

몬테카를로 시뮬레이션에 의한 미소 비커스 경도의 Weibull 통계 해석

김선진[†] · 공유식^{*} · 이상열^{**}

(2009년 1월 16일 접수, 2009년 2월 9일 수정, 2009년 3월 26일 심사완료)

Weibull Statistical Analysis of Micro-Vickers Hardness using Monte-Carlo Simulation

Seon-Jin Kim, Yu-Sik Kong and Sang-Yeal Lee

Key Words: Micro-Vickers Hardness(미소 비커스 경도), As-Received(압연재), Quenching and Tempering(담금질 및 뜨임), Weibull Statistical Analysis(Weibull 통계해석), Coefficient of Variation(변동계수), Reliability(신뢰성)

Abstract

In the present study, the Weibull statistical analysis using the Monte-Carlo simulation has been performed to investigate the micro-Vickers hardness measurement reliability considering the variability. Experimental indentation test were performed with a micro-Vickers hardness tester for as-received and quenching and tempering specimens in SCM440 steels. The distribution of micro-Vickers hardness is found to be 2-parameter Weibull distribution function. The mean values and coefficients of variation (COV) for both data set are compared with results based on Weibull statistical analysis. Finally, Monte-Carlo simulation was performed in order to evaluate the effect of sample size on the micro-Vickers hardness measurement reliability. For the parent distribution with shape parameter 30.0 and scale parameter 200.0 (COV=0.040), the number of sample data required to obtain the true Weibull parameters was founded by 20. For the parent distribution with shape parameter 10.0 and scale parameter 200.0 (COV=0.1240), the number of sample data required to obtain the true Weibull parameters was founded by 30.

1. 서 론

경도는 재료 표면의 부분적인 변형이나 마모에 대한 저항을 나타내는 특성치로 측정이 용이하고 또한 신속하게 데이터를 얻을 수 있을 뿐 아니라 인장강도 등과 같은 기계적 성질과도 강한 상관성이 존재하기 때문에 현장에서 많이 이용되고 있다.

특히, 미소 비커스 경도 시험은 용접부나 각종 고강도 재료의 경도를 특성화하는데 이용되는 일반적인 방법이다.^(1,2) 이러한 경도 시험법은 일반적으로 시험하기가 간편하고 측정에 이용되는 재료의 사용량이 적을 뿐 아니라, 비파괴적이며, 또한 반복적으로 많은 양의 데이터를 짧은 시간에 얻을 수 있어 재료의 물성을 평가하기 위하여 많이 이용되고 있다.⁽³⁾ 그러나 인장강도, 항복강도 등과 같은 정적 재료 강도나 경도(hardness)도 통상의 적은 량의 시험편 또는 소수의 측정 데이터의 평균치가 사용되고 있다. 이러한 것으로부터 알 수 있듯이, 이들은 확정치가 아니고 변동(variation)을 나타내는 하나의 확률변수(random variable)임을 알 수 있다. 이러한 변동의 원인으

[이 논문은 2008년도 재료 및 파괴부문 춘계학술대회 (2008. 5. 29.-30., 충북대) 발표논문임]

[†] 책임저자, 종신회원, 부경대학교 기계공학부
E-mail : sjkim@pknu.ac.kr

TEL : (051)629-6163 FAX : (051)629-1405

^{*} 회원, 부경대학교 기계공학부

^{**} 회원, 포항대학 자동차계열

로는 하중을 포함한 시험조건, 시험편 및 시험기 등의 부정확성이나 시험기술의 숙련도 같은 것에도 기인하지만, 재료의 확률적 본성(nature of the material), 그의 미시조직, 열처리 조건의 불균일, 시험편의 가공방법(nature of the surface)이나 잔류응력 등의 변동, 기계적 성질 고유의 변동 등을 생각할 수 있다.⁽⁴⁾ 현실적으로는 이와 같은 요인들이 중복하고 있기 때문에 변동은 복잡한 양상을 나타내고 그 원인을 특정 짓는 것도 용이하다고는 할 수 없다. 그러므로 경도 등과 같은 기계적 성질의 평균치나 분산 등의 통계적 특성 뿐만 아니라 그들의 정량적 확률 분포 특성을 파악하고 평가하는 것은 재료의 설계, 제조 및 개발이나 기계·구조물의 신뢰성 설계, 설계의 합리화 및 품질관리의 기초 데이터로 아주 중요하다.

경도의 확률분포로서 정규분포, 대수정규분포, 2-파라미터 와이블분포 그리고 3-파라미터 와이블분포가 많이 이용되고 있다.^(5~8) 이들의 분포형은 변동계수가 큰 경우에는 전체적인 형이 분명히 다르지만, 변동계수가 작은 경우에는 편측 부분의 형은 그다지 다르지 않는다. 이와 같은 이유로, 동일 데이터가 정규분포, 대수정규분포, 와이블 분포 중 두 분포 혹은 세 분포에 거의 일치하는 경우가 많다. 이러한 경우에는 분포형의 선택에 주의할 필요가 있다. 또한 정확한 통계 파라미터를 추정하기 위해서는 표본수를 크게 할 필요가 있다.

이러한 관점에서, 본 연구에서는 감속기의 기어박스 재료인 SCM440의 압연재(as-received)와 열처리재(QT)에 대한 미소 비커스 경도 시험을 통하여 각각의 통계적 변동성과 확률분포를 특성화하고, 통계적 파라미터의 진치(true value)가 정확히 2-파라미터 와이블 분포에 따르는 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하여 경도 측정의 신뢰성에 미치는 표본수의 영향을 고찰하고자 하였다.

2. 미소비커스 경도와 확률분포

대면각이 136 °인 피라미더 형상의 다이아몬드 압입자를 사용하는 마이크로 혹은 미소 비커스 경도(micro-Vickers hardness)는 일반적으로 다음 식에 의하여 계산된다.⁽⁹⁾

$$HV = \kappa \frac{P}{d^2} \tag{1}$$

여기서, κ 는 압입자의 형상에 의존하는 상수이며, $\kappa=1.8544 \times 10^4$ 값을 갖는다. 그리고 P 는 하중(g), d 는 압입 대각선의 평균길이(μm)이다. 통상적으로 경도의 단위(unit)는 식 (1)과 같이 응력의 단위를 갖지만 일반적으로 생략하여 사용된다.

일반적으로 미소 비커스 경도를 측정하게 되면 그 값이 동일한 시험체에서도 측정위치에 따라 변동성(variability)이 존재함을 알 수 있다. 그 이유는 여러 가지가 있을 수 있지만, 미시조직이 국소적으로 불균질(inhomogeneous)하고 압입면의 미시조직이 장소에 따라 확률적(stochastically)으로 다르기 때문이다.

지금, 시험체에서의 가상의 미소 영역(small cell, δ , 이하에서는 이를 셀(cell)이라 정의한다.)을 도입한다. Fig. 1은 그 개념도이다. 셀은 미시조직을 구성하는 최소 단위의 비커스 경도라 할 수 있다. 이 때, 가상의 미소 영역의 통계적 특성은 다음 식 (2)로 표현할 수 있다.

$$\Pi_{\delta}(\alpha, \beta, \gamma) \tag{2}$$

여기서, Π_{δ} 는 가상의 확률분포함수(probability distribution function, PDF), α 는 분포의 형상 파라미터(shape parameter), β 는 척도 파라미터(scale parameter), 그리고 γ 는 위치 파라미터(location parameter)이다.

δ 는 시험체의 미소 영역, 즉 unit cell에서의 경도를 의미하며, 어떤 장소(x, y)에서의 하나의 확률변수(random variable)이다.

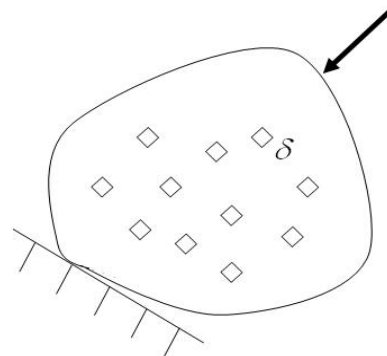


Fig. 1 Schematic diagram of unit cell in a plane

이러한 미소 비커스 경도의 확률분포는 문헌에 의하면, 정규분포(Gaussian distribution), 대수정규 분포(Log-normal distribution) 혹은 Weibull 분포(Weibull distribution)에 따른다고 하는 연구 결과가 많다.^(6-8,10)

본 연구에서는 이상의 결과와 해석의 편의성 그리고 최약링크가설을 고려하여 미소 비커스 경도의 확률분포를 $\gamma=0$ 인 2-parameter Weibull로 가정하여, 본 재료에 대한 미소 비커스 경도의 통계적 해석을 수행하고자 한다.

2-parameter Weibull 분포의 확률분포함수(PDF)는 아래와 같이 주어진다.⁽¹¹⁾

$$F_{\delta}(HV) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{HV}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad (3)$$

여기서, a 는 형상 파라미터(shape parameter)이고, β 는 척도 파라미터(scale parameter)이다.

2-parameter Weibull 분포의 평균치 μ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\mu = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (4)$$

여기서, Γ 는 감마함수(gamma function)이다. 그리고 변동계수(coefficient of variation) η 는 다음과 같다.

$$\eta = \left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)}{\left\{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right\}^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (5)$$

여기서 알 수 있듯이, η 는 a 만의 함수로 주어지며, a 가 증가하면 η 는 감소하게 됨을 알 수 있다.

3. 실험방법 및 절차

3.1 재료 및 시험편

본 연구에 사용된 실험재료는 SCM440 (JIS G4105)의 구조용 합금강이며, 내마모성, 내충격성, 높은 피로 저항을 갖는 Cr-Mo 중탄소강으로, 주된 용도는 기어, 부속품, 볼트, 축, 코레트 등에 많이 이용된다. 본 연구에 사용된 재료의 화학적

성분과 기계적 성질을 Table 1과 Table 2에 각각 나타내었다.

SCM440 환봉의 QT열처리 공정을 Fig. 2에 나타내었다. 본 연구에서는 850°C에서 190분유지 후 60°C까지 유냉한 다음 580°C에서 180분간 템퍼링 처리 후 공랭하여 미시조직을 균일하게 하였다.

3.2 실험장치 및 실험방법

본 연구에 사용된 미소비커스 경도시험기(micro Vickers hardness tester)는 Hitachi사의 HM-124 모델로 하중제어를 자동으로 수행 할 수 있으며, 시험하중은 0.5 g부터 2 kg까지 가능하고 가압시간(duration time)도 5 초에서 99 초까지 조절 가능하도록 되어있으며, 자동과 수동으로 경도 측정이 가능하다. Fig. 3에 본 실험에 사용된 경도시험기를 나타낸다.

비커스 경도시험은 ASTM E384-05 규격⁽⁹⁾에 준하여 측정자의 오차(error of the measurement)를 감소하기 위하여 동일 시험자가 경도시험을 수행하였다. 시험하중의 조건은 0.981 N (100 g)으로 하였다. 한편 가압시간은 모두 10초로 하였다.

Table 1 Chemical composition of SCM440 (wt. %)

C	Si	Mn	P	S	Cu	Ni	Cr	Mo	Fe
0.41	0.26	0.74	0.01	0.012	0.14	0.06	1.0	0.19	Bal.

Table 2 Mechanical properties of a test material

Tensile strength σ_t (MPa)	Yield strength σ_y (MPa)	Elongation ϵ (%)	Reduction of area ψ (%)	Hardness HV	Impact energy (Kg · m)
1143	1032	16.6	52.6	204	7.5

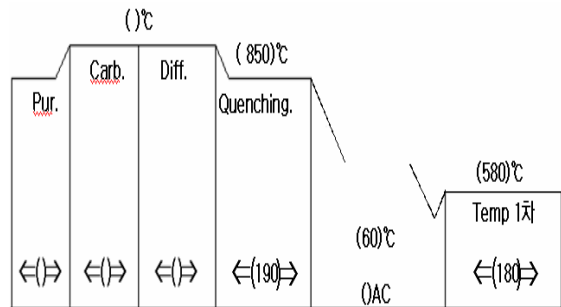


Fig. 2 Summary of heat treatment process



Fig. 3 Micro Vickers hardness tester (HM-124)

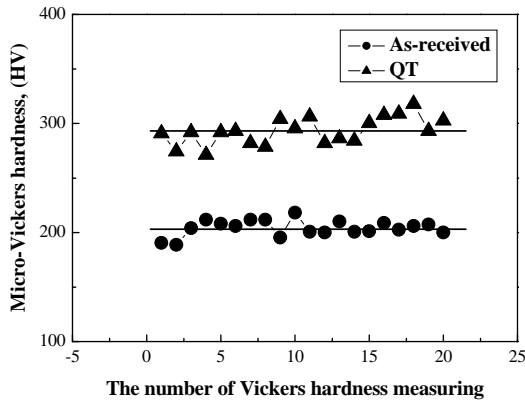


Fig. 4 Vickers hardness value of a function of running number

또한 동일한 표면 거칠기를 갖도록 사포 1000~1500으로 표면 경면 연마를 하여 표면 거칠기를 측정하였으며, 미소 경도치에 미치는 표면 조도의 영향을 최소화하기 위하여 중심선 평균 거칠기 Ra 는 약 $0.03 \mu m$ 로 연마하고 조건을 일정하게 하여 경도를 측정하였다. 본 연구에서는 압연재(As-received)와 열처리재(QT)에 대하여 각각 20회의 경도 값을 주의 깊게 측정하였다.

4. 결과 및 고찰

4.1 미소 비커스 경도의 통계적 성질

Fig. 4는 압연재와 열처리재 각각 20회의 경도 측정값을 나타낸 것이다. 평균적으로 열처리재가 압연재보다 90정도 높은 경도 값을 갖는 것을 알 수 있다.

Table 3은 압연재와 열처리재의 경도치에 대한 통계적 성질을 나타낸다. 표에서 알 수 있듯이,

Table 3 Statistical Properties of micro-Vickers hardness values

	Number of testing	Average Vickers hardness (kgf/mm ²)	Standard deviation of HV (kgf/mm ²)	Coefficient of variation (COV)
As-received	20	204.195	7.355	0.036
Heat-treated	20	293.155	12.475	0.043

(In case of load 100 g, duration time 10 sec)

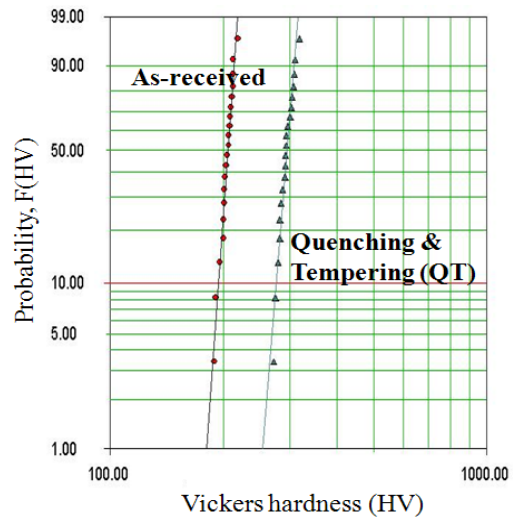


Fig. 5 2-parameter Weibull plots for micro-Vickers hardness data

미소 비커스 경도의 산술 평균(arithmetic mean)은 열처리재의 경우가 293, 모재의 경우가 204로 열처리재의 경도가 압연재보다 약 43% 증가하였다. 또한 변동계수(COV)는 각각 3.6%, 4.3%로 열처리재가 압연재보다 약 18%증가한 것을 알 수 있다. 비커스 경도의 평균은 열처리에 의해 조직이 변화하면서 증가하였고, 변동계수(COV)의 증가는 열처리에 의한 결정입도가 불균일하고, 미세조직이 불균질하여 변동이 증가되었다고 사료된다.

4.2 Weibull 확률 분포

Fig. 5는 압연재와 열처리재에 대한 미소 비커스 경도를 2-parameter Weibull 확률지에 나타낸 것이다. 확률지상에서 알 수 있듯이, 압연재(●)와 열처리재(▲) 모두 2-parameter Weibull 분포에 적합함을 알 수 있다. 또한 압연재와 열처리재에 대한 분포의 형상 파라미터 a 와 척도 파라미터 β 의 영향을 Table 4에 나타내었다.

Table 4 Statistical properties of micro-vickers hardness values

	Sample size	μ (a-mean)	η (a-COV)	Remarks
As-received	20	204.1	0.039	$a = 32.9$
		(204.2)	(0.036)	$\beta = 207.5$
Heat-treated	20	292.9	0.044	$a = 28.3$
		(293.2)	(0.042)	$\beta = 298.6$

Table 4에 비커스 경도의 평균치(μ)와 변동계수(η)를 식 (4)와 식 (5)에 의해 구하여 산술적 통계치를 포함하여 나타내었다. Table 4에서 알 수 있듯이, 압연재 및 열처리재 모두 Weibull 통계에 의하여 해석될 수 있음을 확인 할 수 있다. 그러나 여기서 선택된 분포형이 절대적인 것이라고는 생각되지 않으나, 본 연구에서의 경도의 분포가 2-parameter Weibull 분포에 적합하며 평균치 혹은 변동성을 고찰하는 것이 가능함을 알 수 있다.

4.3 몬테카를로 시뮬레이션에 의한 미소비커스 경도의 Weibull 통계 해석

본 연구에서는 식 (3)의 2-parameter Weibull 분포에 따르는 모집단 데이터를 대상으로, 몬테카를로 시뮬레이션 법⁽¹²⁾을 이용하여 원분포(parent distribution)가 Table 5와 같은 조건으로 완전히 2-parameter Weibull 분포에 따르는 확률변수를 각각 100개씩 추출하였다. 추출한 통계적 파라미터는 진의 확률분포에 잘 따름을 알 수 있었다. 추출된 이들 100개의 모집단 데이터에서 임의의 데이터(표본수, n)를 무작위적으로 5, 10, 20, 30, 40, 50, 80 그리고 100개를 샘플링하여 표본수에 미치는 Weibull 분포의 형상 파라미터 및 척도 파라미터의 영향을 고찰하였다.

Fig. 6 및 Fig. 7는 각각 변동계수(COV)가 0.040 (shape parameter, $a=30.0$)인 경우에 대한 표본수에 미치는 와이블 분포의 형상 파라미터와 척도 파라미터의 영향을 나타낸 것이다. Fig. 6에서 알 수 있듯이 표본수가 감소함에 따라 그 형상 파라미터는 감소함을 알 수 있다. 즉, 완전히 2-parameter Weibull 분포에 따르는 확률변수라 하여도 표본수에 의하여 형상 파라미터가 원분포의 형상 파라미터와는 일치하지 않는다. 그러나 Fig.

Table 5 Simulation conditions considering COV

COV	Sample size	a	β	Remarks
0.040	100	30.0	200	2-p
0.012	100	10.0	200	Weibull

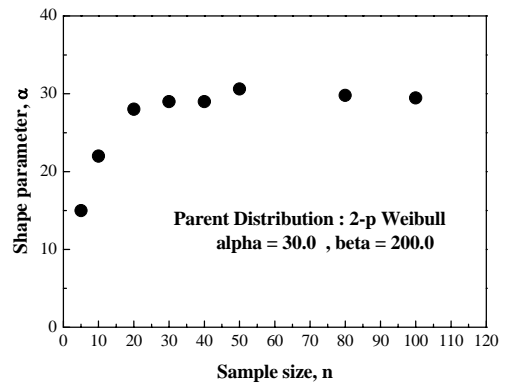


Fig. 6 Effect of sample size, n on shape parameter ($\eta=0.040$)

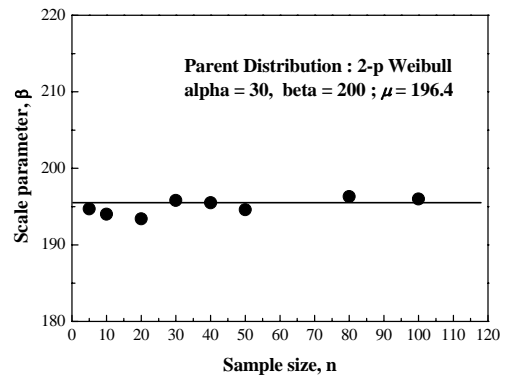


Fig. 7 Effect of sample size, n on scale parameter ($\eta=0.040$)

7의 척도 파라미터의 경우에는 소 표본의 경우에도 거의 원분포의 척도 파라미터와 그렇게 차이가 나지 않음을 알 수 있다. 이상의 고찰로부터, 변동계수를 고려한 측정값의 신뢰성을 유지하기 위해서는 적어도 원분포의 형상 파라미터 값을 가지는 표본수 20개 정도의 측정 데이터가 필요함을 알았다.

Fig. 8과 Fig. 9는 각각 변동계수(COV)가 0.120 (shape parameter, $a=10.0$)인 경우에 대한 표본수

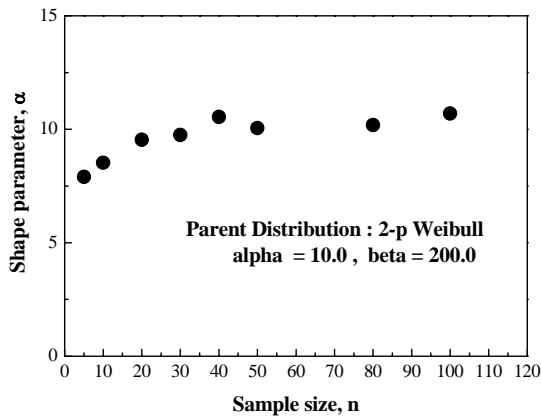


Fig. 8 Effect of sample size, n on shape parameter ($\eta=0.120$)

에 미치는 와이블 분포의 형상 파라미터와 척도 파라미터의 영향을 나타낸 것이다. Fig. 8에서도 알 수 있듯이, 이 경우에도 변동계수가 0.040의 경우와 같이 형상 파라미터는 표본수의 감소에 따라 감소하고 있음을 알 수 있다. 즉, 완전한 원분포 데이터라 하여도 표본수가 감소하면 변동이 증가함을 알 수 있다. Fig. 9에서 보면, 척도 파라미터 또한 표본수가 감소하면 감소하는 경향을 보였다. 이 결과에서 변동계수가 0.120의 경우에는 진의 측정 신뢰성을 확보하기 위해서는 적어도 30개의 표본수가 필요함을 알 수 있다.

이상의 결과를 이용하여 변동계수를 고려한 정도의 측정 신뢰성(measuring reliability)을 고려한 표본수를 Table 6에 요약하였다. 즉, 원분포가 2-parameter Weibull 분포에 따른다고 가정한 경우 형상 파라미터가 감소하게 되면 더 많은 표본수가 필요함을 알 수 있다.

5. 결 론

(1) SCM440의 압연재와 열처리재의 미소 비커스 경도의 산술평균은 각각 204 및 293을 나타내었으며, 모두 통계적 변동성이 존재함을 알 수 있었다. 그 변동계수는 압연재가 0.036, 열처리재가 0.042로 열처리재의 경우가 압연재보다 16.7% 높게 나타났다.

(2) 미소비커스경도치의 확률분포는 2-parameter Weibull분포에 잘 따름을 알 수 있었고, 압연재

Table 6 Number of sample size for COV

COV (%)	a	β	Sample size (n)
0.040 (0.40%)	30	200	20
0.120 (12.0%)	10	200	30

(Parent distribution : 2-parameter Weibull)

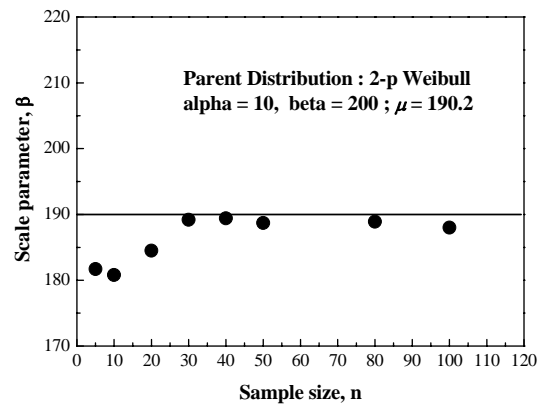


Fig. 9 Effect of sample size, n on scale parameter ($\eta=0.120$)

및 열처리재 모두 Weibull 통계에 의하여 해석될 수 있음을 확인 할 수 있었다.

(3) 완전히 2-parameter Weibull분포에 따르는 몬테카를로 시뮬레이션의 수행 결과, 표본수에 의한 분포의 형상 파라미터 및 척도 파라미터가 원분포의 진치와 다를 수 있음을 알았다. 즉 형상 파라미터는 표본수가 감소하면 감소하는 결과를 보였다.

(4) 변동계수를 고려한 표본수의 영향을 고찰한 결과, 변동계수가 각각 0.040과 0.120일 경우 분포형을 고려한 표본수는 적어도 각각 20 및 30개의 데이터가 필요함을 알았다.

후 기

본 연구의 실험과 데이터 정리에 수고한 대학원생 최성웅, 권혁용군에게 감사의 의를 포함합니다. 또한 본 논문은 2008년도 부산에서 개최된 한국동력기계공학회 추계학술대회에서 발표된 논문을 근간으로 하고 있음을 밝힙니다.

참고문헌

- (1) Kong, Y. S. and Kim, S. J., 2006, "Mechanical Properties of Dissimilar Friction Welded Steel Bars in Relation to Post Weld Heat Treatment," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 30, No. 4, pp. 402~408.
- (2) Kang, K. W., Shim, H. J., Lee, B. J., Jhang, K. Y. and Kim, J. K., 2006, "An Analysis for Failure Mechanisms and Strength Evaluation on Brazed Joint," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 30, No. 10, pp. 1298~1304.
- (3) Kwon, H. Y., Choi, S. Y., Lee, S. Y., Kong, Y. S. and Kim, S. J., 2008, "A Study on Statistical Properties of Vickers Hardness of Friction Welded Parts in Alloy718 Steel," *J. of KSOE*, Vol 22, pp. 15~21.
- (4) Working Group for Probabilistic Models of Material Strength, 1992, "Statistical Properties of the Material Strength," Yang-Hyen Dang, Ltd, pp. 1~22.
- (5) Veprek, S., Mukherjee, S., Mannling, H. D. He, J., 2003, "On the Reliability of the Measurements of Mechanical Properties of Superhard Coatings," *Materials Science & Engineering A*, A340, pp. 292~297.
- (6) Factor, M. and Roman, I., 2000, "Vickers Microindentation of WC-12%Co Thermal Spray Coatings," *Surface and Coating Technology*, Vol 132, pp. 181~193.
- (7) Lin, C. K. and Berned, C. C., 1995, "Statistical Analysis of Microhardness Variations in Thermal Spray Coatings," *J. Material Science*, Vol 30, pp. 111~117.
- (8) Schneider, J. M., Bigerelle, M. and Iost, A., 1999, "Statistical Analysis of the Vickers Hardness," *Material Science and Engineering A262*, pp. 256~263.
- (9) ASTM, 2005, "ASTM E384-05 Standard Test method for Microindentation Hardness of Materials," ASTM Standard.
- (10) Yanchev, I. Y., Trifonova, S. P., Karakotsou, C., Anagnostopoulos, A. N. and Bleris, G. L., 1995, "Analysis of Microhardness Data in TiXln1-xSe," *J. Material Science*, Vol 30, pp. 5576~5580.
- (11) Weibull, W., 1951, "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability," *J. of Applied Mechanics*, Vol 18, pp. 293~297.
- (12) Rao, S. S., 1992, "Reliability-Based Design," McGraw-Hill, Inc. pp. 469~495.