논리연구 12-1(2009) pp. 1~24

‘가깝다’에 관하여*

이 승 온, 황 인 재

【요약문】 이 논문에서 우리는 집합의 두 점 사이의 관계를 소개하고, ‘가깝다’와 ‘충분히 가깝다’의 위상적인 개념을 다양하게 정의할 수 있음을 보인다. 또한 직관주의 논리와 관계가 있는 De Morgan frame을 소개하고 pre-order에 의하여 정의된 동치관계로 만들어진 동치류들의 집합을 기저로 생성된 위상 공간이 extremally disconnected 임을 보인다.

【주요어】 가깝다, 관계, 위상공간에서 두 점의 가까운 정도, 부울대수, 직관주의 논리, extremally disconnected 공간.

---

* 접수완료 : 2008. 11. 10 / 심사 및 수정완료 : 2009. 1. 5

1. 서론

부르바키([2])는 '충분히 가깝다'는 표현을 정의 없이 아래와 같이 사용하였다.

> "위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 부분집합 G가 열린집합이 되기 위한 필요충분조건은 G의 모든 점 x에 대하여 x와 충분히 가까운 점들은 모두 G에 속하는 것이다.
> (A set G is open $\Leftrightarrow$ for each x in G, all the points sufficiently near to x belong to G)"..................(*)

여기서 '충분히 가깝다'의 정의는 무엇인가?

'x가 y에 충분히 가깝다'를 $y \in cl\{x\}$로 정의하면 보통위상공간 (R, U)는 Hausdorff 공간이므로 x와 충분히 가까운 점은 x밖에 없고, 위식 (*)에 의하여 $G = \{x\}$는 열린집합이 되어야 한다. 그러나 G는 열린집합이 아니므로 'x가 y에 충분히 가깝다'를 $y \in cl\{x\}$나 $x \in cl\{y\}$로 정의할 수 없다(여기서 clA는 A의 closure 이다). 그렇다면 식 (*)의 'x와 충분히 가까운 점들'은 무엇을 의미하는가?

'가깝다(near)' 혹은 '근접하다'는 말은 사용되는 문맥에 따라 매우 다양한 의미를 갖는다.

가장 일반적으로는 거리 공간에서 두 점 사이의 거리가 어느 정도 원하는 만큼의 작은 값을 가질 때 우리는 '두 점이 충분히 가깝다'고 한다. 그러나 우리가 사용하는 '가깝다'는 표현은 정량적이기 보다는 대단히 정성적인 면이 있어서 '가깝다'와 '멀다'사이의

명확한 경계는 존재하지 않으며, 상대적인 의미로 사용되는 경우가 많다.

시간상의 두 시점에 대해서도 비슷한 의미로 '가깝다'는 말을 사용할 수 있는데, 이 경우 공간상의 두 점에 관한 것처럼 그 의미가 명확하게 사용되지 않는 경우가 있다.

교통과 통신수단의 발달로 인하여 세계는 서로 점점 더 가깝게 연결된다. 여기서 '가깝다'는 말은 공간적으로는 멀리 떨어져 있어도 빠른 교통수단을 이용하여 어느 한 장소에서 다른 장소로의 이동이 시간적으로 단축되었음을 의미한다. 예를 들면 고속도로의 길이만으로 볼 때 서울과 청주사이의 거리는 약 128Km이고 서울과 대전사이의 거리는 약 145Km이다. 따라서 서울은 대전보다 청주와 더 가깝다. 그러나 KTX 고속전철을 이용하면 서울에서 대전은 1시간이 걸리고 서울에서 청주는 무궁화호나 고속버스, 또는 승용차를 이용할 때 1시간 반이 걸린다. 따라서 이동에 필요한 시간으로 본다면 서울은 청주보다 대전에 더 가깝다. 즉 어떤 자로 재느냐에 따라서 '가깝다'는 개념은 달라질 수 있다.

고도의 통신 수단을 활용하여 공간적으로 멀리 떨어져 있는 사람들 사이에 쉽게 여러 형태의 멀티미디어 자료를 주고받을 수 있고 화상이나 음성 통신이 가능함을 뜻하는 경우 '가깝다'는 말은 더욱 추상적인 의미를 갖는다.

위에서 언급된 두 객체간의 '가깝다'는 관계는 모두 상호 대칭적이다. 즉 A가 B에 가까우면 당연히 B가 A에 가깝다. 그러나 우리가 사용하는 '가깝다'라는 관계들이 모두 상호 대칭적인 것은 아니다. 두 사람사이의 '감정적인 가까움'을 의미할 때는 상호 대칭적이 아닌 경우가 많다. A가 B를 가까운 사이로 생각한다고 해서 반드시 B도 A를 가까운 사이로 생각하지는 않기 때문이다.

거리, 시간, 감정 이외에도 '가깝다'는 말은 두 객체사이의 유사

함을 의미할 수도 있다. 인간과 고릴라는 서로 '가깝다'고 한다. 이 말은 두 종이 서로 많은 신체적 특징을 공유하고 있음을 의미했다. 그러나 현대의 유전 과학은 유전자내의 염기 서열을 밝히는 것을 가능하게 해주어 두 종이 '가깝다'는 의미를 유전자내 염기 서열이 유사하다는 의미로 바꾸어 주었다. 즉 신체적 유사함보다는 유전체 구조의 유사함이 두 종간의 '가까움'을 판단하는데 있어 보다 중요한 기준이 된 것이다.

'가까움'에 대해서는 1908년 Riesz([10])를 효시로 수학의 여러 분야에 걸쳐 다양한 각도의 연구가 이루어져왔다.

1974년 Cameron, Hocking, Naimpally는 '가까움의 위상적 개념'을 이용하여 연속과 극한의 이론을 학생들에게 소개하였다. 그들은 흔히 사용되는 $\varepsilon-\delta$를 이용한 정의의 문제점을 제기하고, 그들의 방법이 학생들의 기하학적 직관력에 강하게 부합된다는 것을 보여주었다. 경험에 따르면 대다수의 학생들이 요점을 빠르게 이해하고, 자신들이 이해한 내용에 대한 강한 확신을 갖게 되었다([3]).

1974년 Herrlich는 다양한 위상학 구조의 개념을 통합해주는 '가까움의 구조(nearness structures)'를 소개하였다. 그의 구조에 의하여 생성된 '가까움 공간(nearness space)'에 대하여 하나의 위상이 존재하는데 이 위상은 대칭적이다. 즉 $x\in cl\{y\}$ 이면 $y\in cl\{x\}$ 이다([5, 6]).

1989년 Higham은 '행렬의 가까움' 문제와 그 응용에 대하여 연구하였다. 특정 행렬과 가장 가까운 하나의 행렬을 주어진 행렬의 집합 내에서 찾아내는 것이 이 문제의 목적이다. 두 행렬사이의 가까운 정도를 측정하는 기준으로는 matrix norm을 사용하였으며 norm의 선택은 '가까움' 문제의 난이도에 의하여 결정된다. 가장 유용한 norm으로써 Euclidean norm과 2-norm을 제시하였다. 이러한 문제는 다양한 응용 분야를 가지고 있다. 예를 들면 행렬 A가

행렬 B의 근사치이고 행렬 B는 특정한 성질 P를 갖는다. 행렬 A를 계산할 때 발생된 (rounding or truncation) 오차에 의하여 성질 P를 갖지 않을 때 가장 그럴듯한 해결책은 A와 가장 가까우면서도 성질 P를 갖는 행렬 X를 찾아 A를 대체하는 것이다 ([7]).

2001년 Duckham과 Worboys는 정성적 공간 관계인 '가까움'에 대하여 인지적인 접근 방법과 계산적인 접근 방법이 어떻게 가까이 통합될 수 있는지를 보여주었다. 이들 연구의 궁극적인 목적은 주어진 공간에서 인간에 의하여 감지되는 '가까움'에 대한 공식적 모델을 개발하여 인간의 개념과 의사결정을 보다 잘 지원할 수 있는 지리정보시스템의 인터페이스를 개발하는데 있다([4]).

이 논문의 구성은 다음과 같다.

2장에서는 이 논문의 내용을 이해하는데 필요한 기본 개념인 '집합의 두 점의 관계'에 대하여 상세히 설명하고, 3장에서는 '위상공간의 두 점이 가깝다'를 다양하게 정의할 수 있음을 보이고, 거리공간에서의 '충분히 가깝다'는 개념을 일반화시켜서 일반위상공간에서 '충분히 가깝다'는 개념을 정의한다. 4장에서는 직관주의 논리와 관련이 있는 De Morgan frame을 소개하고, pre-order가 되는 관계 '가깝다'에 의하여 정의된 동치관계에 의하여 만들어진 동치류들의 집합을 기저로 하여 생성된 위상 공간이 extremally disconnected 임을 보임으로써 우리가 정의한 관계 '가깝다'와 직관주의 논리가 관련이 있음을 보인다.

2. 관계(Relation on a set)

수학의 정의는 무엇인가? 에 대한 정답이 존재하는지 알 수 없으나 개략적으로 우리는 수학이 '관계'를 연구하는 학문이라고 생각한다. 함수는 관계의 특수한 예이고 함수를 이용하여 두 집합이나 공간, 즉 두 범주(category) 사이의 성질을 연구하는 것이 수학이기 때문이다.

관계는 두 집합의 구성원들 사이에 정의될 수 있는 자연스럽고 명확한 개념이다. 예를 들어 A가 학교 교사들의 집합이고 B는 그 학교 학생들의 집합일 때, x와 y가 각각 A와 B의 원소라고 가정하면, x와 y사이에 x는 y의 담임교사라는 관계 R이 성립할 수 있으며, 기호로는 $x\ R\ y$ 로 나타낸다. 이 때 R을 집합 A에서 집합 B로의 관계라고 한다. 경우에 따라 A와 B는 동일한 집합일수도 있다. 관계를 정의할 때 가장 중요한 점은 정확히 집합 A의 어느 원소가 집합 B의 어느 원소와 관계를 갖는가를 명시하는 것이다. 따라서 관계 R은 그에 의하여 연관되어진 원소의 순서쌍들을 나열함으로써 완전하게 정의될 수 있다.

정의 2.1. (1) $A\times B$가 집합 A와 집합 B의 원소로 만들어진 모든 순서쌍들의 집합이고 $R\subseteq A\times B$ 일 때, R을 A에서 B로의 관계라고 한다.

(2) 집합 A에서 A로의 관계 R을 집합 A 위에서의 관계라고 한다.

정의 2.2. 집합 A 위에서 정의된 관계 R에 대하여 다음을 정의한다.

(1) A의 모든 원소 a에 대하여 $a\ R\ a$이면 R은 reflexive 라고 한다.

(2) A의 모든 원소 a에 대하여 $a\ \not R\ a$이면 R은 irreflexive 라고 한다.

(3) $a\ R\ b$를 만족하는 A의 모든 원소 a, b에 대하여 $b\ R\ a$일 때 R은 symmetric 이라고 한다.

(4) $a\ R\ b$를 만족하는 A의 모든 원소 a, b에 대하여 $b\ \not R\ a$일 때 R은 asymmetric 이라고 한다.

(5) $a\,R\,b$, $b\,R\,a$ 를 만족하는 A의 모든 원소 a, b에 대하여 $a=b$일 때 R은 antisymmetric 이라고 한다.

(6) $a\ R\ b$, $b\ R\ c$ 를 만족하는 A의 모든 원소 a, b, c에 대하여 $a\ R\ c$ 일 때 R은 transitive 하다고 한다.

(7) R이 reflexive, symmetric, transitive 할 때, 동치관계(equivalence relation)라고 한다.

Asymmetric한 관계는 서로 다른 두 원소가 양방향으로 관계되는 것을 허용하지 않을 뿐 아니라 어떤 원소가 그 자신과 관계되는 것도 가능하지 않다. 그러나 antisymmetric 관계에서는 서로 다른 두 원소가 양방향으로 관계되는 것은 불가능 하지만 어떤 원소가 그자신과 관계되는 것은 가능하다.

예를 들면 $A=\{1,2,3,4\}$이고 $R=\{(1,2),(2,2),(3,4),(4,1)\}$일 때, $(2,2)\in R$이므로 R은 asymmetric하지 않지만 antisymmetric하다. Transitive한 관계의 쉬운 예로써 모든 정수 위에서 정의된 관계 '$\leq$ (작거나 같다)'를 들 수 있다.

집합 A 위에서의 동치관계 R은 집합 A의 분할(partition) (혹

은 상집합(quotient set))과 일대일로 대응한다. 즉 하나의 동치관계에 대응되는 A의 분할을 찾을 수 있고, 주어진 A의 분할에 대응되는 동치관계를 찾을 수 있다.

정의 2.3. 공집합이 아닌 집합 A의 분할 P는 A의 부분집합들의 집합으로 다음의 두 가지 조건을 만족하여야 한다.

(1) 집합 A의 모든 원소는 P 에 속하는 집합들 중 하나의 원소이어야 한다.

(2) A_1과 A_2가 서로 다른 P의 원소라면 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$이다.

동치관계 R이 주어지면 그에 대응하는 집합 A의 분할 P는 다음과 같이 찾을 수 있다.

A의 모든 원소 a에 대하여 $R(a)$를 구한다. 여기서 $R(a) = \{b \in A \mid a\ R\ b\}$ 이다.

중복되는 것을 제외하고 서로 다른 $R(a)$만으로 구성된 집합은 A의 분할 P를 이룬다.

이 때 $R(a)$를 a의 동치류(equivalence class)라고 부른다.

집합 A의 분할 P가 주어지면 그에 상응하는 관계 R은 다음과 같이 구해진다.

A의 원소 a와 b에 대하여 적당한 원소 $B \in P$가 존재하여 $a, b \in B$이면 aRb이다. 즉, 분할의 한 원소에 속하는 모든 쌍의 a와 b는 R의 관계가 있다.

쉬운 예로써 A가 어느 학교 학생들의 집합이라 하고, 학생 a는 성(姓)이 같은 학생 b에게 R 의 관계가 있다고 하자. 관계 R은 reflexive, symmetric, transitive 조건을 모두 만족하는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 R은 동치관계이다. 이와 같은 동치관계에

대응하는 분할 P의 동치류는 성이 같은 학생들로 이루어진 집합이다.

정의 2.4. 집합 A 위에서의 관계 R이 reflexive, antisymmetric, transitive 일 때, R을 partial order 라고 부른다. 그리고 partial order R과 더불어 A를 반순서집합(partially ordered set 또는 poset) 이라고 부른다. Partial order의 간단한 예로써 다음을 들 수 있다.

예 2.5. $A=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ 일 때, $x \subseteq y \Leftrightarrow x\ R\ y$ 로 정의하면, 관계 R이 위의 세 가지 성질을 모두 만족하는 것은 쉽게 확인할 수 있다. Partial order 에서는 모든 원소의 쌍 x, y가 $x\ R\ y$ 이거나 $y\ R\ x$를 만족하는 것은 아니다. 즉 어느 방향으로도 관계가 지어지지 않는 원소의 쌍이 존재할 수 있다. $\{a,\ b\}$와 $\{a,\ c\}$가 그 예이다.

Partial order 중에서 모든 원소의 쌍 x, y가 $x\ R\ y$ 이거나 $y\ R\ x$를 만족하는 관계를 linear order 라고 부른다. Linear order 의 간단한 예로써 정수의 집합과 정수들 사이의 관계 '$\leq$ (작거나 같다)'를 들 수 있다.

'a가 b에 충분히 가깝다'는 의미는 쓰는 사람에 따라 또는 경우에 따라 다르다. '가깝다'의 의미도 애매모호한데 '충분히 가깝다'의 의미는 더욱 객관적일 수 없다. 일반적으로 'a 가 b에 가깝다'는 관계는 symmetric 하지 않다. 따라서 그러한 관계는 동치관계가 될 수 없다. 그렇다면 '가까움'의 수학적 의미는 무엇이며 어떻게 객관적 의미를 지닌 관계로써 이를 정의할 수 있겠는가. 일반적으로 두 사람의 '관계'는 reflexive 하지도 않고 또한 transitive 하지

도 않다. 그러나 우리는 위상공간 안에서 정의될 관계인 '가까움'이 최소한 reflexive 하고 transitive 하길 원한다. 즉 적어도 pre-order 관계가 되기를 원한다. Pre-order의 정의는 다음과 같다.

정의 2.6. 집합 P 상에서의 관계 R이 reflexivity와 transitivity를 만족할 때, pre-order 또는 quasi-order 라 하고 (P, R)을 pre-ordered 집합이라고 부른다.

집합 P 위에서 정의된 pre-order R이 주어지면 이를 이용하여 동치관계 ' $\sim$ '를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \; x\,R\,y\,,\; y\,R\,x$$

동치관계 '$\sim$'를 이용하여 상집합 $P/\sim \;=\{[x]_\sim | x \in P\}$ 위에서 partial order를 정의하는 것이 가능하다(여기서 $[x]_\sim$는 $\{y | x \sim y\}$ 이다).

$P/\sim$ 위에서 partial order '$<$'를 정의할 수 있다.

$$[x]_\sim < [y]_\sim \quad \Leftrightarrow \; x\,R\,y$$

Partial order '$<$' 의 구성에 따르면 위의 정의는 quotient를 나타내기 위한 대표 원소 x의 선택과 무관하므로 partial order '$<$'는 well defined 되었다.

3. 위상공간에서 두 점의 가까운 정도(Degree of nearness in a topological space)

앞에서 언급한바와 같이 '가깝다'는 의미는 사용하는 사람과 문맥에 따라 다르다. 수학적으로, x가 clA의 원소라는 것은 위상공간 안에서 A는 x의 근삿값들의 집합이라는 것을 의미한다. 즉 'x는 A에 가깝다' 또는 A의 한 원소인 a가 x의 근삿값임을 말한다.

예를 들어 보통위상공간 (R, U)의 부분집합 $A=\{1,1.4,1.41,1.414,\cdots\}$ 는 무리수 $\sqrt{2}$로 수렴하는 유리수들로 이루어진 수열로 형성된 집합이다. 즉 오차의 한계가 각각 차이가 있으나 집합 A의 원소는 $\sqrt{2}$의 근삿값이 될 수 있다. 요약하면 $\sqrt{2} \in clA = A \cup \{\sqrt{2}\}$이고 수열 $\langle 1,1.4,1.41,1.414,\ldots \rangle$는 $\sqrt{2}$로 수렴한다. 이때, $\sqrt{2}$는 집합 A에 가까운 점이지만 집합 A의 어떤 점도 $\sqrt{2}$에 가깝지는 않다. 왜냐하면 어떤 점 $a \in A$에 대해서도 $a \notin cl\{\sqrt{2}\} = \{\sqrt{2}\}$이기 때문이다.

일반적으로 임의의 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 두 점 a, b에 대하여 a가 $cl\{b\}$의 원소일 때 b가 $cl\{a\}$의 원소가 되지는 않는다. 만약에 두 점 a, b가 Hausdorff 공간 $(X, \mathfrak{I})$안에 존재한다면 '$a=b$'와 'a가 b에 가깝다'는 서로 동치이다.

다음은 위상공간의 근방(neighborhood)이 갖는 가장 기본적인 성질중 하나이다.

위상공간의 부분집합 G가 열린집합이기 위한 필요충분조건은

G가 G안의 모든 점들의 근방이 되는 것이다
(A set is a neighborhood of each of its points $\Leftrightarrow$ it is open).

'근방' 또는 '이웃'의 수학적 의미는 '이웃'의 일상적 의미로부터 동기를 부여받았다고 볼 수 있다. 수학적 용어를 정할 때, 적합한 용어의 선택은 그 의미를 보다 더 잘 이해할 수 있도록 만들어주는 장점이 있다.

일반적으로 어떤 성질이 x의 근방 안에 있는 모든 점에서 성립하면 그 성질이 x에 충분히 가까운 모든 점에서 성립한다고 한다. 그렇다면 일반적으로 열린집합의 개념이 위상 공간 안에서 '가까움'의 개념을 정의하는데 어떤 작용을 하는가? 비이산공간 안에서는 모든 점들이 서로 가깝다고 볼 수 있는데, 이는 비이산공간의 근방은 X밖에 없기 때문이다. 즉, X의 어떤 점에 대해서도 그 점의 근삿값들을 모은 집합은 X외에는 존재하지 않는다. 따라서 X의 모든 점은 서로 충분히 가깝다. 이제 우리는 '가깝다'의 개념을 위상적으로 정의할 때 다양한 방법을 시도함으로써 그 장단점을 살피고 좀 더 나은 정의를 끌어내고자 한다.

이 논문 전체에 걸쳐 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$는 공집합이 아닌 집합 X 위에서 정의된다.

정의 3.1. x, y가 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 원소일 때 다음을 정의한다.

(1) y를 포함하는 모든 열린집합이 x를 포함하면, 즉 $y \in cl\{x\}$일 때, 'x는 y에 일방적으로 가깝다(one-sided near)'고 말하며 기호로는 '$x \rightarrow_1 y$'로 나타낸다.

(2) x와 y를 모두 포함하는 열린집합이 존재하면 'x는 y에 전적으로 가깝다(wholly near)'고 말하며 기호로는 '$x \to_w y$' 로 나타낸다.

(3) $x=y$ 이거나 x와 y를 모두 포함하는 열린집합 $G(\neq X)$가 존재하면 'x는 y에 적당히 가깝다(properly near)'고 말하며 기호로는 '$x \to_p y$'로 나타낸다.

Remark 3.2. (1) 관계 $\to_1$은 reflexive 하다.

(2) $\beta = \{N_k | N_k = \{1, 2, \ldots k\}, k \in N\}$가 모든 자연수의 집합 N 위에서 정의된 위상 $\mathfrak{J}$의 기저라면 N의 모든 원소 n에 대하여, $1 \to_1 n$이다. 그러나 1을 제외한 N의 모든 원소 n에 대하여 $n \not\to_1 1$ 이다; 따라서 $\to_1$은 symmetric 하지 않다.

(3) X가 두 개 이상의 원소를 가진 집합일 때, 비이산공간 (X, ϑ) 안에서 X 안의 모든 원소는 일방적으로 가깝다; 따라서 $\to_1$은 anti-symmetric 하지 않다.

(4) $x \to_1 y$이고 $y \to_1 z$이면 z을 포함하는 모든 열린집합 G는 y를 포함한다. 그러므로 G는 x를 포함 한다; 따라서 $\to_1$은 transitive 하다.

정리하면 $\to_1$은 pre-order 이다. 그러나 equivalence relation도 아니고 partial order도 아니다.

정의 3.1-(1)에서 $y \in cl\{x\}$ 이기 위한 필요충분조건이 $cl\{y\} \subseteq cl\{x\}$라는 사실을 이용하면 Remark 3.2의 결과들을 쉽게 얻을 수 있다.

Remark 3.3. (1) $\rightarrow_w$는 reflexive 하다.

(2) X가 두 개 이상의 원소를 가진 집합일 때, 비이산공간 (X, ϑ) 안의 모든 원소는 전적으로 가깝다; 따라서 $\rightarrow_w$는 symmetric 하지만 anti-symmetric 하지 않다.

(3) 관계 $\rightarrow_w$는 transitive 하다.

그러므로 관계 $\rightarrow_w$는 equivalence relation 이다. 그러나 $\rightarrow_w$는 partial order는 아니다.

정의 3.1-(2)의 전적으로 가깝다(wholly near)의 정의는 $X \times X$ 를 의미하므로 Remark 3.3의 결과들을 쉽게 얻을 수 있다.

정의 3.1-(3)의 적당히 가깝다(properly near)의 정의는 $\cup\{U \times U | U \in \mathfrak{J} - \{X\}\}$를 의미한다.

Remark 3.4. (1) $\rightarrow_p$는 reflexive 하다.

(2) $X = \{x, y, z\}$ 이고 $\mathfrak{J} = \{X, \varnothing, \{x, y\}, \{y, z\}, \{y\}\}$라고 가정하자. 그러면 $x \rightarrow_p y$ 이고 $y \rightarrow_p z$ 이다. 그러나 어떤 열린집합 $G(\neq X)$에 대해서도 $x \rightarrow_p z$ 는 만족하지 않는다. 따라서 $\rightarrow_p$는 transitive 하지 않다.

(3) X 가 두 개 이상의 원소를 가진 집합일 때, 비이산공간 (X, ϑ) 안의 서로 다른 어떤 원소도 적당히 가깝지 않다.

(4) (2)에 의하여 관계 $\rightarrow_p$는 a pre-order가 아니다.

Remark 3.5. $(X, \mathfrak{J})$가 위상공간이고 A가 X의 부분집합이면 다음은 서로 동치이다.

(1) A는 열린집합이다.

(2) A의 모든 원소 a에 대하여 A의 열린 부분집합 G가 존재하고 점 a와 적당히 가까운 모든 점들 역시 A에 속한다.

위에서 집합 G 는 집합 A에 의존한다. 따라서 '충분히 가깝다'의 정의는 집합 A로부터
자유로울 수 없다.

정리 3.6. 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대하여 다음은 서로 동치이다.
(1) $(X, \mathfrak{I})$는 T_1 공간이다.
(2) $x \to_1 y \Leftrightarrow x = y$.
(3) $x \neq y \in X$ 이면 $x \not\to_1 y$, $y \not\to_1 x$ 이다.

증명. $x \to_1 y \Leftrightarrow y \in cl\{x\}$ 이고 T_1 공간에서 $cl\{x\} = \{x\}$ 이므로 위의 결과를 얻는다.

정리 3.6에 의하면 T_1 공간의 특성은 일방적 가까움에 의하여 완전히 결정된다고 볼 수 있다. 마찬가지로 T_0 공간의 특성도 일방적 가까움에 의하여 완전히 결정됨을 보이자.

정리 3.7. 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대하여 다음은 서로 동치이다.
(1) $(X, \mathfrak{I})$는 T_0 공간이다
(2) $x \neq y \in X$이면 $x \not\to_1 y$ 또는 $y \not\to_1 x$ 이다.

증명. $x \neq y \in X$이면 $(X, \mathfrak{I})$가 T_0-공간이므로 적당한 열린집합 G가 존재하여 $x \in G$, $y \notin G$ 또는 $x \notin G$, $y \in G$를 만족한다.

$x \in G$, $y \not\in G$이면 $y \not\to_1 x$ 가 되고, $x \not\in G$, $y \in G$이면 $x \not\to_1 y$ 가 된다. 따라서 $x \not\to_1 y$ 또는 $y \not\to_1 x$ 이다.

역으로 $x \neq y \in X$이면 $x \not\to_1 y$ 또는 $y \not\to_1 x$ 이므로 만약 $x \not\to_1 y$ 이면 $y \in G$이고 $x \not\in G$인 적당한 열린집합 G 가 존재한다. $y \not\to_1 x$ 인 경우도 마찬가지이므로 $(X, \mathfrak{I})$는 T_0-공간이다.

Remark 3.8. 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대하여 다음을 만족한다.

(1) $\{x\}$가 열린집합이면 $z \in X - \{x\}$에 대하여 $z \not\to_1 x$ 가 된다.

(2) X의 모든 점 z에 대하여 $z \to_1 x$ 이면 x를 갖는 열린집합은 X 뿐이다.

(3) $[x]_1 = \{y | cl\{y\} = cl\{x\}\}$.

(4) $\{[x]_1 | x \in X\}$ 와 $\{[x]_W | x \in X\}$ 는 각각 X 위에서 새로운 위상을 생성하는 기저가 될 수 있다.

정리 3.9. $\to_R$ 이 집합 X에 주어진 pre-order 일 때, 집합 $\{\langle x \rangle_R = \{y | y \to_R x\} | x \in X\}$ 는 X에 적합한 위상을 생성하는 기저가 될 수 있다.

증명. Reflexivity에 의하여, $\cup \{\langle x \rangle_R | x \in X\} = X$가 된다.

$z \in \langle x \rangle_R \cap \langle y \rangle_R$이면 transitivity에 의하여 $\langle z \rangle_R \subseteq \langle x \rangle_R \cap \langle y \rangle_R$이 된다.

따라서 $\{\langle x \rangle_R = \{y | y \to_R x\} | x \in X\}$는 X의 위상을 생성하는 기저가 될 수 있다.

정리 3.10. f가 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에서 위상공간 $(Y, \mathfrak{I}^*)$ 로

가는 함수일 때, $x \in X$ 에 대하여 다음의 성질을 얻는다.

(1) f 가 x_0 에서 연속이고 $x \to_1 x_0$이면 $f(x) \to_1 f(x_0)$이 된다.

(2) f 가 단사열린함수이고 $f(x) \to_1 f(y)$이면 $x \to_1 y$이 된다.

증명. (1) H 가 $f(x_0)$를 갖는 열린집합이면 f 가 x_0에서 연속이므로 x_0을 갖는 적당한 열린집합 G 가 존재하여 $G \subseteq f^{-1}(H)$를 만족한다. $x \to_1 x_0$ 이므로 $x \in G$ 이다.

따라서 $f(x) \in f(G) \subseteq ff^{-1}(H) \subseteq H$ 가 되어 $f(x) \to_1 f(x_0)$가 된다.

(2) G 가 y.를 갖는 열린집합이면 $f(G)$ 는 $f(x)$를 갖는 열린집합이 된다.

f 가 단사함수이므로 $x \in f^{-1}f(G) = G$가 된다.

앞에서 우리는 '충분히 가깝다'를 정의 3.1 의 (1)에서 정의한 '일방적으로 가깝다'로 정의할 수 없음을 설명하였다. 마찬가지로 정의 3.1 의 (2)와 (3)의 정의도 '충분히 가깝다'의 정의로는 적합하지 않다. 이제 우리는 보통 위상이 주어진 실수 공간 (R, U)를 동기로 하여 '충분히 가깝다'의 위상적인 개념을 정의한다.

(R, U) 의 부분집합 A가가 열린집합이 되기 위한 필요충분조건은 A의 모든 점 a에 대하여 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$를 만족시키는 양수 ε 이 존재하는 것이다.

따라서 열린구간 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$안의 모든 점은 a와 충분히(ε 만큼) 가깝다.

(A subset A of (R, U) is open $\Leftrightarrow$ there is a positive number ε with $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$ for all $a \in A$.

Thus every point $b \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ is sufficiently near(actually, ε near) to a.)

정의 3.11. 위상공간 $(X, \mathfrak{J})$의 부분집합 A와 A의 두 점 x, y에 대하여 $x=y$ 이거나 x, y를 모두 포함하고 A에 포함되는 적당한 X의 열린 부분집합 G가 존재하면 'A 안에서 x가 y에 충분히 가깝다(x is sufficiently near y in A)'고 말하고 '$x \to_s y$ in A'로 표기한다.

정의 3.11에서 $A=X$ 인 경우 $x \to_p y$ 이면 $x \to_s y$ 이다. 그러나 역은 일반적으로 성립하지 않는다. 예를 들면 $\mathfrak{J} = \{X, \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$가 집합 $X=\{1,2,3\}$에 주어진 위상일 때, X안에서 1은 3에 충분히 가깝지만 어떤 열린집합 $G(\neq X)$에 대해서도 1은 3에 적당히 가깝지 않다. 이 경우 $A=\{1,3\}$이면 A 안에서 1은 3에 충분히 가깝지 않다. 그러나 부분공간(subspace) $(A, \mathfrak{J}_A)$에서 생각하면 A 안에서 1은 3에 충분히 가깝다.

Remark 3.4에 의하면 관계 '$\to_p$'는 일반적으로 pre-order가 아니다. 그러나 관계 $\to_s$는 동치관계이다. 이제 우리는 정의 3.11이 앞에서 언급한 식 (*)를 만족시키는 정의임을 알 수 있다.

Remark 3.12. 위상공간 $(X, \mathfrak{J})$의 부분집합 A가 열린집합이기 위한 필요충분조건은 A의 모든 점 a에 대하여 A안에서 a와 충분히 가까운 점들은 모두 A에 속하는 것이다.

4. Extremally disconnected 공간

정의 4.1([1], [8]). 완비격자 L이 헤이팅(Heyting) 대수일 때, L을 frame이라고 정의한다.

즉 완비격자 L의 임의의 원소 a와 임의의 부분집합 S에 대하여 $a\wedge(\vee S) = \vee\{a\wedge s \mid s \in S\}$ 를 만족할 때, L은 frame이고, $(\vee S)^* = \wedge\{ s^* \mid s \in S \}$이다. (여기서 $s^* = \vee\{ a \mid a\wedge s=0 \}$은 s의 pseudocomplement 이다).

예 4.2. (1) 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$에 대하여 X의 위상 $\mathfrak{I}$는 frame이 된다. 이 때 $\mathfrak{I}$를 open set frame 이라고 부른다.

(2) 실수의 집합 (R, U)에 주어진 보통 위상 U 의 원소 $p = (0, 1)$과 $q = (1, 2)$에 대해 $(p\wedge q)^* = ((0, 1)\cap(1, 2))^* = \emptyset^* = R$ 이지만, $p^*\vee q^* = (0, 1)^*\cup(1, 2)^* = R-\{ 1 \}$ 이므로 $(p\wedge q)^* \neq p^*\vee q^*$가 된다.

즉, 부울 논리의 $\sim(p\wedge q) \equiv \sim p\vee\sim q$ (여기서 p, q는 임의의 명제)와 일치하지 않는다. 또한 $u = (0, 1)\cup(1, 2)$에 대하여 $u^* = (-\infty, 0)\cup(2, \infty)$이므로 $u^{**} = (0, 2)$가 되어 $u \neq u^{**}$이다. 즉, 부울 논리의 $\sim(\sim p) \equiv p$와 일치하지 않는다.

더욱이 $u\vee u^* \neq R$이므로 $p\vee(\sim p) \equiv t$ (여기서 t는 항진명제)도 성립하지 않는다.

정리 4.3. frame L에 대하여 다음은 서로 동치이다.

1) $x^* \vee x^{**} = e$ $(x \in L)$ (여기서 e는 L의 최대원이다).

2) $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$ $(x, y \in L)$.

3) $(x \vee y)^{**} = x^{**} \vee y^{**}$ $(x, y \in L)$.

4) $L_{**} = \{x^{**} \mid x \in L\}$은 L의 부분 격자이다.

5) $x \wedge y = 0$이면 $x^* \vee y^* = e$이다 $(x, y \in L)$.

6) $x^* \in BL = \{x \in L \mid x$는 역원을 갖는다$\}$.

정의 4.4. Frame L이 정리 4.3의 여섯 가지 조건 중 하나를 만족할 때, frame L을 De Morgan frame 또는 extremally disconnected frame이라 하고 DM으로 표시한다.

정의 4.5. $(X, \mathfrak{I})$가 위상공간이고 A는 X의 부분집합일 때 다음을 정의한다.

(1) 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 임의의 열린 부분집합 A에 대하여 clA도 열린 부분집합이면, $(X, \mathfrak{I})$를 extremally disconnected 공간이라고 한다.

(2) $int(clA) = A$일 때, A를 regular-open 이라고 한다.

(3) $cl(intA) = A$일 때, A를 regular-closed라고 한다.

Remark 4.6. (1) 정리 3.9에 의하여 집합 $\{\langle x\rangle_1 = \{y \mid y \rightarrow_1 x\} \mid x \in X\}$는 집합 X에 적당한 위상 $\mathfrak{I}^*$를 생성하는 기저가 될 수 있다.

(2) 관계 '$\rightarrow_1$'은 pre-order 이므로 2절에서 정의한 '$x \sim y \Leftrightarrow x \rightarrow_1 y$, $y \rightarrow_1 x$'의 동치관계 '$\sim$'는 pre-order이다. 따라서 정리

3.9에 의하여 동치류들의 집합 $\{[x]_\sim \mid x \in X\}$도 집합 X에 적당한 위상 $\mathfrak{J}^{**}$를 생성하는 기저가 될 수 있다. 이 때 생성된 위상공간 $(X, \mathfrak{J}^{**})$의 모든 열린 부분집합이 닫힌집합이므로 $(X, \mathfrak{J}^{**})$는 extremally disconnected 공간이다. 또한, 위상공간 $(X, \mathfrak{J}^{*})$의 모든 열린 부분집합은 regular open 이고 regular closed 이다.

Extremally disconnected 라는 용어는 M. H. Stone([11])에 의하여 1937년 소개 되었다. 이제 위상공간 $(X, \mathfrak{J})$의 open set frame $\mathfrak{J}$가 De Morgan frame이 되기 위한 필요충분조건은 위상공간 $(X, \mathfrak{J})$가 extremally disconnected 공간이 되는 것을 보이자.

보조정리 4.7. 위상공간 $(X, \mathfrak{J})$에 대하여 다음은 서로 동치이다.

1) $(X, \mathfrak{J})$는 extremally disconnected 공간이다.

2) $(X, \mathfrak{J})$의 열린집합 A, B에대하여 $A \cap B = \emptyset$ 이면 $clA \cap clB = \emptyset$이다.

3) $(X, \mathfrak{J})$의 닫힌집합 A, B에대하여 $A \cup B = X$ 이면 $int(A) \cup int(B) = X$이다.

정리 4.8. 위상공간 $(X, \mathfrak{J})$의 open set frame $\mathfrak{J}$가 DM이 되기 위한 필요충분조건은 위상공간 $(X, \mathfrak{J})$가 extremally disconnected 공간이 되는 것이다.

증명. $\mathfrak{J}$가 DM이면 정리 4.3의 1)에 의하여 $\mathfrak{J}$의 임의의 원소 U는 $U^{*} \vee U^{**} = X$를 만족시킨다. 즉

$int(X-U) \bigcup int(clU) = X$이므로 $(X-int(X-U)) \bigcap$

$(X-int(clU)) = \varnothing$이다.

따라서 $clU \subseteq int(clU)$이므로 $clU \in \mathfrak{I}$가 된다.

역으로 임의의 $G \in \mathfrak{I}$ 에 대하여, 보조정리 4.7을 이용하면 $G^* \vee G^{**} = int(X-G) \bigcup int(clG) = X$이므로 $\mathfrak{I}$는 DM이다.

헤이팅 대수 L이 부울 대수가 되기 위한 필요충분조건은 L의 임의의 원소 x에 대하여 $x = x^{**}$가 되는 것이다. 따라서 완비 부울 대수는 DM이 된다. 그러나 세 점으로 이루어진 chain $(\{0, x, e\}, \leq)$은 DM이지만 부울 대수는 아니다. 일반적으로 완비 chain L은 DM이지만 부울 대수는 아니고, $L_{**} = \{0, e\}$이다. 한편 예 4.2의 (2)에서 보통 위상이 주어진 실수 공간의 open set frame은 DM이 아니다. De Morgan frame은 부울 논리와는 다른 논리 체계인 직관주의 논리와 관계가 있으므로 논리학에서 중요한 의미를 갖는다. 자세한 내용은 [9]를 참고하라.

참고문헌

Bénabou, J.(1957-8), "Treillis, locaux et paratopologies", *séminaire Ehresmann(Topologie et Géométrie Différentielle)*, 1re année, exposé 2.

Bourbaki, N.(1966), *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass.,

Cameron, P., Hocking, J. G. and Naimpally, S. A.(Aug.-Sep., 1974), "Nearness-A Better Approach to Continuity and Limits", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 81, No. 7, 739-745.

Duckham, M., Worboys, M.(September 2001), "computational structure in three-valued nearness relations", *International Conference*, Proceedings of COSIT 2001 Morro Bay, CA, USA, 76-91.

Herrlich, H.(1974), "Topological Structures", *Mathematical Centre Tracts* 52, 59-122.

Herrlich, H.(1974), "A Concept of Nearness", Gen. Top, Appl., 5.

Higham, N. J.(1989), *Matrix Nearness Problems and Applications, Applications of Matrix Theory*, Oxford University Press, 1-27.

Johnstone, P. T.(1982), *Stone Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Lee, S. O.(2004), "De Morgan Frames", *The Korean Society for History of Mathematics* Vol 17-2, 73-84.

Riesz, F.(1908), "Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre", *Atti IV Congr*. Internat. Mat. Roma, II, 18-24.

Stone, M. H.(1937), "Algebraic characterizations of special Boolean rings", *Fund. Math.*, 29, 223-302.

충북대학교 수학과 이승온
Email: solee@chungbuk.ac.kr
충북대학교 컴퓨터교육과 황인재
Email: ihwang5973@hanmail.net