韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2009. 02. 제 48권, 제 1호, 93-105.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2009, Vol. 48, No. 1, 93-105.

# 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토

박 경 미 (홍익대학교)

## I. 들어가는 말

Felix Klein은 100여년 전 '이중단절(double discontinuity)' 문제를 지적한 바 있다. 예비교사가 대학에 진학하면 중등학교 수학과 차원이 다른 추상적인 순수수학을 배우게 되면서 한 번의 단절을 경험하고, 예비교사 교육을 받고 현직교사가 되면 대학에서 배운 순수수학은 대부분 망각에 묻은 채 중등학교에서 배운 수학을 되살리며 가르치게 되어 또 한 번의 단절을 경험한다는 것이다. Klein은 예비교사 교육이 학문적 수학 자체에 지나치게 집중되어 있다는 점에서 문제의식을 느끼고, 학문적 수학과 학교수학을 연결짓는 것이 필요함을 강조하였다. 실제 Klein은 그런 자신의 생각을 구현하기 위하여 학교수학을 수학자의 관점에서 설명한 *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint* (Klein, 1908, 1932)를 저술하였다.

수학교사는 '학문으로서의 수학(mathematics as a discipline)'를 충분히 이해하고 학문으로서의 수학을 '학교수학(mathematics as an educational task)'으로 변환시키는 과정에 대한 인식 뿐 아니라, 학습자의 다양한 수학적 사고에 기초하여 학생들의 이해를 촉진시킬 수 있는 적절한 교수 방법을 구안하는 능력 등을 종합적으로 갖추어야 한다. 수학교사의 전문성은 단지 수학과 일반 교육학에 대한 지식 뿐 아니라 학교수학에 대한 폭넓은 교육적 이해를 토대로 해야 한다는 아이디어는 광범위한 호응을 얻었으며, 이는 PCK(pedagogical content knowledge, 교수학적 내용 지식)[1]라는 개념으로 정립되었다.

수학교육을 비롯한 사회과학에서는 대체적으로 어떤 개념에 대해 명확하게 합의된 정의가 존재하지 않으며, PCK 역시 예외는 아니다. PCK는 수학에 대한 내용 지식 및 일반 교육학 지식과 차별화되는 제3의 지식으로, 수학교육 연구에서 비교적 활발하게 논의되고 있지만 그 정의와 구성 요소에 대한 명시적인 논의가 충분히 이루어지지 못한 경향이 있다. 이에 본고는 PCK에 대한 지난 20여년의 국내와 국외 연구들을 종합적으로 검토하고, 이에 기초하여 수열의 극한에 대한 PCK를 예시하고, PCK를 측정하기 위한 외국의 문항을 개관한 후, 중등교원 임용시험 문항을 반성적으로 평가하고자 한다.

## II. 수학 교과의 PCK에 대한 연구의 검토

수학교육학은 역사가 그리 길지 않은 신생 학문이라고 볼 수 있지만, 점진적으로 학문적 정체성을 확보해왔다. 수학교육학은 수학과 교육학을 단순히 물리적으로 결합해 놓은 '단순합'이 아니라는 점은 수학교육학이 학문적으로 정립되는 과정에서 공감을 얻어왔다. 학문적 정체성을 갖는 수학교육학이 되기 위해서는 수학과 교육학의 '혼합물' 상태가 아니라 이 두 가지가 만나 모종의 화학적 변화를 거친 '화합물' 상태가 되어야 한다 (박경미, 1997). 이 때 수학과 교육학을 원재료로 하는 화합물의 핵심은 수학 교과에 대한 PCK(교수학적 내용 지식)라고 할 수 있다. 이 절에서는 수학 교과의 PCK가 국내와 국외에서 어떻게 연구되어 왔는지 검토하고 정리하고자 한다.

* 이 논문은 2006학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.
* 접수일(2009년 1월 28일), 수정일(1차 : 2009년 2월 19일), 게재확정일(2009년 2월 23일)
* ZDM분류 : B59
* MSC2000분류 : 97B50
* 주제어 : 교수학적 내용 지식(PCK)

1) PCK(pedagogical content knowledge)는 교육학적 내용 지식, 내용 교수 지식, 교수법적 내용 지식, 교수 내용적 지식, 교수 내용 지식, 교수적 내용 지식 등 여러 가지로 번역되었으나, 본 고에서는 PCK를 직역한 '교수학적 내용 지식'으로 명명한다.

1. 국내의 연구

(1) 한국교육개발원의 <수학교과학 연구>

<수학교과학 연구>(이돈희 외, 1997)는 PCK라는 용어를 본격적으로 사용하지는 않았지만, 수학교육학의 개념화와 구조화를 통해 수학교육학의 학문적 정체성을 확보하고 수학교사의 전문성을 부각시키기 위해 수행된 연구라는 점에서 PCK를 간접적으로 다루고 있다. 이 연구는 보편적으로 사용되던 '수학교육학'이 아닌 '수학교과학'이라는 용어를 사용하였는데, 이는 교수법에만 초점을 맞추던 방법중심적인 교과교육학을 탈피하고 교과 내용과 교수법을 모두 강조하면서 둘 사이의 긴밀한 연계성을 추구하는 내용중심적 교과교육학을 지향한다는 의도에서 비롯된 것이다.

<수학교과학 연구>는 수학교과학의 개념적 구조를 밝히기 위해 내용적 명제, 설명적 명제, 교육적 명제를 중심으로 하는 모형을 제시하였다. 내용적 명제는 수학 내용 자체에 대한 것으로 순수수학, 응용수학, 통계학을 포함하고, 설명적 명제는 수학의 형성, 발달, 가치와 관련된 것을 다루며 수학기초론과 수학사를 포함한다. 교육적 명제는 교육의 원리에 대한 이론적 측면 뿐 아니라 교육의 과정과 활동에 대한 실천적 측면을 총괄하는 것으로 수학교육과정론, 수학교재론, 수학교수학습론, 수학교육평가, 수학문제해결, 수학교육공학을 포함한다. 수학교사의 전문성은 교과전문성과 교육전문성이라는 두 가지로 구성되며, 이 중 내용적 명제와 설명적 명제는 교사의 교과전문성과 관련되고, 교육적 명제는 교육전문성과 직결된다. 이 연구는 수학교육학의 구조화 모형을 제시함으로써 수학교사가 갖추어야 할 지식을 규명하고 수학교사의 전문성을 설명하는 틀을 제공하였다. 이 연구는 수학과 교육학을 메타적으로 결합시킨 제3의 지식인 수학교육 지식이 필요함을 강조하였다는 점에서 PCK에 대한 논의의 기반을 마련하였다고 볼 수 있다.

(2) PCK에 대한 개인 연구

신현용과 이종욱(2004)은 수학교사의 지식이 수업의 실제에 어떤 영향력을 미치는지 탐구하였는데, 이를 위한 기초 연구 차원에서 교사의 지식을 유형화하였다. 이 연구는 교사의 지식을 분류한 외국의 여러 문헌들을 체계적으로 검토한 후 Borko와 Putnam(1996)의 방식을 참고하여 교사의 지식을 '교과 지식', '교수법적 지식', 그리고 '교수법적 내용 지식'의 세 가지 측면으로 구분하였다. '교과 지식'은 수학과 학교수학에 대한 포괄적인 이해를 말하는 것으로, 수학적 개념과 절차 및 그들 사이의 연결성, 개념과 절차에 대한 다양한 표현, 추론하고 문제를 해결하고 의사소통하는 방법을 포함한다. '교수법적 지식'은 교과의 특정한 내용에 직결되지 않는 일반적인 성격의 것으로, 교사가 교육과정, 학습, 학습자에 대하여 가지고 있는 지식과 신념을 말한다. '교수학적 내용 지식'은 내용과 교수법이 결합된 것으로, 학습자에게 적합하도록 내용을 표현하고 학습자의 오개념을 이해하는 것 등을 포함한다. 이 세 가지 지식을 단순화하여 대응시킨다면 각각 내용학으로서의 수학, 일반 교육학, 수학교육학에 해당된다고 볼 수 있다. 이 연구에 이어 이종욱(2005)은 초등학교 교사들로 하여금 전문성 개발 프로그램에 참여하도록 한 후, 초임 교사와 유경험 교사의 분수에 대한 지식이 어떻게 변화하는지 분석하였다.

강윤수와 전성아(2006)는 예비교사들의 교수학적 지식의 형성 과정을 탐구하기 위하여 Shulman을 비롯한 국외의 여러 연구자들이 개념화하고 분류한 교수학적 지식을 검토하였다. 이를 토대로 함수 개념에 대한 교과내용적 지식과 수업 설계안 작성에 대한 설문조사와 면담 문항을 작성하고 예비교사들이 어떻게 '교과내용적 지식'을 '교과교수학적 지식'으로 변환시켜 가는지 탐구하였다.

PCK와 관련하여 설정하는 대표적인 연구문제 중의 하나는 수학 교사의 PCK와 수업의 관련성이다. 이에 해당하는 연구로 안선영(2006)은 평면도형에 대한 초등교사의 PCK를 파악한 후 이러한 지식이 수업과 어떤 관련성은 맺는지 조사하였으며, 조성민(2006)은 함수에 대한 고등학교 교사의 PCK가 수업에 어떻게 반영되는지 분석하였다.

김구연(2007)은 중학교 수학 교사의 PCK를 탐구하기 위한 선행 연구 분석에서 교사의 지식과 관련된 일련의 연구들을 검토한 후 PCK를 '수학에 대한 지식', '학습자의 이해에 대한 지식', '교수법에 대한 지식'의 세 가지로 구조화하였다. 이 연구는 미국 중학교 8학년의 연속된 8차시 수업을 관찰하고 교사를 면담한 후 위의 세 가지

측면에서 교사의 PCK를 분석하였다. 첫 번째의 수학 교과 내용 지식은 각 개념과 주제들 간의 연계성, 다양한 형태의 문제해결력, 그리고 교과서에 대한 이해를 포함한다. 두 번째의 학생들의 학습 과정에 대한 지식은 수학의 특정 개념과 주제에 대한 학생들의 잘못된 생각과 일반적인 오류, 학생들이 느끼는 어려움과 혼동에 대한 이해를 포함하며, 마지막의 교수학적 지식은 학생들의 동기 유발과 실제 상황에의 적용을 포함한다.

(3) 한국교육과정평가원의 <교육과정 개정에 따른 수학과 내용 교수 지식(PCK) 연구>

한국교육과정평가원은 2005년부터 2010년 이후까지 장기 계획을 세우고 PCK에 대한 일련의 연구를 수행해 오고 있다. 한국교육과정평가원은 PCK를 표현하는 여러 한글 용어들을 검토한 후 '내용 교수 지식'으로 명명하고, PCK가 교사의 전문성을 규정짓고 보장하는 핵심적인 개념이라는 인식 하에 PCK를 수업 컨설팅과 연계시키면서 연구하고 있다. 실제 PCK는 이론적인 논의를 위한 개념이기도 하지만 실천지향성을 강한 개념이므로, 교사를 대상으로 하는 수업 컨설팅에서 PCK를 중핵적인 개념으로 삼는 것은 적절하다고 볼 수 있다.

최승현(2007a)은 PCK에 대한 다양한 문헌들을 검토한 후, 수학과 PCK의 분석틀을 '수학 내용 지식', '수학과 교수 방법 및 평가에 대한 지식', '수학 학습에 대한 학생 이해 지식', '수학과 수업 상황에 대한 지식'으로 설정하였다. 그리고 PCK의 특징을 다음 일곱 가지로 정리하였다. 첫째, PCK는 모든 수학 교사들이 공유하는 일반성의 경향이 없지는 않지만, 가르치는 맥락, 내용, 경험 등의 영향을 받기 때문에 개인적인 지식의 영역에 속한다. 둘째, PCK는 교과 내용 지식, 교육학 지식, 학생과 상황 변인 등 다양한 영역들로부터 영향을 받으며, 셋째, PCK는 교실 수업을 통해서 습득되는 경험적, 실천적 지식이다. 넷째, PCK는 교사의 반성적 고찰을 통해 점진적으로 발달하며, 다섯째, PCK는 주제에 따라 달라지는 개별성을 지닌다. 여섯째, PCK는 교사의 전문성을 판정하는 중요한 기준이므로 교사의 전문성을 정의하는 구인(construct)이 되며, 일곱째, PCK는 교사의 개인적인 주관적 지식을 표상하여 공적인 지식으로 변환한 것이다.

최승현(2007b)은 수학과 PCK에 대한 연구와 수업 컨설팅을 접목시켜 PCK의 관점에서 본 오개념, 수업 이해를 위한 도형과 함수의 PCK, 컨설팅 사례들을 중심으로 PCK와 컨설팅 연수를 실시하였다. 이를 통해 PCK에 대한 연구가 연구를 위한 연구에 그치지 않고, 교실 수업을 개선하는데 실제적인 도움을 제공한다는 점을 보여주었다.

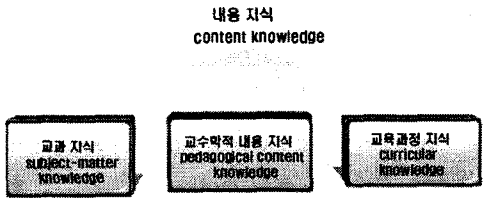
2. 국외의 연구

(1) PCK에 대한 Shulman의 연구

교수학적 내용 지식에 대한 연구는 학문적 탐구의 결과이기도 하지만, 교직을 전문직화(teacher professionalism) 함으로써 교사의 위상을 높이려는 노력의 결과이기도 하다. 1980년대 미국에서는 교사 개혁에 대한 관심이 높아지면서 카네기 재단은 스탠포드 대학의 Lee Shulman에게 교사의 전문성에 대한 연구를 의뢰했다. Shulman은 교사가 갖추어야 할 지식을 학문적 용어로 정의하고, 이런 지식을 지닌 교사를 전문가로 부각시킴으로써 교사의 입지를 강화시키고자 했다. 이런 과정에서 등장한 것이 PCK이다.

1985년 당시 미국교육학회(American Educational Research Association, AERA)의 회장인 Shulman은 AERA 연례 학회 연설에서 PCK라는 용어를 사용하기 시작하였고, 그 후 1986년과 1987년에 발표한 논문을 통해 교사의 지식에 대한 논의를 본격화시켰다. Shulman은 1986년의 논문에서 교사와 관련된 지식으로 '교과 지식(subject-matter knowledge)', '교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge)', '교육과정 지식(curricular knowledge)'의 세 가지를 제시하였다(Shulman, 1986)[2].

2) 수학 교사의 지식을 개념화하는 있어 난점은 '교과 지식'과 '교수학적 내용 지식' 사이의 구분은 그리 명료하지 않다는 점이다. 이런 개념들은 조작적으로 정의된 것이기 때문에 연구자들이 각 개념의 범주를 어디까지로 정하느냐에 달려 있다. 실제 McEwan과 Bull(1991)은 '교과 지식'은 교육을 전제로 한다는 면에서 모두 '교수학적 내용 지식'이라고 할 수 있으며, '교과 지식'과 '교수학적 내용 지식'의 구분은 불필요한 논쟁을 불러일으킨다고 비판하였다. Fung(1999) 역시 '교과 지식'의 뒷받침이 없는 '교수학적 내용 지식'은 가르치는 기술의 열거에 불과한 조리법이라고 보았다.



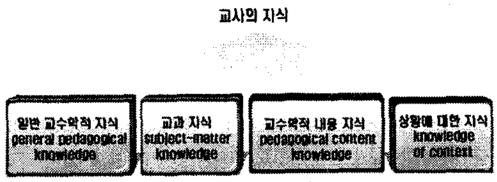

<그림 1> Shulman(1986)의 내용 지식 분류

Shulman의 분류에서 '교과 지식'은 학생들에게 가르쳐야 할 수학의 필수적인 정의, 개념, 원리, 절차, 아이디어 등을 포함한다. '교수학적 내용 지식'은 그러한 내용 지식을 효과적으로 표현하고 설명하는 방법을 찾고, 적절한 유추와 예시를 선택하며, 상이한 수준과 연령의 학생들이 가지고 있는 개념과 전개념(preconception)이 무엇인지 파악하고, 학생들의 오개념과 그 오개념이 추후 학습에 대한 영향을 고려하는, 즉 수학을 가르치는 것과 관련된 실제적인 지식을 총체적으로 다룬다. '교육과정 지식'은 학교 수학의 특정 주제가 시간의 흐름에 따라 어떻게 배열되고 조직되며, 학생들이 다른 교과에서 학습하는 교육과정에 대한 이해까지를 포함한다.

Shulman의 1987년 논문에서는 앞의 세 가지 지식에 '일반 교수학적 지식', '학습자에 대한 지식', '교육적 맥락에 대한 지식', '교육 목표, 가치와 철학적 역사적 배경에 대한 지식'의 네 가지를 추가하여 교사가 갖추어야 할 지식을 일곱 가지로 세분화하였다 (Shulman, 1987). 이처럼 Shulman은 교사가 갖추어야 할 지식에 대한 논의를 본격화시켰고, 이후 여러 학자들이 다양한 방식으로 교사의 지식을 규정하고 분류하였다. 이런 후속 연구 중에는 Grossman(1990)과 같이 여러 교과를 관통하는 일반적인 분류를 한 경우도 있고, Hill 외(2007)와 같이 수학 교과의 관점에서 분류를 시도한 경우도 있다. 그러나 대부분의 연구들은 Shulman의 틀에 새로운 요소를 추가하거나 부분적으로 수정·보완하는 차원이라는 점에서 Shulman의 연구는 교사의 지식에 대한 논의의 토대를 제공하였다고 볼 수 있다.

(2) PCK에 대한 1990년대의 연구

1990년대 교사에게 필요한 지식을 개념화한 연구 중에서 가장 광범위하게 수용된 것 중의 하나는 '일반 교수학적 지식(general pedagogical knowledge)', '교과 지식(subject matter knowledge)', '교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge)', '상황에 대한 지식(knowledge of context)'으로 구분한 Grossman(1990)의 분류이다. Grossman은 교수학적 내용 지식이 교과를 가르치는 목적에 대한 개념화, 학생의 오개념과 어려움을 포함하는 이해 과정에 대한 지식, 지도 전략, 교육과정 지식 등을 포함하는 것으로 보았다.




<그림 2> Grossman(1990)의 교사의 지식 분류

Cochran과 DeRuiter와 King(1993)은 교수학적 내용 지식을 대체하는 '교수학적 내용 알기(pedagogical content knowing)'라는 용어를 조어함으로써 교사가 갖추어야 할 지식은 결과론적인 고정된 형태로서의 지식(knowledge)이 아니라 형성 과정에 있는 역동적인 특성의 알기(knowing)이어야 함을 강조하였다. 여기서의 '교수학적 내용 알기'는 교수법, 교과 내용, 학생의 특성, 학습 환경 맥락을 포괄하는 교사의 종합적인 이해를 말한다.

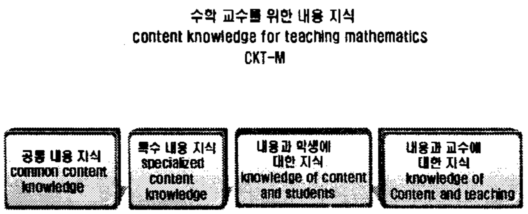
한편 Ma(1999)는 미국과 중국 초등학교 교사의 수학 지식을 비교함으로써 국제적으로 큰 반향을 일으켰는데, 이 연구를 통해 수학 교사가 갖추어야 할 지식에 대한 논의를 다시금 활성화시켰다.

(3) PCK에 대한 2000년대의 연구

Kahan과 Cooper와 Bethea(2003)는 수학 교사의 내용 지식이 실제 수업에서 어떻게 영향을 미치는지 연구하면서 Shulman의 교과 지식을 보다 확장하여 '수학적 내용 지식(mathematical content knowledge, MCK)'이라고 명명하였다.

Hill과 Schilling과 Ball(2004)과 Hill과 Rowan과 Ball(2005)은 '수학 교수를 위한 내용 지식(content knowledge for teaching mathematics, CKT-M)'라는 개념을 정의하고 이를 '공통'과 '특수' 지식으로 구분하였다. 이 논의를 보다 정교화하여 Hill 외(2007)는 *Second*

*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*에서 교사에게 필요한 지식을 '공통 내용 지식(common content knowledge)', '특수 내용 지식(specialized content knowledge)', '내용과 학생에 대한 지식(knowledge of content and students)', '내용과 교수에 대한 지식(knowledge of content and teaching)'의 네 가지로 구분하였다. 여기서 '공통 내용 지식'이란 학습자에게 가르칠 수학 지식을 말하며, '특수 내용 지식'은 학습자에게 직접 가르치지는 않지만 교사가 이해하고 숙지해야 할 수학 지식을 포함한다. 또한 '내용과 학생에 대한 지식'은 학습자가 특정 개념을 배울 때 어떻게 이해하는지 혹은 어떤 오개념을 갖는지와 같이 수학 내용과 학습자를 연결시키는 지식을 말하고, '내용과 지도에 대한 지식'은 학생들이 정확하고 효율적으로 수학 지식을 이해하기 위해서는 이를 어떤 방식으로 표현하고 어떤 예를 동원하는 것이 적절한지의 문제를 다룬다.

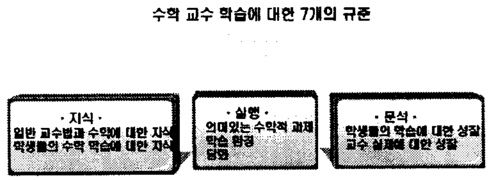



<그림 3> Hill 외(2007)의 수학 교수를 위한 내용 지식 분류

Fan과 Cheong(2002)는 '교수학적 지식(pedagogical knowledge)'을 광의로 해석하고, '교수학적 지식'이 '교수학적 교육과정 지식(pedagogical curricular knowledge)', '교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge)', '교수학적 지도 지식(pedagogical instructional knowledge)'의 세 가지를 포괄한다고 보았다. '교수학적 교육과정 지식'은 교육과정에 관련된 지식 뿐 아니라 교과서와 공학적 도구의 이용을 포함하여 가르치는데 필요한 자료에 대한 지식을 포함한다. '교수학적 내용 지식'은 학교수학의 개념과 원리를 효과적으로 표현하는 방법을 다루며, '교수학적 지도 지식'은 다양한 교수 전략 등을 취급한다. 이에 반해 An과 Kulm과 Wu(2004)는 '교수학적 내용 지식'을 보다 광의로 해석하여 '교수학적 내용 지식'이 '내용 지식(knowledge of content)', '교육과정 지식(knowledge of curriculum)', '교수 지식(knowledge of teaching)'을 포함하는 것으로 구분하였다. 결국 Fan과 Cheong, 그리고 An과 Kulm과 Wu는 내용, 교육과정, 지도(교수)의 세 가지 지식으로 상당히 유사하게 분류하고 있지만, 전자는 '교수학적 지식'이, 후자는 '교수학적 내용 지식'이 세 가지 지식을 포함하는 것으로 보았다.

이처럼 여러 연구자들이 다양한 용어와 개념을 통해 수학 교사에게 필요한 지식을 정립하고자 시도했다. 사용한 용어와 개념은 다를지 모르지만, 교사가 갖추어야 할 공통적으로 포함하는 것은 수학과 학교수학에 대한 내용 지식, 수학을 배우는 학습자에 대한 지식, 그리고 수학을 가르치는 방법에 대한 지식의 세 가지이다. 이는 1991년 NCTM이 제시한 여섯 가지 전문성 규준 중 세 가지 규준에 해당한다 (NCTM, 1991).

NCTM은 2007년의 기준에서 수학 교수・학습에 대한 7개의 규준을 지식, 실행, 분석의 3개로 범주화하였다. '지식'은 교사가 수학을 지도하기 위해 갖추어야 할 일반 교수법과 수학에 대한 지식, 학생들의 수학 학습에 대한 지식을 포괄한다. '실행'은 수학교사가 실제 수학 교수 활동을 수행할 때 유의해야 할 것들로, 의미있는 수학적 과제, 학습 환경, 담화를 포함한다. '분석'은 수학교사가 수학 교수 활동 후 반성 과정에서 행해야 할 것들로, 학생들의 학습에 대한 성찰과 교수 실제에 대한 성찰을 포함한다 (NCTM, 2007).




<그림 4> NCTM(2007)의 수학 교수・학습에 대한 7개의 규준

## III. PCK의 예시: 수열의 극한에 대한 PCK

앞 절에서 다룬 PCK에 대한 조작적 정의와 하위 요소의 구분은 연구자에 따라 다양하지만, 국내・국외의 최근 연구로 가장 보편성을 띤 것이 최승현(2007a), 김구연(2007), Hill 외(2007)의 해석이다. 최승현(2007a)은 PCK의 분석틀을 수학 내용 지식, 수학과 교수 방법 및

평가에 대한 지식, 수학 학습에 대한 학생 이해 지식, 수학과 수업 상황에 대한 지식으로 설정하였고, 김구연(2007)은 PCK를 수학 내용에 대한 지식, 학습자의 이해에 대한 지식, 교수 방법에 대한 지식으로 구분하였으며, Hill 외(2007)는 공통 내용 지식과 특수 내용 지식, 내용과 학생에 대한 지식, 내용과 교수에 대한 지식으로 범주화하였는데, 이 세 연구의 공통분모를 구하면 PCK는 수학 내용에 대한 지식, 학습자의 이해에 대한 지식, 교수에 대한 지식으로 구성된다고 볼 수 있다.

수학 교사가 고등학교 <수학1>에 제시된 '수열의 수렴'을 가르칠 때 어떤 PCK를 보유하고 있는 것이 필요한지, PCK의 핵심을 이루는 세 가지 지식에 비추어 예시하면 다음과 같다[3] (김남희 외, 2006).

1. 수학 내용에 대한 지식

수열의 수렴의 경우 고등학교에서는 직관적인 방식으로 정의하고, 대학교 이상의 수학에서는 수학적으로 보다 엄밀하게 형식적인 방식으로 정의하는데, 교사는 두 가지 정의가 동일한 내용을 상이한 방식으로 표현했다는 점을 숙지하고 있어야 한다. 고등학교 수학에서는 무한수열 $\{a_n\}$에서 $n$이 한없이 커짐에 따라 수열의 일반항 $a_n$이 일정한 값 $\alpha$에 한없이 가까워지는 것을 수열의 수렴( $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$)으로 정의하지만, 이는 대학교 수학에서 다루는 $\epsilon - N$ 정의, 즉 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $K(\epsilon) \in R$이 존재하여 $n > K$인 모든 $n \in N$에 대하여 $|a_n - \alpha| < \epsilon$ 임을 만족하면 수열 $\{a_n\}$이 $\alpha$에 수렴한다는 정의를 고등학생이 이해 가능한 수준으로 조정한 것임을 교사는 파악하고 있어야 한다.

중등수학에서는 대학교 수준의 정의를 직접적으로 가르치지는 않지만, Hill 외(2007)에서 제안한 바와 같이 교사는 학생들에게 직접 가르칠 '공통 내용 지식' 뿐 아니라, 그 배경이 되는 '특수 내용 지식'을 충분히 이해하고 있어야 한다. 뿐만 아니라 수렴을 정의하는 $\epsilon - N$ 방법과 연속성을 정의하는 $\epsilon - \delta$ 방법은 19세기 해석학의 개념들을 엄밀화하는 과정에서 Cauchy 등의 수학자에 의해 제안되었으며, '한없이 커질 때 한없이 가까워진다'와 같이 모호한 정의를 수학적으로 명확하게 설명했다는 수학사의 배경에 대한 이해도 필요하다.

2. 학습자의 이해에 대한 지식

수열의 극한을 이해하는 과정에서 학생들이 가질 수 있는 오개념의 예는 다음과 같다.

첫째, 수열을 수직선 또는 좌표평면에 나타내면 수열의 극한에 대한 심상(mental image)을 형성시켜 학생들의 이해를 촉진시킬 수 있지만, 극한에 대한 오개념의 원인이 되기도 한다. 예를 들어, 수열 $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}$과 같은 교대수열은 0에 수렴하지만, 진동하는 수열의 개념 이미지를 먼저 떠올리는 경우가 발생할 수 있다. 특히 과학 현상에서 '진동'은 진폭이 줄어드는 경우를 포함하기 때문에 일반적인 상황에서의 진동과 수열의 진동을 연결짓게 되면 수열 $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}$이 진동하는 것으로 생각하기 쉽다.

둘째, 수렴에 대해 '한없이 커짐에 따라 한없이 가까워진다'와 같이 일상적인 표현을 사용하게 되면, 상수수열의 수렴을 이해하지 못하는 경우가 발생할 수 있다. 예를 들어 상수수열인 1, 1, 1, 1, … 의 경우 수열의 항이 1로 일정하므로 어떤 수에 가까워지는 것은 아니므로 극한값이 존재하지 않는다는 생각을 가질 수 있다 (박선화, 2000).

수열의 극한을 이해하는 학습 과정에서 나타날 수 있는 이러한 오개념을 교사가 미리 인식하고 수업을 진행한다면 학습자의 오개념을 방지하는데 도움이 될 수 있으므로, 이와 관련된 지식은 중요한 PCK가 된다.

3. 교수에 대한 지식

Sfard(1991)는 수학 개념의 형성 과정을 분석한 후, '계산적인 조작'이 '추상적인 대상'으로 변환되는 과정을

3) 수열의 극한과 관련된 PCK는 앞서 정의하고 범주화한 PCK를 보다 명료화하기 위한 하나의 예시이다. 수열의 극한과 관련된 PCK에는 measure 이론이나 실수 체계의 성질과 같은 대학 수준의 수학, 극한을 둘러싼 학습자의 오개념 등 다양한 내용이 포함될 수 있으며 본 고에서는 극히 일부를 예로 제시한 것이다.

'내면화', '압축', '실재화'의 세 단계로 설명하였다. 박임숙과 김홍기(2002)는 $n$이 한없이 커짐에 따라 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 은 한없이 0에 가까워진다는 직관적 설명을 해석학에서 다루는 $\epsilon$ 방법에 따라 보다 엄밀하게 설명하기 위해 '내면화', '압축', '실재화'의 세 단계를 적용하였다. 첫 번째 '내면화(interiorization)' 단계에서는 실제로 수행한 행동을 통해 조작이 구성되도록 한다. 주어진 수열에서 $\left|\frac{1}{n}-0\right| = 0.1$, $\left|\frac{1}{n}-0\right| = 0.01, \cdots$ 을 만족하는 $n$을 구하고, $\left|\frac{1}{n}-0\right| < 0.1$, $\left|\frac{1}{n}-0\right| < 0.01, \cdots$ 을 만족하는 $n$을 구해봄으로써 $n$이 커짐에 따라 각각 대응되는 $\frac{1}{n}$의 값을 생각해 본다. 두 번째의 '압축(condensation)' 단계에서는 앞의 부등식에서 우변을 특정한 수가 아니라 임의의 작은 양수 $m$이 되도록 한다. 즉 $\left|\frac{1}{n}-0\right| < m$과 같이 보다 일반화된 경우를 생각한다. 세 번째의 '실재화(reification)' 단계에서는 이제까지 다루어오던 것을 새로운 시각에서 보아, '임의의 양수 $\epsilon$에 대하여 $0 \le a \le \epsilon$이 성립하면 $a = 0$' 이라고 이해하게 된다. 이는 $\epsilon$을 이용한 엄밀한 이해로 연결되는 가교 역할을 할 수 있다.

수열의 수렴을 교과서적으로 가르치는 것을 넘어서 이러한 교수 방법에 대한 지식을 갖고 있다면, 수업의 실제에 직간접적인 영향을 미칠 수 있으므로, 이러한 지식 역시 수열의 극한에 대한 PCK라고 볼 수 있다.

## IV. PCK를 측정하기 위한 국외의 연구

PCK는 수학교사의 전문성을 규정짓는 가장 핵심적인 요소이므로, 수학교사가 학생들을 지도하기에 충분한 능력과 자질을 갖추고 있는지 파악하기 위해 수학교사의 교수학적 내용 지식의 수준을 진단하는 것이 필요하다. 이 절에서는 수학교사의 PCK를 측정하기 위한 국외의 대표적인 연구로 LMT와 TEDS-M의 개요와 그 문항을 소개하고자 한다.

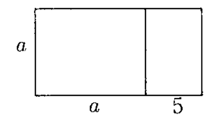
### 1. LMT

LMT(Learning Mathematics for Teaching)[4]는 미시간 주립대학교(Michigan State University)가 주관하는 교사교육 프로젝트로, Deborah Ball과 Heather Hill이 주축이 된 연구팀은 수학교사에게 필요한 지식의 본질을 규명하고, 수학교사가 보유하고 있는 지식을 평가하기 위한 일련의 지필검사 문항을 개발하였다. LMT의 예시 문항은 다음과 같다.

[1] 박 교사는 학생들에게 $a-(b+c)$와 $a-b-c$가 왜 같은지 질문하였다. 학생들이 제시한 다음 설명 중 가장 적절한 것을 선택하여라.

a) $a-(b+c)$는 $a-b+c$와 같지 않으므로 $a-b-c$와 같다.
b) $a=10, b=2, c=5$를 대입하였을 때 두 식의 값은 모두 3이므로 두 식은 같다.
c) 결합법칙에 따라 $a-(b+c)$는 $(a-b)-c$이고, 따라서 $a-b-c$이다.
d) 한 항에 대해 적용한 것을 다른 항에 대해서도 적용해야 하므로 두 식은 같다.
e) 분배법칙에 의해 같다. $(b+c)$에 -1을 곱하면 $-b-c$가 된다.

[2] 이 교사는 도형의 넓이를 식으로 나타낸 학생들의 답안이 다양한 것을 보고 놀랐다. 학생들이 적은 다음 식이 맞는지 틀리는지 판정하여라.




정확하다 정확하지 않다 모르겠다

a) $a^2+5$ b) $(a+5)^2$
c) $a^2+5a$ d) $(a+5)a$
e) $2a+5$ f) $4a+10$

[3] 김 교사는 수학 교과서에서 분배법칙이 적용되는 문항을 찾고 있다. 다음 중 덧셈과 곱셈에 대한 분배법칙을 설명하기에 적절한 문항은?

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$를 계산하여라.
b) $2x-5=8$을 $x$에 대해 풀어라.
c) $3x^2+4y+2x^2-6y$를 간단히 하여라.
d) 세로셈으로 34+25를 계산하여라.

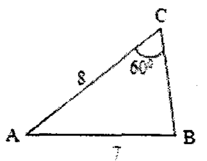
4) http://sitemaker.umich.edu/lmt/home 참고

LMT의 예시 문항들은 교실수업에서 직면하게 될 가능성이 높은 상황에서 출발한다는 면에서 실제성이 높으나, 우리나라 예비교사의 수준에 비추어볼 때에는 그 내용이 지나치게 초보적이다. 위의 세 문항은 PCK를 구성하는 요소 '수학 내용에 대한 지식'을 공통적으로 다루고 있으며, 1번과 2번 문항은 '학습자의 이해에 대한 지식'을 중점적으로 다루고, 3번 문항은 '교수에 대한 지식'에 좀 더 치중된 문항이라고 볼 수 있다.

### 2. TEDS-M

TEDS-M(Teacher Education Study-Mathematics)[5]은 IEA에서 주관하는 고등교육에 대한 최초의 국제비교 연구로, 수학 교사교육 전반을 진단하고 분석하기 위한 목적으로 수행되고 있다. 미시간 주립대학교(Michigan State University)와 호주의 ACER이 공동으로 연구를 진행하는 TEDS-M은 수학 교사교육 제도와 프로그램을 비교한 후 수학 예비교사를 대상으로 지필검사를 실시한다. 다음은 교사용 지필검사 문항의 예이다.

[1] 학생들에게 다음 문제를 제시하였더니, 두 학생이 다음과 같이 이 문제를 풀었다.




삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=7$, $\overline{AC}=8$, $\angle ACB=60°$ 일 때, $\overline{BC}$의 길이를 구하여라.

철수의 풀이:
$\overline{BC}=x$로 놓으면, 코사인 법칙에 따라 $7^2=8^2+x^2-2\times 8x\cos 60°$ 가 되며, $\overline{BC}=3$ 또는 $\overline{BC}=5$가 된다.

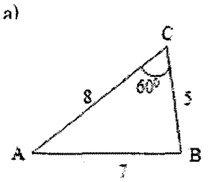
은지의 풀이:
$\angle ABC=\beta$로 놓으면, 사인법칙에 따라 $\dfrac{7}{\sin 60°}=\dfrac{8}{\sin\beta}$이 되고, $\sin\beta=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$이다. 이런 사인값을 갖는 $\beta$는 하나이며, 따라서 삼각형 ABC는 하나 존재한다.

교사로서 위의 상황을 어떻게 평가하겠는가?

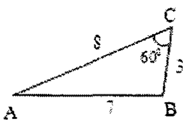
a) 두 변과 한 각에 의해 정해지는 삼각형은 유일하므로, 철수의 풀이는 틀렸다.
b) 은지는 $\sin\beta$에 대한 각을 하나만 구했다. 그러나 동일한 사인값을 갖는 각은 예각과 둔각이 있다. 비록 은지가 변 BC의 길이를 두 개 구하지 않았지만 두 개의 삼각형이 존재한다.
c) 잘 모르겠다.

[2] 다음 중 위의 상황을 가장 잘 나타낸 그림은?

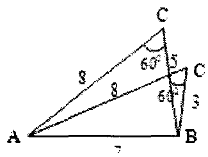
a)




b)




c)




d) 문제에서 주어진 상황은 존재하지 않는다.

LMT의 경우와 마찬가지로, TEDS-M의 예시문항은 기본적으로 '수학 내용에 대한 지식'을 다루고 있지만, 학생들이 보일 수 있는 반응을 평가한다는 측면에서 '학습자의 이해에 대한 지식'도 측정한다.

## V. PCK의 관점에서 분석한 중등교원 임용시험 문항

1996년 12월에 실시된 1997학년도 중등교원 임용시험[6]부터 교과내용학과 교과교육학의 문항 형태가 선택형에서 서술형으로 바뀌었다. 서술형으로 실시된 초창기의 임용시험 수학교육 문항들은 다음 예에서 보듯이 구체적인 수학 교수·학습 상황은 제시하지 않은 채, 수학교육의 대표 이론들을 설명하고 수학 내용에 적용하도록

5) http://teds.educ.msu.edu/ 참고

6) 교사자격증을 가진 예비교사가 공립학교 교사가 되기 위해 응시하는 중등교사 임용후보자 선정 경쟁시험

요구하는 경우가 대부분이다. 1997학년도와 1998학년도의 문항은 하위 문항을 갖지 않으면서 비교적 포괄적으로 이론을 묻는데 반하여, 1999학년도와 2000학년도의 문항은 하위 문항으로 구성되면서 이론을 보다 구체적으로 묻기 때문에 객관적인 채점기준의 설정이 보다 용이하게 되어 있다.

**【1997학년도 교원 임용시험 문항】**
Z. P. Dienes는 수학적 다양성의 원리(mathematical variety principle)와 지각적 다양성의 원리(perceptual variety principle)를 수학적 개념의 지도 원리로 제시하고 있다. 이 중 수학적 다양성의 원리가 무엇인지 간략히 서술하고, 이 원리가 평행사변형의 개념 지도에서 어떻게 적용될 수 있는지 구체적인 예를 들어 설명하시오.

**【1998학년도 교원 임용시험 문항】**
브루너(Bruner, J. S.)는 학생들의 지적 능력이나 경험에 맞는 적절한 수준에서 수학 내용을 이해하도록 제시하는 표상 양식에 관하여 연구하였다. 그 중의 하나로, 타일이나 나무토막과 같은 구체물을 이용한 활동적 표상에 따른 인수분해 지도의 예를 들 수 있다. 이것을 $x^2+5x+6$의 인수분해를 통하여 보이시오.

**【1999학년도 교원 임용시험 문항】**
Polya는 수학적 문제해결 과정을, Piaget는 수학적 사고 과정을 각각 연구하였다.
(1) Polya의 이론을 따를 때, 문제해결 과정의 네 번째 단계에서 하는 활동은 구체적으로 어떤 것인지 세 가지 예를 제시하시오.
(2) Piaget의 이론을 따를 때, (1)의 활동은 반영적 추상화(reflective abstraction)와 어떻게 관련되는지 설명하시오.

**【2000학년도 교원 임용시험 문항】**
반힐레(van Hiele) 모델은 기하 학습에 있어서 위계적인 사고 수준(수준1~수준5)의 존재를 가정하고 있다.
(1) 개념의 정의를 비로소 올바르게 사용할 수 있는 반힐레 수준(수준1~수준5)을 명시하시오.
(2) 반힐레 수준2와 수준3에서 사고의 특징을 각각 서술하고, 수준2에서 사고하는 학습자를 수준3으로 이행하게 하는 데 효과적인 교수 활동을 구체적으로 예시하시오.

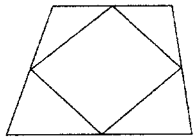
중등교원 임용시험의 시행이 거듭됨에 따라 문항의 성격은 여러 측면에서 발전적인 변화를 보인다. 2000학년도 이후의 교원 임용시험 문항들은 다음 세 가지 측면에서 이전의 문항들과 차별화된 특성을 갖는다.

첫째, 구체적인 수학 교수·학습 상황을 제시하고 이를 이론의 관점에서 해석하는 문항이 주류를 이룬다.

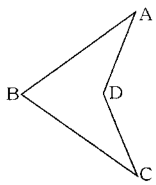
둘째, 주어진 수학 교수·학습 상황을 하나 이상의 이론의 관점에서 해석하는 문항이 등장하였다. 예를 들어 2002년도 문항은 문제제기와 준경험주의의 관점에서, 2003년 문항은 문제해결 교육론과 교수학적 변환의 두 가지 관점을 요구하고 있다.

셋째, 문항에서 다루는 이론이 Piaget, Bruner, van Hiele, Polya 등 수학교육의 고전적인 대표이론에서 인식론적 장애(2005학년도), APOS 이론(2009학년도 1차 시험) 등으로 다양화되었다.

**【2002학년도 교원 임용시험 문항】**
다음의 가상 상황을 읽고 아래 물음에 답하시오.
미현이는 학교에서 평면 위에 있는 사각형의 네 변의 중점을 이으면 평행사변형이 된다는 정리를 공부하였다. 미현이는 이 정리를 바탕으로 다음과 같은 문제를 제기하였다.



> 오른쪽 그림과 같이 한 평면 위에 있지 않는 공간에서의 네 점 $A, B, C, D$를 차례로 연결하여 만든 도형에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$의 중점을 각각 $E, F, G, H$라 할 때, 사각형 $EFGH$는 평행사변형일까?



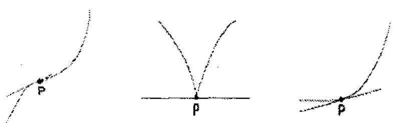

(1) 미현이가 제기한 문제의 내용이 옳은지의 여부를 판단하고 그 이유를 설명하시오.
(2) 이러한 문제제기(problem posing) 활동의 수학교육적 의미를 세 가지만 진술하시오.
(3) 이러한 문제제기 활동의 수리철학적 의미를 Lakatos의 준경험주의(quasi-empiricism) 입장에서 설명하시오.

【2003학년도 교원 임용시험 문항】
다음에 제시된 수업 상황을 읽고 물음에 답하시오.

> 다은이는 다음 문제를 해결하려고 애쓰고 있다.
> 「학교에서 집까지의 거리는 200m이고, 집에서 경찰서까지의 거리는 250m이다. 집에서 학교와 경찰서를 바라본 각의 크기가 60°일 때, 학교에서 경찰서까지의 거리를 구하여라.」
> 잠시 후 교사가 다가와 다음과 같이 말하였다. "다은아, 제2코사인 법칙을 적용하면 되지 않을까?"
> 다은이는 교사의 이러한 발문에 힘입어 문제를 쉽게 해결하였다.

(1) 폴리아(G. Polya)의 수학 문제해결 교육론의 관점에서 볼 때, 교사가 다은이에게 한 발문이 바람직한 것인지 아닌지를 판단하고, 판단의 구체적인 이유를 교사의 발문과 관련하여 두 가지 서술하시오.
(2) 교수학적 변환(didactic transposition)의 관점에서 위에 제시된 수업 상황을 20자 내외로 평가하시오.

【2005학년도 교원 임용시험 문항】
다음은 제7차 수학과 교육과정 수학Ⅱ의 다항함수의 미분법 중 미분계수 영역에 대한 수행평가 결과에서 나타난 오류 유형과 오류를 바로 잡기 위한 교수 방안이다.

> (가) 박 교사는 미분계수를 가르친 후, 학생들이 미분계수의 기하학적 의미를 이해하고 있는지를 알아보기 위하여 몇 개의 그래프를 주고 주어진 점 P에서 접선을 그리도록 하였다. 그 결과 나타난 대표적인 오류 유형은 다음과 같다.
>
> 
> 
>
> (나) 박 교사는 평가결과를 분석한 후 프로이덴탈(Freudenthal)의 수학화 교수·학습 방법과 미분 개념의 역사발생적 과정을 토대로 수업을 하는 것이 미분계수에 대한 개념적 이해와 접선 개념에 대해 학생들이 가지고 있는 장애 수정에 도움이 될 것이라 생각했다.

(1) (가)에서의 수행평가 결과에서 나타난 오류의 원인을 인식론적 장애(epistemological obstacle)의 관점에서 3줄 이내로 설명하시오.
(2) 프로이덴탈의 수학화 교수·학습 방법과 미분 개념의 역사발생적 과정을 토대로 미분계수 개념의 교수·학습을 위한 내용 요소를 순서를 고려하여 3가지 제시하시오.

중등교원 임용시험의 수학교육 영역 문항들은 전반적으로 수학의 PCK를 충실하게 다루고 있으나 시행 시기에 따라 다소간의 차이를 보인다. 1997학년도부터 2000학년도의 문항은 대부분 PCK의 세 가지 지식 중 교수에 대한 지식을 주로 다루고 있다. 이처럼 초기의 문항이 PCK를 부분적으로 반영한 데 반해 2000학년도 이후의 문항들은 PCK를 구성하고 있는 수학 내용에 대한 지식, 학습자의 이해에 대한 지식, 교수에 대한 지식을 복합적으로 다루고 있다. 예를 들어 2002학년도 문항의 경우 삼각형의 중점연결 정리를 공간에서의 사각형에 대한 중점연결 정리로 일반화시키는 수학 내용에 대한 지식을 토대로 문제제기와 준경험주의의 관점에서 교수·학습 상황을 해석하도록 요구하기 때문에 학생의 이해에 대한 지식과 교수에 대한 지식까지 포괄한다.

전반적으로 볼 때 임용시험 문항에 제시되는 수학 교수·학습 상황은 교실수업에서 비롯된 것이라기보다는 다분히 이론을 염두에 두고 만들어진 경향이 있다. 즉 이론을 먼저 선택한 후 그 이론으로 설명될 수 있는 상황을 구상하기 때문에, 실제적으로 보이기는 하지만 여전히 가상적인 상황이라는 한계가 없지 않다. 이는 앞 절에서 살펴본, 실제 교실수업과 밀접하게 연계되어 생생한 현실감을 지닌 LMT와 TEDS-M의 문항과 대비를 이룬다. 그러나 앞서 지적한 바와 같이 LMT와 TEDS-M의 문항은 우리나라 예비교사들의 수준에 비추어 볼 때 지나치게 쉽고 단순하기 때문에 변별력을 갖지 못한다는 측면에서 한계를 지닌다. 따라서 이 두 가지를 절충하여, 예비교사가 보유하고 있는 PCK의 수준을 변별할 수 있으면서도 보다 실제성을 갖도록 문항의 교수·학습 상황을 구안하는 것이 필요할 것이다.

## Ⅵ. 맺는 말

PCK(교수학적 내용 지식)는 교과교육학의 학문적 정체성과 교사의 전문성을 보장한다는 측면에서, 교과교육 연구의 중핵을 이루는 개념이다. 본 고에서는 수학교과에서 이루어져 온 PCK 관련 국내·국외의 연구들을 검

토한 후, PCK의 구성 요소로 수학 내용에 대한 지식, 학습자의 이해에 대한 지식, 교수에 대한 지식의 세 가지를 선정하였다. 이 세 가지 지식에 토대하여 수열의 극한에 대한 PCK를 예시하였으며, 교사의 PCK를 측정하기 위한 국외의 연구로 LMT와 TEDS-M의 문항을 소개하고, 마지막으로 우리나라 중등교원 임용시험의 수학교육 영역의 문항들을 PCK의 관점에서 분석하였다.

2009학년도부터 사범대학과 교육대학의 예비교사 교육에서 교과교육의 비중이 높아지는 방향으로 교육과정이 개편되었으며, 3차에 걸쳐 다단계로 실시되는 새로운 교원 임용시험에서도 교과교육의 비중이 전반적으로 상향 조정되었다. 이러한 변화는 교과교육에서 PCK에 대한 연구가 활성화 되고, 교사의 수업 전문성이 교과 내용학과 일반 교육학에 대한 숙달로부터 자동적으로 보장되는 것이 아니라 교과에 대한 PCK의 습득을 통해 가능하다는 사실이 광범위한 공감을 얻으면서 나타난 것이다. 수학교과에서의 PCK의 연구와 현황을 반성적으로 평가한 본 연구는 사범대학과 교육대학의 새로운 교육과정을 PCK에 비추어 점검하고 새로 개편된 중등교원 임용시험에 대한 본격적인 평가 작업으로 후속되어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌


강윤수 · 전성아 (2006). 수학과예비교사들의 교수학적 지식 형성 과정 탐구 : 함수 개념을 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **45(2)**, pp.217-230.

김구연 (2007). Pedagogical Content Knowledge: A Case Study of a Middle School Mathematics Teacher. 수학교육학연구, **17(3)**, pp.295-308.

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구, 서울: 경문사.

박경미 (1997). 수학교육학의 학문적 정체성 탐구를 위한 소고. 대한수학교육학회 논문집, **6(2)**, pp.115-127.

박선화 (1998). 수학적 극한개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문.

박임숙 · 김흥기 (2002). 고등학교에서의 극한개념 교수 · 학습에 관한 연구. 수학교육학연구, 12(4), pp.557-582.

신현용 · 이종욱 (2004). 수학교사의 지식과 수업 실제와의 관계. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **43(3)**, pp.257-273.

안선영 (2006). 평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용 지식과 수업 실제와의 관계 분석. 한국교육대학교 대학원 석사학위논문.

이돈희 · 박순경 · 박경미 (1997). 수학교과학연구. 한국교육개발원 연구보고 RR97-16-3.

이종욱 (2005). 분수에 대한 교사 지식의 변화에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

조성민 (2006). 교육과정 실행의 관점에서 본 수학교사 지식과 수업의 관련성 연구 - 고등학교 함수 내용을 중심으로-. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

최승현 (2007a). 교육과정 개정에 따른 수학과 내용 교수 지식(PCK) 연구. 한국교육과정평가원 연구보고 RRI 2007-3-2.

최승현 (2007b). 수학과 내용 교수 지식(PCK) 및 수업 컨설팅 연수. 한국교육과정평가원 연구보고 ORM 2007-18-1.

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The pedagogical content knowledge of middle school mathematics teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education,* **7**, pp.145-172.

Borko, H., & Putnam, R. T. (1996). Learning to teach. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp.673-708). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Cochran, K. L., DeRuiter, J. A., & King, R. A. (1993). Pedagogical content knowing: An integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education,* **44(4)**, pp.263-272.

Fan, L,. & Cheong, N. P. C. (2002). Investigating the sources of Singaporean mathematics teachers'-pedagogical knowledge. In D. Edge & B. H. Yap (eds.), *Mathematics Education for a Knowledge-based Era* (pp.224-231). Singapore: AME.

Fung (1999). *Pedagogical Content Knowledge versus Subject Matter Knowledge: An illustration in the primary school mathematics context of Hong Kong.* Ph.D. thesis. The University of Hong Kong.

Grossman, P. L. (1990). *The Making of a Teacher: Teacher Knowledge and Teacher Education.*

Teachers College Press.

Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, **105(1)**, pp.11-30.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, **42(2)**, pp.371-406.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*(pp.111-155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kahan, J. A., Cooper, D. A., & Bethea, K. A. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, **6**, pp.223-252.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus: Arithmetik, Algebra, Analysis* (Vol. 1). Leipzig: Teubner.

Klein, F. (1932). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* (Vol. 1, 3rd ed., E. R. Hedrick & C. A. Noble, trans). New York: Macmillan.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

McEwan, H., and Bull, B. (1991). The Pedagogic Nature of Subject Matter Knowledge. *American Educational Research Journal*, **28(2)**, pp.316-334.

NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA.: The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2007). *Mathematics Teaching Today*. Reston, VA.: The National Council of Teachers of Mathematics.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22**. pp.1-36.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, **15**, pp.4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, **57(1)**, pp.1-22.

# A Meta Review of the Researches on PCK in Mathematics

**Park, Kyungmee**
Department of Mathematics Education, Hongik University, Sangsu-dong, Mapo-gu, Seoul, Korea, 121-791
E-mail : kpark@.hongik.ac.kr

Considering the fact that PCK(pedogogical content knowledge) tends to guarantee the identity of mathematics education as a discipline and the teacher professionalism, PCK is one of the core concepts in the research on subject matter education. The purpose of this study is to review domestic and international researches on the definition and the components of PCK in mathematics. Based on the review, this study identified 3 knowledges which consist PCK; knowedge of mathematic content, knowledge of learner's understanding, and knowledge of teaching. Then this study provided some examples of PKC in the topic, the limit of sequences, and introduced the LMT and TEDS-M items, which were designed to measure the teacher's PCK. Lastly, this study attempted to evaluate the items on mathematics education included in the Teacher Employment Test administered for pre-service/. teachers in Korea based on PCK.

* ZDM classification : B59
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50
* Key Words : pedagogical content knowledge