

# 유체-구조물 상호작용을 위한 유한요소 결합공식화의 예조건화에 대한 연구

최 형 권†

(2008년 10월 17일 접수, 2009년 2월 26일 수정, 2009년 2월 26일 심사완료)

## Preconditioning Method of a Finite Element Combined Formulation for Fluid-Structure Interaction

Hyoung-gwon Choi

**Key Words :** Preconditioning Method(예조건화 기법), Mixed Finite Element(혼합유한요소), Combined Formulation(결합공식화), AILU Preconditioner(AILU 예조건화)

### Abstract

AILU type preconditioners for a two-dimensional combined P2P1 finite element formulation of the interaction of rigid cylinder with incompressible fluid flow have been devised and tested by solving fluid-structure interaction (FSI) problems. The FSI code simulating the interaction of a rigid cylinder with an unsteady flow is based on P2P1 mixed finite element formulation coupled with combined formulation. Four different preconditioners were devised for the two-dimensional combined P2P1 finite element formulation extending the idea of Nam et al., which was proposed for the preconditioning of a P2P1 mixed finite element formulation of the incompressible Navier-Stokes equations. It was found that PC-III or PC-IV among them perform well with respect to computational memory and convergence rate for some bench-mark problems.

### 1. 서 론

예조건화 기법은 편미분 방정식의 이산화로부터 얻어지는 행렬식의 반복 해법 도구(iterative solver)들의 수렴가속화를 위한 매우 효과적인 방법이다. 특히, 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 해법에서 도출되는 행렬들은 ill-conditioned 된 경우가 많으므로 적절한 예조건화 기법을 찾는 작업은 반복 해법 도구들의 적용에 매우 중요한 요소가 된다. 지금까지 매우 많은 예조건화 기법들이 제안되었으나, 불완전 LU(ILU) 분해를 응용한 다양한 예조건화 기법들<sup>(1-3)</sup>은 타원형 편미분 방정식의 이산화로부터 유도되는 행렬을

포함한 다양한 행렬들에 대한 매우 효과적인 예조건화 기법으로 많이 적용되었다. 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 수치 해석에서 ILU 분해를 활용한 예조건화 기법들은 주로 SIMPLE<sup>(4)</sup> 알고리즘이나 분할 계산 방법(splitting method)<sup>(5,6)</sup>에서 유도되는 타원형의 압력방정식의 효과적인 해법을 위하여 적용되었다. 이들 예조건화 기법들 중에서 풀고자 하는 행렬과 동일한 non-zero 형태를 가지는 ILU 분해를 적용한 예조건화 기법이 가장 많이 사용되었다. 이 방법은 흔히 ILU(0)방법으로 표기된다.

반면에 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 혼합 유한요소 공식화(mixed finite element formulation)로부터 유도되는 행렬에 대한 예조건화 기법의 적용은 보고된 바가 적다.<sup>(7,8)</sup> 이는 혼합 유한요소 공식화를 적용한 이산화로부터 얻어지는 행렬이 zero block을 포함하는 안장점 형태(saddle-point

† 회원, 서울산업대학교 기계공학과  
E-mail : hgchoi@snut.ac.kr  
TEL : (02)970-6312 FAX : (02)949-1458

type)의 행렬을 도출하는 것과 관련이 있다. Dahl과 Wille<sup>(7)</sup>는 ILU 예조건화 기법을 혼합 유한요소 공식화로부터 유도되는 행렬의 예조건화에 확장하여 적용하기 위하여 “adapted ILU(AILU)” 예조건화 기법을 고안하였다. 그들이 제안한 AILU 방법의 핵심은 예조건화 행렬의 구성 시 기존의 ILU(0) 방법에서 고려되는 non-zero 항들에 더하여 추가적인 non-zero 항들을 혼합 유한요소 공식화로부터 유도되는 안장점 형태의 행렬의 zero block에 적절하게 배치하는 것이다. 한편, 남영석등<sup>(8)</sup>은 Dahl과 Wille가 혼합 유한요소 공식화로부터 유도되는 행렬의 예조건화 기법으로 제안한 방법을 AILU(1) 기법이라 명하고 이의 변종으로 AILU(#) 기법들을 제안하고 그들의 성능을 평가하였다. 그들은 다양한 비압축성 유동장 문제들의 수치 해석을 통하여 AILU(2) 방법이 매우 효과적인 방법임을 보고하였다. AILU(2) 방법은 기존의 AILU(1) 기법에 비하여 매우 적은 기억 용량과 계산량의 증가로 수렴 속도를 향상시킬 수 있음을 발견하였다. 이에 대한 더 자세한 내용은 문헌 [8]을 참고한다.

본 연구에서는 선행 연구를 확장하여 유동장-구조물의 상호작용의 해석을 위한 다양한 예조건화 기법들을 제안하고 그들의 수렴특성을 파악한다. 유동장-구조물의 상호 작용의 수치 해석은 Hesla<sup>(9)</sup>에 의하여 고안된 결합공식화와 P2P1 요소를 이용한 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 혼합 유한요소 공식화를 활용한다. 완전히 연성된 유동장-구조물 상호작용의 수치해석은 유동장의 지배방정식과 고체의 운동방정식이 연성된 형태로 이산화 된 전체행렬의 해법이 중요한 부분을 차지한다. 본 연구에서는 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 혼합 유한요소 공식화에 대하여 남영석등<sup>(8)</sup>이 제안한 기법을 유동장-구조물 상호작용 문제의 결합 공식화에 확장하여 적용한다. 고안된 다양한 예조건화 기법의 수렴 특성을 파악하기 위해서, 고안된 예조건화 기법을 프로그램으로 구현하고, 유동장의 형태가 복잡한 실린더와 유동장의 상호작용 문제에 적용하여 수렴 이력을 비롯한 수치적인 특성을 파악하고자 한다.

본 논문의 2 장에서는 유동장-구조물 상호작용의 결합공식화로부터 유도되는 다양한 예조건화 기법들을 제안하고 이들의 특성을 설명한다. 3 장에서는 자유낙하하는 단일 실린더 및 자유 낙하하는 두 개의 실린더들의 상호 작용 문제에 대하여 2 장에서 제안한 예조건화 기법들을 적용한 후 성능을

평가한다. 4 장에서는 결론을 제시한다.

## 2. 수치 해석 기법

2.1 유체에 대한 지배방정식과 유한요소 공식화  
비압축성 유동장에 대한 지배방정식은 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식이다. 유체/구조물 상호작용 문제에서는 격자의 이동을 고려하여 ALE (arbitrary lagrangian eulerian) 알고리즘을 사용하고 격자의 속도는 Laplace 방정식을 적당한 경계조건과 함께 푼다.<sup>(10)</sup> ALE 알고리즘을 사용한 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식에 P2P1 혼합 유한요소 공식화와 발산정리를 적용하여 약형식을 얻은 후에, 시간 적분으로 2 차 정확도를 갖고 무조건적으로 안정적인 Crank-Nicolson 방법을 적용하여 적분을 수행하면 다음과 같은 전체행렬을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} A_{uu} & A_{uv} & B_u \\ A_{vu} & A_{vv} & B_v \\ (B_u)^T & (B_v)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u \\ f_v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

식 (1)의 유도에 관한 자세한 설명은 참고문헌 [11]을 참고한다.

### 2.2 결합공식화

자유 낙하하는 실린더와 유동장의 상호작용을 완전히 내재적인 방식으로 표현한 것이 Hesla<sup>(9)</sup>에 의해 유체-입자계에서 처음으로 제안된 결합공식화 (combined formulation)이다. 결합공식화에서는 실린더에 작용하는 압력과 점성응력의 합으로 표시되는 유체력을 미지수의 형태로 실린더의 운동방정식에 연성시킨다. 즉, 실린더에 작용하는 압력과 점성응력은 기지의 값을 사용하는 게 아니라 미지수의 형태로 실린더의 운동방정식에 포함되게 된다. 따라서, 결합공식화를 적용하여 최종적으로 얻어지는 전체 조립행렬은 다음과 같은 형태로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} A_{uu} & A_{uv} & B_u & C_{uU_p} & 0 & C_{u\omega_p} \\ A_{vu} & A_{vv} & B_v & 0 & C_{vV_p} & C_{v\omega_p} \\ (B_u)^T & (B_v)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{U_p,u} & D_{U_p,v} & E_{U_p,p} & m_p & 0 & 0 \\ D_{V_p,u} & D_{V_p,v} & E_{V_p,p} & 0 & m_p & 0 \\ D_{\omega_p,u} & D_{\omega_p,v} & E_{\omega_p,p} & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ U_p \\ V_p \\ \omega_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u \\ f_v \\ 0 \\ g_{U_p} \\ g_{V_p} \\ g_{\omega_p} \end{bmatrix} \quad (2)$$

위에서 [C]는 실린더의 표면 위에 존재는 절점에서 만족되어야 하는 운동학적 구속조건으로 다음과

같다.

$$u = U_p + w_p \times (x - X_p) \tag{3}$$

식 (3)에서  $U_p$  와  $w_p$  는 실린더의 병진속도와 각속도를 나타내며,  $X_p$  는 실린더의 중심의 변위를  $x$  와  $u$  는 실린더 표면 위에 존재하는 절점의 변위와 그 점에서의 유체의 속도를 나타낸다. 위 식 (2)의 유도에 관한 자세한 설명은 참고문헌 [11]를 참고한다.

본 연구에서는 P2P1 유한요소를 이용한 결합 공식화로부터 얻어진 전체 행렬 (2)의 반복해법을 위하여 Table 1 에서 표기된 형태의 예조건화 행렬들을 제안한다. Table 1 에서  $M_f$ 는 Navier-Stokes 운동량 방정식에서 대류항, 점성항 및 속도 성분의 시간 편미분 항과 관련된 행렬이며,  $G$ 는 압력 구배,  $C$ 는 유체-구조물 경계면에서의 운동학적 구속 조건과 관련된 행렬을 나타낸다.  $G^T$ 는 유체 속도장의 발산 인자(divergence operator)를 나타내며,  $T_{fs}^v$ 와  $T_{fs}^p$ 는 유체가 구조물에 작용하는 점성응력 및 압력에 의한 traction을 나타낸다.  $M_s$ 는 구조물의 운동방정식의 이산화로부터 얻어지는 행렬이다. 마지막으로,  $\tilde{L}$  는 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 P2P1 유한요소 공식화의 효과적인 예조건화를 위하여 남영석 등<sup>(8)</sup>이 제안한 부가 행렬이다.  $\tilde{L}_2$  는 유체-구조물의 상호 작용 문제의 결합 공식화를 P2P1 유한요소를 이용하여 이산화 한 경우에는 나타나지 않으나 예조건화 기법의 성능을 향상시키기 위하여 추가로 부가한 행렬이다. 비압축성 Navier-Stokes 방정식은 대류항을 포함하고, 결합공식화에 의하여 유동장 변수와 구조물의 변수가 연성되므로 전체 조립행렬식은 비대칭 행렬이 된다. 전체 조립 행렬식은 Bi-CGSTAB(Bi-conjugate gradient stabilized)<sup>(12)</sup>를 이용하여 푼다. 예조건화 기법 1(PC-I)은 남영석 등<sup>(8)</sup>이 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 예조건화를 위하여 고안한 예조건화 행렬을 결합공식화에 확장 적용한 것이다.

따라서, PC-I에 대한 자세한 설명은 남영석 등의 논문을 참고한다. 예조건화 기법 2(PC-II)는 예조건화 행렬 PC-I에서 운동량 방정식의 속도변수와 연관된 행렬식의 대각항만을 취해서 예조건화 행렬을 만든다. 전체 조립행렬 식 (2)에서  $M$ 블록이 차지하는 비율은 매우 크므로(약 80%)  $M$ 블록의 대각항만을 취하여 예조건화를 수행하면, 예조건화 행렬이 차지하는 기억용량을 줄이고 예조건화 시간을 줄일 수 있다. 예조건화 기법 3(PC-III)은  $\tilde{L}$  블록을 생성함에 있어서 노드들의 connectivity를 정의할 때 AILU(2)<sup>(8)</sup>를 적용한 경우이다. 남영석등의 연구에 따르면 P2P1 유한요소를 사용하여 이산화 된 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 예조건화를 위하여  $\tilde{L}_2$  블록을 사용할 경우,  $\tilde{L}$  블록을 사용하는 경우에 비교하여 예조건화 행렬의 기억용량의 변화는 거의 없으면서 계산속도가 약 2 배 정도 빠른 것으로 보고되었다. 따라서, 본 연구에서는 그들의 연구 결과를 결합공식화에 확장하여 적용하고 수렴특성을 파악하고자 한다. 마지막으로 예조건화 기법 4(PC-IV)는 PC-II에 AILU(2)를 적용한 경우이다. PC-II와 마찬가지로  $M$ 블록의 대각 항이 우세할 경우에는 좋은 성능을 보일 것으로 여겨지며,  $M$ 블록의 대각항만을 취하므로 예조건화 행렬이 차지하는 기억용량을 크게 줄일 수 있다. 위의 네 가지 예조건화 기법의 수렴 특성을 파악하기 위하여 자유 낙하하는 단일 실린더와 유동장의 상호 작용 및 2 개의 실린더와 유동장의 상호 작용 문제를 해석한다.

### 3. 결과 및 토의

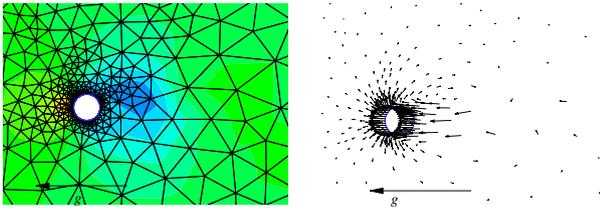
본 장에서는 Table 1 에서 제안된 예조건화 행렬의 수렴이력을 비롯한 수치 특성을 파악한다. 첫 번째 해석으로 밀도 1.0 g·cm<sup>-3</sup>, 점성 계수 0.01 g·cm<sup>-1</sup>·s<sup>-1</sup> 인 무한 유체 속에서 밀도 1.01 g·cm<sup>-3</sup> 이고 직경은 0.5 cm인 실린더가 자유 낙하하는 경우를 해석한다. Fig. 1 은 실린더 주위의 비정렬

**Table 1** Four preconditioners for the combined P2P1 finite element formulation of fluid-cylinder interaction

예조건화 기법	PC- I	PC-II	PC-III	PC-IV
예조건화 행렬의 구조	$\begin{pmatrix} M_f & G & C \\ G^T & \tilde{L} & 0 \\ T_{fs}^v & T_{fs}^p & M_s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Diag}(M_f) & G & C \\ G^T & \tilde{L} & 0 \\ T_{fs}^v & T_{fs}^p & M_s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} M_f & G & C \\ G^T & \tilde{L}_2 & 0 \\ T_{fs}^v & T_{fs}^p & M_s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \text{Diag}(M_f) & G & C \\ G^T & \tilde{L}_2 & 0 \\ T_{fs}^v & T_{fs}^p & M_s \end{pmatrix}$

**Table 2** Preconditioning matrix storage of four AILU preconditioners for the combined P2P1 finite element formulation of fluid-cylinder interaction

예조건화 기법	PC-I	PC-II	PC-III	PC-IV
행렬의 크기	<b>468794</b>	162568	490880	<b>184662</b>

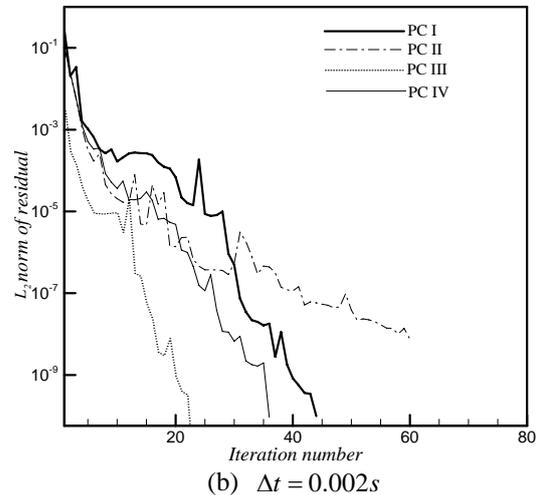
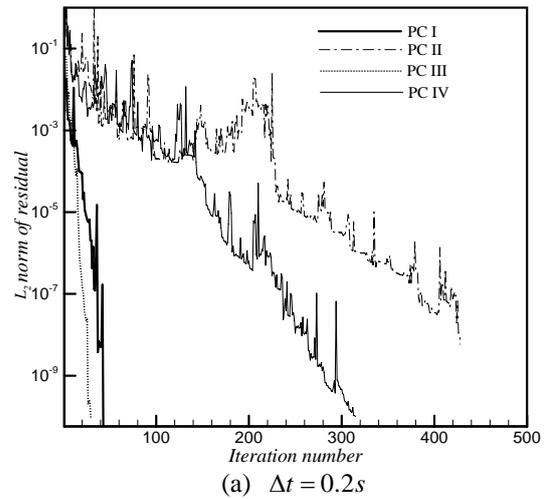


**Fig. 1** Unstructured P2P1 mesh around a single cylinder with a pressure and velocity field

격자계와 압력장 및 속도장을 나타낸다.

Fig. 1 에 주어진 비정렬 격자계는 삼각형 요소의 중앙 절점(mid-node)을 제외한 꼭지점 절점만으로 구성된 격자계를 나타낸다.

계산 초기에 사용된 비정렬 격자계의 절점 수는 7162 개이며, 요소 수는 3514 이다. 실린더의 종말(terminal velocity)과 직경을 기준으로 한 레이놀즈 수는 약 110 으로 압력장과 속도장으로부터 실린더 주위의 와류 박리는 비대칭인 Karmann vortex 를 나타냄을 볼 수 있다. Table 2 는 각각의 예조건화 기법에서 사용하는 예조건화 행렬의 크기를 나타낸다. 본 연구에서 개발한 코드는 CSR(Compressed Sparse Row) 형식을 따르므로 행렬의 크기는 행렬에서 0 이 아닌 항의 개수를 나타낸다. 따라서, 행렬의 크기는 Bi-CGSTAB 를 이용한 행렬의 해법에서 한 번의 반복 계산 당 예조건화에서 소요되는 연산의 양에 정비례한다. Table 2 에 따르면  $\tilde{L}_2$  블록의 사용에 의한 행렬 크기의 증가는 매우 적음을 알 수 있다. 반면,  $M$  블록의 대각항만을 취할 경우 행렬 크기의 감소는 매우 큼을 알 수 있다. 따라서, PC-II 와 PC-IV 의 행렬 크기는 PC-I 과 PC-III 의 약 1/3 로 감소함을 알 수 있다. Fig. 2 와 Table 3 은 다양한 시간 간격에 대한 각각의 예조건화 기법들의 수렴 이력을 나타낸다. 비정상 계산이므로 수렴 이력은 시각 2 초에서의 계산의 수렴 이력을 나타내었다. 최대 CFL 수가 약 1 보다 작을 때 PC-III 은 PC-I 에 비해서 약 2 배 빠르며 PC-IV 는 PC-II 에 비해서



**Fig. 2** Convergence histories of four preconditioners for various time step size (single cylinder)

약 2 배 수렴속도가 빠름을 알 수 있다. 따라서, 예조건화 행렬에서  $\tilde{L}_2$  블록의 사용으로 인해서 한 번의 반복계산에 소요되는 연산의 증가는 매우 작으나 수렴 속도는 2 배 증가함을 확인하였다. 따라서, 유체-구조물의 상호작용을 위한 결합 공식화에서도  $\tilde{L}_2$  블록을 사용한 예조건화 기법이 매우 효과적임을 알 수 있었다. 특히, 시간 간격이 0.002 일 경우에는 PC-IV 와 PC-I 의 수렴이력이 거의 유사함을 알 수 있었다. 따라서, 시간 간격이 적을 경우에는  $M$  블록 행렬의 대각항이 우세해서  $M$  블록의 대각항 만을 취하는 대신에  $\tilde{L}_2$  블록을 사용한 PC-IV 가 표준인 예조건화 기법 I 과 거의 같은 수렴 속도를 보임을 확인하였다. 여기서 주목할 것은 PC-IV 의 행렬 크기는 PC-I 의 약 1/3 밖에 되지 않는다는 것이다. 따라서, PC-IV 는

**Table 3** Number of iterations to convergence of four AILU preconditioners for various time step sizes (single cylinder)

예조건화 기법		I	II	III	IV
시간간격					
$\Delta t = 0.2$	$CFL_{\max} = 10.6$	43	428	<b>29</b>	315
$\Delta t = 0.02$	$CFL_{\max} = 1.06$	40	85	<b>22</b>	<b>53</b>
$\Delta t = 0.002$	$CFL_{\max} = 0.11$	44	60	23	<b>36</b>

PC-I 과 비교할 때 전체 행렬의 해를 얻기 위해서 예조건화 단계에서 소요되는 연산을 1/3 로 줄일 수 있는 큰 장점이 있다.

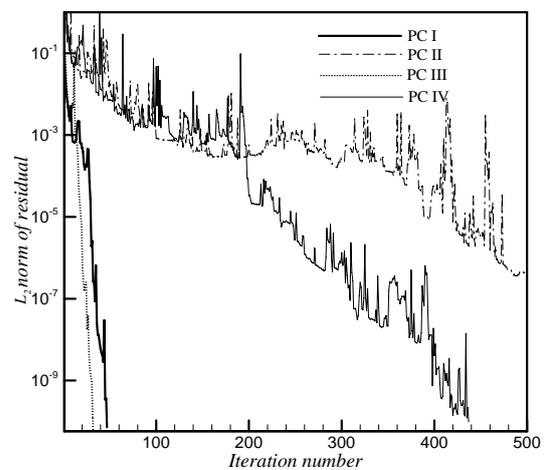
반면,  $\tilde{L}$  블록을 사용하고  $M$  블록의 대각항만을 취한 PC-II 의 수렴 속도는 표준 예조건화 기법 I 에 비하여 2 배 정도 늦어짐을 알 수 있었다.

한편, 시간 간격이 0.2 초로 매우 큰 경우 ( $CFL_{\max} \sim 11$ )의 수렴 이력은 시간 간격이 작은 경우의 결과와 다른 양상을 보인다. 시간 간격이 0.2 초인 경우 유동장의 최대 CFL 수는 약 11 정도이나, 실린더가 한 시간 간격에 이동하는 거리는 약 실린더의 직경  $d$ 에 해당한다. 따라서, 유체-구조물 상호작용의 문제라는 측면에서 보면 사용한 시간 간격은 매우 큰 시간 간격이라 할 수 있다. 시간 간격이 큰 경우 비대각항이 상대적으로 우세해서  $M$ 블록의 대각항만을 취하는 예조건화 기법의 성능이  $M$ 블록 전체를 취하는 예조건화 기법들의 성능에 비해서 크게 감소됨을 알 수 있었다.  $M$ 블록의 대각항만을 취하는 예조건화 기법들의 수렴 속도는  $M$ 블록 전체를 취하는 예조건화 기법들에 비해서 약 10 배 정도 느려짐을 확인하였다. Table 3 은 시간 간격의 크기에 따른 각각의 예조건화 기법의 성능을 반복 계산 횟수를 비교함으로써 나타낸 것이다. 시간 간격이 적절하거나 충분히 작을 때는  $M$ 블록의 대각항만을 취하는 기법이 아주 효율적임을 알 수 있었다. 단, 시간 간격이 아주 클 경우에는  $M$ 블록의 대각항만을 취하는 기법을 피해야 한다. 또한, 시간 간격에 상관없이  $\tilde{L}_2$  블록을 사용한 경우 매우 적은 양의 추가 계산으로 예조건화 기법의 효율이 크게 향상됨을 알 수 있었다. 따라서, 시간 간격이 매우 클 경우에는 PC-III을 그렇지 않을 경우에는 PC-IV의 성능이 뛰어난 것을 알 수 있다.

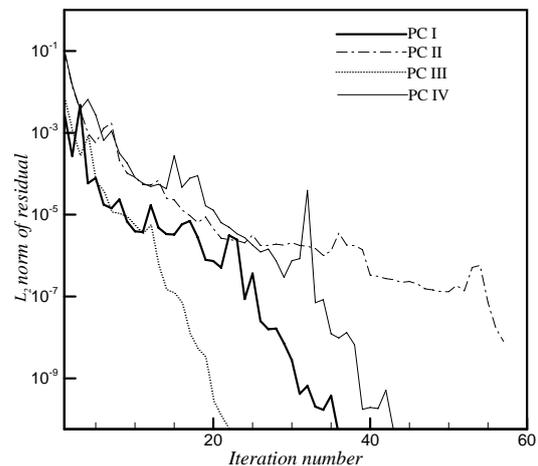
Table 4 는 2 개의 자유 낙하하는 실린더와 유동장의 상호 작용 문제에 대하여 시간 간격의 크기에 따른 각각의 예조건화 기법의 성능을 반복

**Table 4** Number of iterations to convergence of four AILU preconditioners for various time step sizes (two cylinders)

예조건화 기법		I	II	III	IV
시간간격					
$\Delta t = 0.2$	$CFL_{\max} = 10.3$	47	665	<b>32</b>	43
$\Delta t = 0.02$	$CFL_{\max} = 1.03$	35	75	<b>22</b>	<b>57</b>
$\Delta t = 0.002$	$CFL_{\max} = 0.1$	36	57	22	<b>43</b>



(a)  $\Delta t = 0.2s$



(b)  $\Delta t = 0.002s$

**Fig. 3** Convergence histories of four preconditioners for various time step size (two cylinders)

계산 횟수를 비교함으로써 나타낸 것이다.

Fig. 3 은 시간 간격을 0.2 과 0.002 로 했을 때 각각의 예조건화 기법들의 수렴이력을 나타낸다.

단일 실린더와 마찬가지로 수렴 이력은 시각 2 초에서의 계산의 수렴 이력을 나타내었다.

전체적인 경향은 단일 실린더의 해석 결과와 유사함을 알 수 있었다. 따라서, 결론적으로 가장 이상적인 예조건화 기법은  $\tilde{L}_2$  블록을 사용하며, 적절하거나 작은 시간 간격의 경우에는  $M$  블록의 대각항만을 취하는 기법을 제안하고자 한다.

#### 4. 결 론

(1) 남영석 등<sup>(8)</sup>에 의하여 제안된 비압축성 유동장의 P2P1 혼합 유한 요소 공식화에 대한 예조건화 기법을 확장하여, 비압축성 유동장과 변형하지 않는 고체 구조물의 상호작용에 대한 P2P1 유한 요소 결합 공식화로부터 얻어지는 전체 행렬에 대하여 다양한 AILU 예조건화 기법을 제안하였다.

(2) 비압축성 유동장과 변형하지 않는 고체 구조물의 유한요소 결합 공식화로부터 얻어지는 행렬의 예조건화 기법에서  $\tilde{L}_2$  블록의 사용으로 인해서 한 번의 반복계산에 소요되는 연산의 증가는 무시할 만큼 작으나 수렴 속도는 약 2 배 증가함을 확인하였다.

(3) 본 연구를 통하여 비압축성 유동장과 변형하지 않는 고체 구조물의 결합 공식화에 대한 가장 이상적인 예조건화 행렬의 형태가 제안되었다. 안장점 형태 행렬의 zero 영역에는  $\tilde{L}_2$  블록을 사용하며, 적절하거나 작은 시간 간격의 경우에는  $M$  국소 행렬의 대각항만을 취하며 큰 시간 간격의 경우에는  $M$  행렬 전체를 취하여 AILU 분해를 하는 예조건화 기법이 제안되었다.

#### 후 기

이 논문은 2008 년도 정부(과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. R01-2006-000-11122-0).

#### 참고문헌

(1) Meijerink, J. A. and van der Vorst, H. A., 1977, "An

- Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix," *Math. Comput.*, Vol. 31, pp. 148~162.
- (2) Meijerink, J. A. and van der Vorst, H. A., 1981, "Guidelines for the Usage of Incomplete Decompositions in Solving Sets of Linear Equations as They Occur in Practical Problems," *J. Comput. Phys.*, Vol. 44, pp. 134~155.
- (3) Kershaw, D. S., 1978, "The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the Iterative Solution of Systems of Linear Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 26 pp. 43~65.
- (4) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York.
- (5) Chorin, A. J., 1968, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," *Math. Comput.*, Vol. 22, pp. 745~762.
- (6) Choi, H. G., 2000, "Splitting Method for the Combined Formulation of the Fluid-Particle Problem," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 190, pp.1367~1378.
- (7) Dahl, O. and Wille, S. Ø., 1992 "An ILU Preconditioner with Coupled Node Fill-in for Iterative Solution of the Mixed Finite Element Formulation of the 2D and 3D Navier-Stokes Equations," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 15, pp. 525~544.
- (8) Nam, Y. S., Choi, H. G. & Yoo, J. Y., 2002, "AILU Preconditioning for the Finite Element Formulation of the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp.4323~4339.
- (9) Hesla, T. I., "Combined Formulation of Fluid-Particle Problem" (unpublished note, 1991)
- (10) Hu, H. H., Patankar, N. A. and Zhu, M. Y., 2001, "Direct Numerical Simulations of Fluid-Solid Systems Using the Arbitrary Lagrangian-Eulerian Technique," *J. Comp. Phys.*, Vol. 169, pp.427~462.
- (11) Namkoong, K., Choi, H. G. and Yoo, J. Y., 2004, "Numerical Analysis of Two-Dimensional Motion of a Freely Falling Circular Cylinder in an Infinite Fluid," *Trans. of the KSME (B)*, Vol. 28, No. 6, pp. 713~725.
- (12) van der Vorst, H. A., 1992, "Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Non-Symmetric Linear Systems," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 12, pp. 631~634.