우에 대해 수렴하였으며, 그 결과는 표 4와 같다. 취득 가능한 관측 값을 모두 사용하여 초기 시각에서의 위치와 속도 그리고 탄도계수 값을 결정하고, 이를 기준으로 전체구간(총 12시간)에 대한 궤도전파를 수행하였다. 전파된 궤도의 실제도 값에 대한 위치오차를 그림 8에서 그림 13까지의 그래프들로 나타내었다. 상대적으로 관

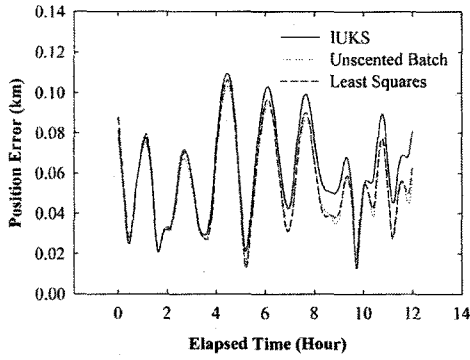


그림 8. 관측 잡음 경우-1에 대한 추정결과.

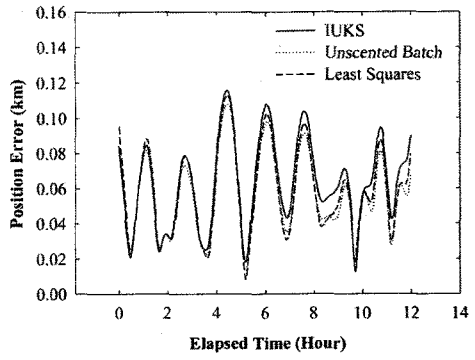


그림 9. 관측 잡음 경우-2에 대한 추정결과.

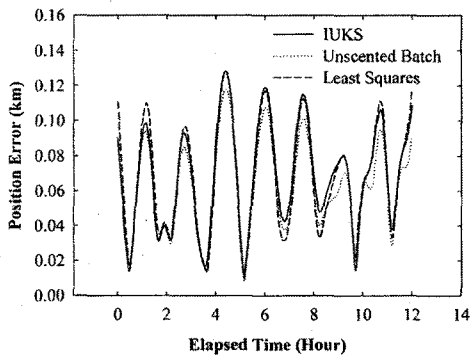


그림 10. 관측 잡음 경우-3에 대한 추정결과.

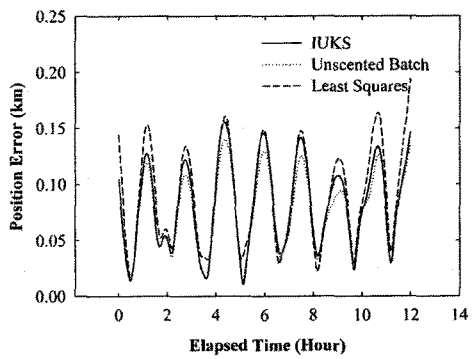


그림 11. 관측 잡음 경우-4에 대한 추정결과.

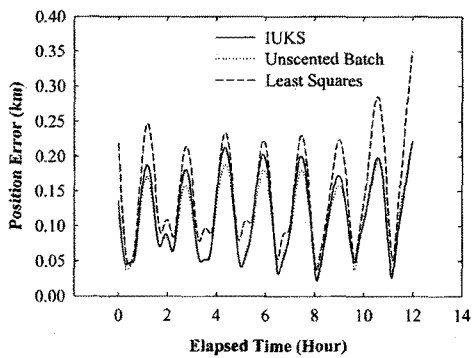


그림 12. 관측 잡음 경우-5에 대한 추정결과.

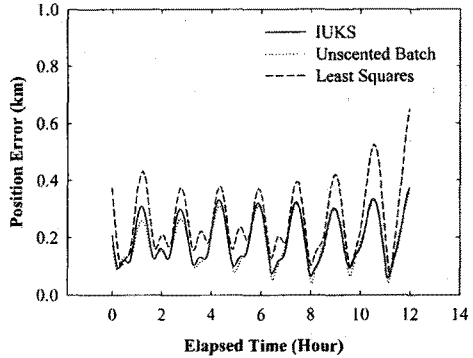


그림 13. 관측 잡음 경우-6에 대한 추정결과.

표 4. 관측 잡음에 대한 각 추정방법 별 궤도 결정 오차.

추정방법	경우	반경오차 [m, RMS]	진행오차 [m, RMS]	교차오차 [m, RMS]	위치오차 [m, RMS]	계산시간 [sec]	반복횟수
IUKS	1	11.64	60.75	8.66	62.24	112	5
	2	13.03	63.06	9.63	64.9	89	4
	3	16.43	68.45	12.43	71.23	90	4
	4	24.05	81.36	18.88	86.63	89	4
	5	40.43	112	32.8	123.24	90	4
	6	74.24	180.68	62.2	204.74	89	4
Unscented Batch	1	10.48	53.13	8.3	54.78	131	6
	2	11.71	55.1	9.69	57.16	132	6
	3	14.6	59.88	13.11	63.01	132	6
	4	21.27	71.85	20.99	77.81	130	6
	5	35.68	101.42	38.01	114.03	154	7
	6	64.96	170.4	75.22	197.26	196	9
Least Squares	1	11.06	53.33	8.33	55.1	76	7
	2	12.81	56.21	9.68	58.46	120	11
	3	17.61	64.81	14.19	68.64	119	11
	4	30.04	87.85	24.54	96.03	109	10
	5	55.86	140.88	47.35	158.78	109	10
	6	98.9	246.18	87.65	279.41	109	10

측 잡음의 크기가 작은 경우-1에서 경우-3에 대해 최소자승법의 위치오차의 RMS 값은 대략 55m에서 69m까지, UT 기반의 배치필터는 55m에서 63m까지, IUKS는 62m에서 71m까지로 나타났다. UT 기반의 배치 필터가 잡음수준이 증가하여도 가장 정밀한 결과를 보여줬다. 경우-4에서 경우-6에 대해서는 관측 잡음에 의한 영향이 커지므로, 선형화를 통해 비선형 방정식(관측 방정식)을 근사한 최소자승법의 경우 위치오차의 RMS 값이 96m(경우-4)에서 279m(경우-6)으로 급격히 증가하는 반면, UT 기반의 배치필터는 78m(경우-4)에서 197m(경우-6) 수준으로 최대 30% 정도의 정밀도 향상이 있었으며, 87m(경우-4)에서 205m(경우-6) 수준의 정밀도를 보인 IUKS에 비해서도 5%에서 10% 정도의 정밀도 향상을 보였다.

5. 결론

기존 최소자승법 기반의 후처리 배치 필터는, 비선형 방정식들의 선형근사를 통해 필터를 구성하기 때문에 비선형성이 증대되는 상황에서 필터의 안정성과 정밀도가 떨어지는 단점이 있다. 이를 개선하기 위해, 선형화 과정이 필요 없는 Unscented 변환을 사용하여 후처리 배치 필터 알고리즘이 소개되었다. UT 기반의 후처리 필터와 기존 최소자승법 기반의 필터 그리고 IUKS의 성능 비교를 위해 다양한 위성궤도결정 시나리오를 설정하고, 초기 궤도오차별, 관측데이터의 관측 잡음의 크기별 테스트를 수행하였다. 실험결과 개발된 Unscented 변환 기반의 후처리 배치 필터는, 비선형성의 특징이 증대된 상황에서 기존의 후처리 배치 알고리즘들에 비해 초기 궤도오차별, 관측데이터 잡음의 크기별 테스트 시 각각 평균적으로 약 5%와 12% 정도의 정밀도 향상결과를 보였다. 또한, 기존 최소자승법을 이용한 후처리 배치필터가 발산한 상황에서도, 수렴성을 확보하는 안정적인 결과를 얻을 수 있었다.

감사의 글: 이 연구는 한국과학재단의 국가지정연구실사업(No. M10600000282-06J0000-28210) 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- Crassidis, J. L. & Junkins, J. L. 2004, *Optimal Estimation of Dynamic Systems* (New York: Chapman & Hall/CRC), pp.189-213
- Crassidis, J. L. & Markley, F. L. 2003, *JGCD*, 26, 536
- Farina, A., Ristic, B., & Benvenuti, D. 2002, *IEEE Transaction on Aerospace and Electronics*, 38, 854
- Fraser, D. C. & Potter, J. E. 1969, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 14, 387
- Gelb, A. 1974, *Applied Optimal Estimation* (Cambridge: The MIT Press), pp.180-228
- Harris, I. & Priester, W. 1962, *Time-Dependent Structure of the Upper Atmosphere* (Maryland: Goddard Space Flight Center), pp.12-53
- Julier, S. J. & Uhlmann, J. K. 1997, in *Proceedings of the AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls*, eds. M. H. Smith & W. A. Gruver (Orlando, USA: SPIE), p.182
- Julier, S. J., Uhlmann, J. K., & Durrant-Whyte, H. F. 1995, in *Proceedings of the American Control Conference*, eds. M. H. Smith & W. A. Gruver (Seattle, USA: ACC), p.628
- Lee, D.-J. & Alfriend, K. T. 2003, in *Proceedings of the AAS/AIAA Space Flight Mechanics Symposium* eds. I. J. Gravseth & D. C. Robert (Ponce, Puerto Rico: AAS), p.1853
- Lee, D.-J. & Alfriend, K. T. 2007, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 44, 388
- Marshall, S. R. & Patrick, R. C. 1997, *STK User's Manual -Version 4.0 for Windows 95/NT* (Maryland: Analytical Graphics, Inc.), pp.19-39
- Montenbruck, O. & Gill, E. 2000, *Satellite Orbit, Models, Methods, Applications* (NewYork: Springer), pp.257-291
- Park, E.-S., Park, S.-Y., Roh, K.-M., & Choi, K.-H. 2007, in *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, eds. H. E. Hollowell & D. C. Robert (Michigan, USA: AAS), p.1755
- Psiaki, M. L. 2005, *JGCD*, 28, 885
- Psiaki, M. L. & Wada, M. 2007, *JGCD*, 1, 78
- Roh, K.-M., Park, S.-Y., & Choi, K.-H. 2007, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 44, 246
- Schuts, B. E., Shum, C. K., Nerem, R. S., Lerch, F. J., Marshall, J. A., Klosko, S. M., Pavlis, N. K., & Williamson, R. G. 1996, *Journal of Geophysical Research*, 101, 28029
- Tapley, B. D., Schutz, B. E., & Born, G. H. 2004, *Statistical Orbit Determination* (Burlington: Elsevier Academic Press), pp.173-198
- Vallado, D. A. 1997, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications* (NewYork: McGraw-Hill), pp.466-474
- Wan, E. A. & van der Merwe, R. 2001, In *Kalman Filtering and Neural Networks* (NewYork: Wiley), pp.221-234
- van der Merwe, R., Wan, E. A., & Julier, S. J. 2004, in *Proceedings of the AIAA Guidance Navigation & Control Conference*, eds. I. J. Gravseth & D. C. Robert (Providence, USA: AAS), p.10