韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2009. 02. 제 48권, 제 1호, 1-20.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2009, Vol. 48, No. 1, 1-20.

교구를 활용한 중학교 공간능력 향상을 위한 수업에서 학습의 효과

고 상 숙 (단국대학교)
정 인 철 (전남대학교)
박 만 구 (서울교육대학교)

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성과 목적

수학적인 능력은 기초학문으로써 다른 학문에 필요한 능력을 제공하며 우리의 일상생활에서도 유용한 능력으로 사용된다. 그 중 공간능력은 요즘 광범위하게 사용되고 있는 위치추적 장치(GPS)뿐만 아니라 과학, 공학, 건축, 제도, 시각디자인, 치과의술과 같은 다양한 학문영역에서 요구되고 있으므로 학교수학에서는 공간능력에 대한 지도가 꼭 필요하다. 따라서 다소 늦은 감은 있으나 제 7차 교육과정(교육부, 1997)에서 처음으로 공간능력에 대한 내용이 포함되었다.

심지어 어떤 수학교육자는 "모든 수학과제는 공간의 사고를 요구한다"(Fennema, 1979)고 주장하여 그 중요성을 강조한다. 이러한 공간적인 능력은 수학적인 능력 수행과 양의 상관관계가 있음이 발견되었고(Battista, 1990; Clements & Battista, 1992; Fennema & Sherman, 1977) 기하, 문제해결, 특별히 복잡한 문제와 같은 수학의 특정한 영역에서 중요한 요소가 됨이 알려져 있다(Burnett, Lane, & Dratt, 1979; Kaufmann, 1990; Grobecker & De Lisi, 2000).

이처럼 많은 연구자들이 공간적인 문제해결에 대한 이론을 규명하기 위하여 공간 능력과 관계된 공간의 구성을 조사하기 위한 시도를 하였고, 몇몇 연구에서 다양한 공간적인 요소와 공간적인 문제해결 과정과 관계된 이론을 정의하기 위한 시도가 있었다. 하지만 서로 다른 구성요소와 정의가 연구에 따라 제시되었고 따라서 지금까지 일관된 이론은 없다(Phunlapthawee, 2000)고도 주장한다. 따라서 대부분의 연구자들은 공간능력은 지능에 따라 다양한 공간능력이 존재한다는데 의견을 같이한다(Hannafin, & Truxaw, 2008, Clements & Battista, 1992; Battista, 1990; Gardner, 1983). 우리나라 현장에서 공간능력에 대한 연구는 강순자 · 고상숙(1999), 권오남 · 박경미 · 임형 · 허라금(1996), 정영(2002), 전평국 · 정부용(2003), 한기완(2001), 그리고 김유경과 방정숙(2007)의 연구들로 매우 소수이며 더욱이 이 중 교구활용에 관한 연구는 전평국 · 정부용(2003)에 불과하여 매우 부족한 실정이다.

이에 본 연구에서는 2차원과 3차원을 자유롭게 이동할 수 있는 수학교구인 4D frame을 사용한 중학교 도형 수업에서 학생들의 공간능력에 대한 성취도를 조사하고, 학생의 학습과정에 나타난 학생들의 반응을 조사하여 교구가 지니는 특징을 묘사함으로써 학교현장의 기하수업에 방향을 제시하고자 한다.

2. 연구문제

가. 교구를 활용하여 기하학습활동을 한 학생들의 성취도는 교구를 사용하지 않은 학생들의 성취도보다 우수한가?

나. 교구를 활용한 공간능력의 공간시각화, 공간방향화 사고과정에서 나타난 학생들의 반응은 무엇인가?

---

* 접수일(2008년 6월 4일), 수정일(1차 : 2008년 7월 11일, 2차 : 2009년 1월 20일), 게재확정일(2009년 2월 9일)
* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어: 공간능력, 공간시각화, 공간방향화, 교구, 혼합 연구방법

3. 용어의 정의

가. 공간능력

본 연구에서는 여러 학자의 정의에 공통으로 포함된 요소인 공간시각화와 공간방향화를 정의한 Tartre(1984. 1990)의 주장을 따른다. 공간시각화란 대상을 바르게 파악하고 그 대상을 조작하거나 회전하는 능력으로, 고정된 대상물을 마음속으로 서로 다른 위치로 이동 또는 회전시켜보아 처음 위치와 일치하는가를 결정하는 회전과 한 물체의 분리된 부분에 대한 서로 다른 움직임과 관계된 변환으로 정의한다.

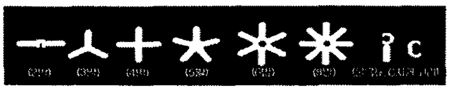
공간방향화는 공간구조에 대한 인식능력과 위치감각과 관련된 능력으로, 완전한 그림 표현을 조작하고 이해하거나 또는 한 표현으로부터 또 다른 표현으로의 변화를 인식하는 재조직된 전체와 전체에서 부분 찾기 또는 부분을 전체로 맞추는 전체에 대한 부분으로 정의한다.

나. 학습자료

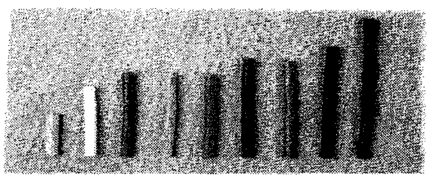
본 연구에서 개발하는 학습자료는 공간능력을 신장하기 위한 학습지도안(Lesson Units)과 이 지도안의 효과를 파악하기 위한 사후 성취도 검사지(Mathematical Achievement Test)를 포함한다.

다. 기하적 교구

본 연구에서는 기하적 교구로 4D frame을 사용하였다. 이 교구는 제한이 없고 자유롭다는 뜻으로 표현능력이 무한하고, 학생들이 평면에서 공간으로 자유롭게 이동할 수 있는 특징이 있어서 본 연구에서 사용하였으며 도형의 변 또는 모서리 역할을 하는 연결봉과 연결봉을 이어주는 연결대로 이루어져 있다.



<그림 Ⅰ-1> 여러 종류의 연결대



<그림 Ⅰ-2> 여러 종류의 연결봉

4. 연구의 제한점

가. 이 연구는 경기도에 위치한 중소 도시의 한 중학교에서 2학년 4개 학급을 대상으로 실시하였으므로 결과의 일반화에 한계가 있다.

나. 2학년 학생들을 대상으로 1학년 때 학습한 공간도형의 다면체의 확장을 다루고 있어 연구의 결과를 다른 기하 단원 또는 다른 학년에 일반화하는데 한계가 있을 수 있다. 그러나 교구의 유용성을 조사하는 것이므로 기하수업에 대한 연구로서 의의를 지닌다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 공간능력

공간능력에 대한 개념은 학자에 따라 다양하게 정의하였다. French(1951)는 공간 능력에 대하여 3개의 주요 요소 즉, 공간요소, 방향화, 시각화에 관하여 설명하였다. 공간 요소란 공간 패턴을 정확하게 인식하는 능력, 그리고 그것들을 서로 비교하는 능력이고, 방향화는 공간패턴에서 제공되는 다양한 방향화에 의해 혼동하지 않고 주장하는 능력과 관계된다. 또한 시각화는 3차원 공간에서 머릿속으로 도형의 이동을 이해하는 능력, 또는 머릿속으로 대상물을 조작하는 능력이라고 하였다.

Ekstrom, French, and Harman(1976)은 공간방향화와 공간시각화의 두 가지 공간요소를 정의하였다. 공간방향화는 공간의 패턴을 지각하거나 혹은 공간에서 대상물에 관하여 방향화를 유지하는 능력과 관계되고, 공간시각화는 공간의 패턴에 대한 이미지를 또 다른 배치로 변환하거나 또는 조작하는 능력 혹은 단기 기억에서 공간의 상대적 배치에 대하여 마음속으로 회전시키고 연속된 작동을 수행할 수 있는 능력을 말한다.

Mcgee(1979)는 공간능력에는 공간방향화(SO)와 공간시각화(SV)가 있다고 하였다. 공간방향화란 시각적인 자극 패턴 범위 내에서 구성요소의 배치를 이해하고, 제시된 도형이 방향이 변하여도 혼동하지 않는 경향과 관련되며, 관찰자의 신체의 방향에서 공간관계를 결정하는 능력은 문제의 핵심 부분이다. 공간시각화란 그림으로 제시된 공간의 시각적 대상물을 마음속으로 조작하기,

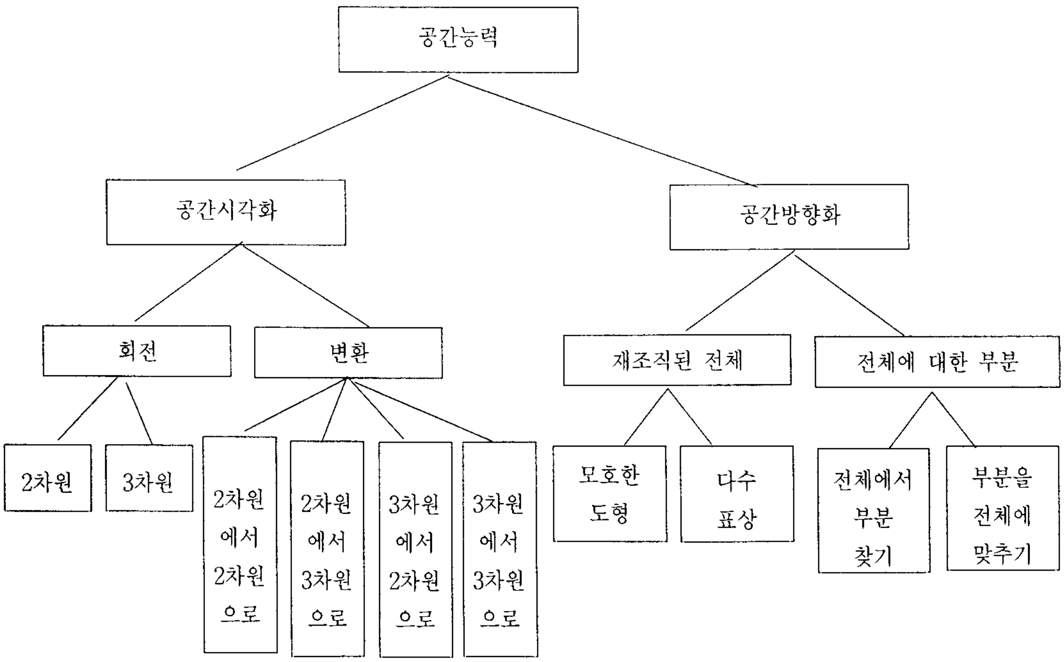
회전하기, 돌리기, 뒤집기 등을 할 수 있는 능력이다. 이는 도형의 내적 부분간의 이동을 한 도형, 혹은 3차원 공간에서 만들어진 대상물을 인식하고, 기억하고, 회상하는 과정, 혹은 평면에서의 패턴을 접거나 접지 않고 하는 과정과 관계된다.

Lohman과 Kyllonen(1983)는 공간능력을 공간관계, 공간방향화, 공간시각화의 3가지 요소로 정의하였다. 공간관계는 카드문제, 깃발문제, 도형문제와 같은 평가로 정의하였다. 공간방향화는 또다른 시각으로부터 대상물이 어떻게 배열될 것인가를 상상하는 능력과 관계된다. 공간시각화는 공간관계보다 다소 복합적인 문제로 정의된다고 하였다.

Tartre(1984)는 McGee(1979)의 정의를 인용하면서 공간시각화를 회전과 변환으로, 공간방향화를 재조직된 전체, 전체에 대한 부분으로 분류하였다. 공간시각화의 회전은 고정된 대상물을 서로 다른 위치로 마음속으로 이동시키거나, 마음속으로 대상물을 회전시켜보아 처음 위치와 일치하는 가를 결정하는 것이다. 여기에는 수직선의 오른쪽에 있는 대상물이 왼쪽의 대상물과 동일한가 혹은 반사적인가를 결정하는 2차원에서의 회전과, 입체를 마음속으로 뒤집고 비교하는 3차원에서의 회전을 포함한다.

변환은 마음속으로 한 물체의 분리된 부분에 대한 서로 다른 움직임과 관계된다. 여기에는 2차원에서 2차원으로의 변환, 2차원에서 3차원으로의 변환, 3차원에서 2차원으로의 변환, 3차원에서 3차원으로의 변환이 있다. 2차원에서 2차원으로의 변환은 2차원 도형을 또다른 2차원 도형으로 마음속으로 이동시키는 것이다. 2차원에서 3차원으로의 변환은 2차원 패턴을 3차원 상태로 접는 것과 관계된다. 3차원에서 2차원으로의 변환은 접어진 종이 조각에서 접지 않은 상태를 상상하는 것뿐만이 아니라 딱딱한 고체를 대각선으로 잘랐을 때를 상상하는 것과 같은 능력이다. 3차원에서 3차원으로의 변환은 마음속에서 3차원 대상물을 부분으로 재구성하는 능력과 관계된다.

공간방향화의 재조직된 전체(reorganized whole)는 완전한 그림 표현을 조직하고 이해하거나 또는 한 표현으로부터 또 다른 표현으로의 변화를 인식하는 것과 관계



<그림 II-1> 공간능력의 구성요소(Tartre, 1984)

된다. 재조직된 전체는 모호한 도형(an ambiguous figure)과 다양한 표상(multiple representation)으로 나눌 수 있다. 모호한 그림은 어떤 대상물이 관점에 따라 하나 이상의 대상물로 표현되는 것이고, 다양한 표상은 2가지 표상 간에 발생하는 변화를 인식하는 것과 관계된다.

전체에 대한 부분(part of field)은 시각적으로 표현되었든 또는 상상에 의해서든지 전체에 대한 부분의 표현과 관계된다. 여기에는 전체에서 부분 찾기 와 부분을 전체에 맞추기로 나눌 수 있는데, 전체에서 부분 찾기는 숨은 그림 찾기와 같은 퍼즐이 여기에 해당된다. 부분을 전체에 맞추기는 시각적으로 표현된 부분이 어떻게 전체에 맞는가를 인지하는 것과 관계된다.

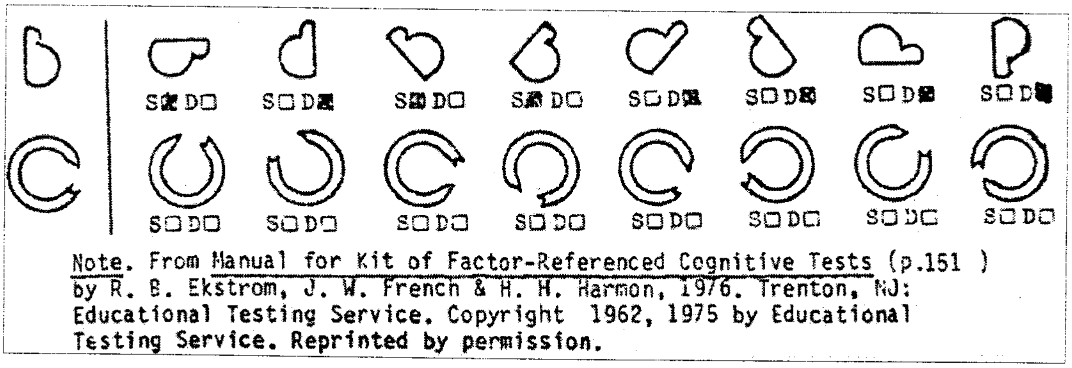
이상과 같이 몇몇 연구자들이 공간능력의 본질을 연구하고 공간적 요소를 정의하고자 시도하였다. 이와 같은 공간능력에 관한 정의를 종합하면, 어떤 대상을 시각적으로 지각할 수 있거나 그렇지 않을 때에도 그것에 관한 이미지를 정신적으로 생성하고 그것을 회전하고, 방향을 바꾸고 재배열하는 등 다양한 방법으로 조작할 수 있는 능력이라 할 수 있다. 본 연구에서는 공간능력의 요소로 학자마다 공통적으로 정의한 공간시각화와 공간방향화로 보고 각 요소를 조사하고자 한다.

2. 선행연구 고찰

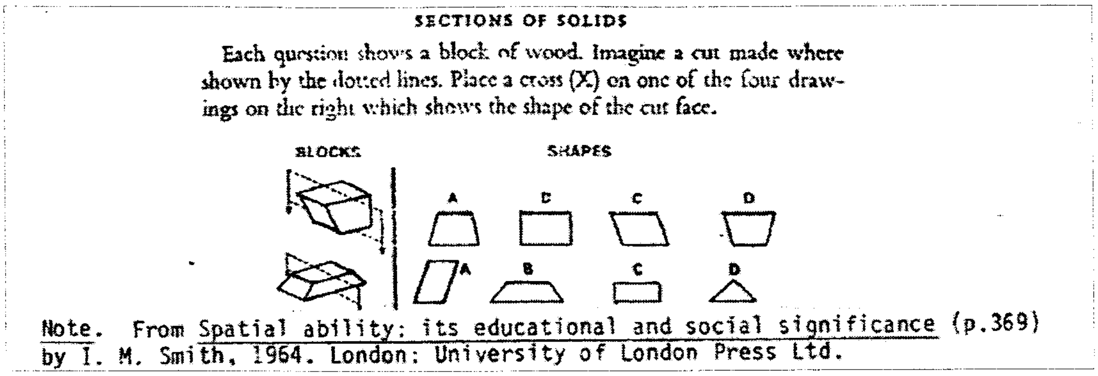
공간능력에 대한 학자마다 정의가 다른 것은 선행연구의 각 연구내용에서 필요로 하는 공간능력의 차이가 있기 때문에 각 연구에서 정의를 달리한 것이며 또한 본 연구에서처럼 Tartre(1984)의 정의에 의해 각 분류를 대상(object)이 움직이는 것(SV)과 대상을 바라보는 관점을 변화시키는 것(SO)로 구별을 하였을 때에도 서로 간에 겹치는 능력을 필요로 한다는 것이다. 예를 들어 SV의 회전(2차원)에서 가운데 놓인 수선에 대해 90도 이하의 회전 시에는 움직임이 없이도 주어진 도형의 성질을 찾는데 무리가 없으므로 SO에 해당되지만 수선에 대해 90도 이상의 회전에서는 도형을 정신적으로 회전시켜야 할 때는 SV의 기술을 사용하여야 한다고 하였다(Cooper & Shepard, 1973; 아래 <그림 Ⅱ-2> 참조). Tartre 연구에서도, 2차원 상에서 묘사된 3차원의 대상 인식 역시 SO의 능력을 사용한다(1984, p. 18)고 하여 이 두 가지 능력이 정확히 분리될 수 없음을 시사하고 있다.

<그림 Ⅱ-1>을 제시한 Tartre(1984)의 연구를 자세히 살펴보면 SO의 검사지인 Gestalt Completion Test(Ekstrom et al., 1976)와 8문항으로 이뤄진 구조화된 설문지를 통해 나타내는 학생들의 행동양식에서 성별간의 차이만을 조사한 것이다. 이 연구결과에서는 SO 검사지를 사용하였지만 연구자 Tartre 자신이 분류한 SO에 대해 하위 요소인 애매한 도형과 전체에 대한 부분, 각각에 대해 연구결과가 조사된 바가 없는 것은 특기할만한 사항이다.

국내의 연구 중 김유경과 방정숙(2007)을 살펴보면 Tartre(1984)의 연구에서는 3차원의 도형에서 잘려진 단면(2차원)을 구하는 문제를 SV의 3차원->2차원으로의 변환에 분류(<그림 Ⅱ-3> 참조)하는 반면 김유경과 방정숙의 연구에서는 대부분의 학생들의 응답에서도 주어진 도형에 회전을 시도하지 않고 사각형단면을 얻은 답안을 제시하고 있음에도 <그림 Ⅱ-4>의 문제를 SV의

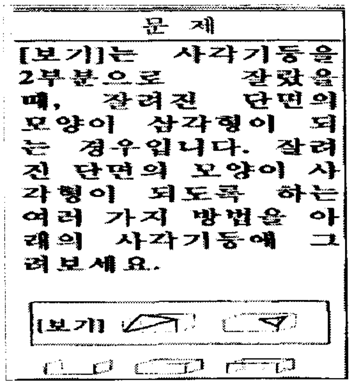


<그림 Ⅱ-2> Card Rotation Test의 2차원 회전(Tartre, 1984, 재인용)



<그림 II-3> 3차원-> 2차원의 변환(Tartre, 1984, 재인용).

회전에 분류한 차이점을 보이고 있다. 또한, 쌓기나무에 대한 분류가 선행연구에서 구체적으로 다뤄진 부분이 많이 부족하였는데 김유경외(2007)은 SO의 분류를 Tartre 분류보다는 정영옥(2000)을 따른 것으로 방향감각, 위치감각, 물체의 구조인식능력으로 구분하고 이 중 물체의 구조인식능력에 쌓기나무 개수세기, 부분을 뺐을 때 모양알기, 소마큐브 부분 찾기로 분류하였다. 여기서 방향감과 위치감각은 한 대상을 바라보는 방향과 위치에 따른 서로 다른 표상을 다룬 것으로 Tartre의 재조직된 전체에 가깝고, 물체의 구조인식능력은 전체에 대한 부분에 있어서 부분을 전체에 맞추기와 전체에서 부분을 찾기에 해당되는 것으로 사료된다.



<그림 II-4> 회전(김유경외, 1984).

교구를 활용한 공간능력에 관한 연구에는 주로 학생들의 학습활동에서 교구의 역할을 논의하였는데 전평국・정부용(2003)의 연구에서는 초등학교 5학년 학생, 3명을 대상으로 전, 선, 면의 위치를 대신하는 표시기능과 격자무늬와 같은 보조기능의 시각적 자료를 사용하였을 때 교구활용은 주로 문제이해단계 또는 적용 및 발전에서 이루어졌고 문제의 답을 확인하기이해 교구를 직접 조작하고 탐색하는 현상이 학력수준 능력이 높은 학생에게 나타났으나 대신 학력이 낮은 학생은 문제에 대한 이해력이 낮아 교구에 의존하는 정도가 가장 높았다고 보고되었다. 한기완(2001)은 제 7차 교육과정에서 공간감각의 향상을 위해 모양뒤집기와 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기에 대한 지도방안을 교과서를 중심으로 논의하였으나 이 지도방안에 대한 효과는 실험을 통해 구체적으로 제시되지 않아 알 수 없다.

이상의 선행연구를 고찰한 결과, 연구에 따라 분류의 기준이 서로 다룰지라도 크게는 <그림 II-1>처럼 두 가지 영역인 SV와 SO로 분류된다. SV가 대상의 정신적 상의 움직임을 포함한다면 SO는 시각적 대상에 대해 구조적인 이해와 파악을 포함한 것으로 결론지을 수 있다. 따라서 본 연구에서는 중학교 학생을 대상으로 한 좀 더 복잡한 공간능력을 포함하므로 SV의 회전을 포함하지 않았으며, 대신 오일러 공식의 도입도 물체의 구조적인 인식능력으로 전체에 대한 부분으로 분류하였음을 주지할 필요가 있고 공간능력을 위한 교구활용에 대한 연구는 한 개의 연구에 불과하여 매우 미흡함을 알 수 있었다. 이외에도 본 연구와 관련된 국내 선행연구로는 강순자 외(1999)에서는 기하소프트웨어를 활용하여 공간능력 향상을 위한 정다면체의 학습자료를 개발하여 2차원와 3

차원 사이의 변환활동을 위한 자료를 개발하였고, 권오남 외(1996)는 공간능력에서 남녀의 성차를 조사하였는데 성별 차이는 하위변인 대부분 남학생이 더 우수하였고, 중소도시에서 가장 극심하게 나타나고 그 다음이 농어촌이고 대도시는 비교적 차이가 미미하게 나타났다.

또한, 앞에서 언급된 김유경외(2007)는 학생들의 공간감각과 공간추론능력의 실태를 조사하였는데 본 연구에서 공간능력이라고 하는 영역을 공간감각으로 사용하여 공간 시각화 능력이 공간 방향화 능력보다 우수하였으며 공간감각과는 별개로 공간추론능력에서는 변환의 인식과 사용, 분석과 종합, 시각화 방법의 개발과 적용 등이 주로 사용되었음을 알 수 있었다.

3. 귀납적 탐구수업 모형

수업모형은 수업의 단계를 수업내용의 특성에 따라 해결해나가는 연구된 틀이며 기대된 수업효과를 얻을 수 있는 수업의 과정이다(신현성, 2004).

신현성(2004)이 재인용한 타바(Taba, Durkin, Fraenkel, & McNaughton, 1971)는 귀납적 수업에서 세 가지 사고과제를 제시하였다. 즉, 개념형성, 자료해석, 원칙적용단계로 나누어 각 단계는 단계의 수업에 알맞은 수업전략이 있다고 하였다. 첫째, 개념형성은 구체적 사물이나 항목들을 커다란 개념적 체계 속에 모으는 수단으로 학습활동으로는 열거 및 목록화하기, 집단화하기, 명명 및 범주화하기를 들 수 있다. 둘째, 자료해석으로는 해석하기, 추론하기, 일반화하기와 같은 정신활동을 들고 학습활동으로는 중요한 관계 찾기, 찾아낸 관계를 탐색하기, 추론하기 등이 있다. 셋째, 원리 적용의 학습활동으로는 결과를 예측하기, 친숙하지 않은 현상을 설명하기, 가설세우기, 예측이나 가설을 설명하기, 지지하기, 예측 입증하기를 들 수 있다.

수학과에서 탐구수업 모형을 귀납적 수업모형과 발견적 수업모형으로 나누어서 생각할 수 있는데, 본 연구에서는 이 두 가지 모형을 구분하지 않고 귀납적 탐구수업모형을 사용하였다. 귀납적 탐구수업모형의 수업절차는 다음과 같이 요약할 수 있다.

<표 II-1> 귀납적 탐구수업모형 절차

단계	사고과제	수업전략
단계 1	문제파악, 탐색	여러 자료를 제시하여(가능하면 학생의 인지구조에 알맞은 자료를 제시하는 것이 바람직하다) 자료의 다양성을 유지한다.
단계 2	자료제시, 관찰탐색 (탐구활동)	일반화를 하기 위해 주어진 소재를 이용하여 단계적 탐색과정을 거친다.
단계 3	규칙성 발견 및 개념정리	탐색과정을 통해 얻은 직관적인 개념이 명확한 기호나 언어를 도입하여 개념을 설명, 정리한다.
단계 4	적용·응용	증명, 발전적인 보기와 같은 수준의 경험이 이어지며, 교사의 설명에 의하여 확증작업이 이루어진다.

위 모형에 기초하여 중학교 기하내용을 중심으로 고상숙·홍인숙·박혜선 (2008)에서 공간능력을 위해 개발된 학습자료 내용을 참고하여 재구성하였다.

4. 다면체의 구성요소 및 요소간의 관계

Gay(1998)는 평면에서의 다각형에 대응하는 3차원 공간에서의 도형을 다면체라고 하고 다각형과 다면체의 구성요소와 구성요소간의 관계에 대하여 정의하였다. 이를 정리하면 다음과 같다.

가. 구성요소

다각형	다면체
꼭짓점 (0차원 개체) 변 (1차원 개체) 내부 (2차원 개체)	꼭짓점 (0차원 개체) 모서리 (1차원 개체) 면 (2차원 개체) 내부 (3차원 개체)

나. 구성요소 사이의 관계

다각형	다면체
ㅇ각 꼭짓점은 정확히 두 변의 교점이다. ㅇ변은 오직 꼭짓점에서만 만난다. ㅇ각 꼭짓점은 2개의 변이 동시에 만나는 점이다. ㅇ내부는 변에 의해 완전히 닫혀있다. ㅇ변과 꼭짓점은 서로 연결되어 있다.	ㅇ각 모서리는 정확히 두 면의 교점이다. ㅇ모서리는 오직 꼭짓점에서만 만난다. ㅇ각 꼭짓점은 3개 혹은 그 이상의 모서리가 동시에 만나는 점이다. ㅇ내부는 면에 의해 완전히 닫혀있다. ㅇ면, 모서리, 꼭짓점은 서로 연결되어 있다.

Ⅲ. 연구방법

학생의 기하 사고의 공간능력 향상을 위한 교구 활용 수업의 효과를 조사하고자 하는 본 연구의 목적을 달성하기 위해서 본 연구는 자료의 효과를 더욱 구체적으로 파악하기 위해 정량연구와 정성연구를 사용하는 혼합연구 방법을 사용하여 연구의 신뢰도를 향상시키고자 하였다. 최근 들어 혼합연구 방법론이 미래 교과교육의 개선을 위하여 제시되고 있다(Greene, Caracelli, & Graham, 1989; Mathison, 1988; Swanson, 1992; Creswell, 2003). 두 연구방법은 본 연구문제의 성취도 검사와 교구의 장점 및 단점에 관한 조사가 각각 서로 다른 연구방법을 필요로 하고 있어 고려되었다.

본 연구에서 사용한 기하적 교구는 4D frame으로 이 교구는 연결봉과 연결대로 이루어져 있다. 연결봉은 도형의 변 또는 모서리 역할을 하는 것으로 길이에 따라 3cm, 5cm, 6cm, 7cm, 10cm의 5가지가 있고, 연결봉의 가운데를 가위로 길게 잘라서 연결봉의 두께를 줄일 수도 있고 봉과 봉 사이에 끼워 연결하여 사용할 수도 있다. 연결대는 연결봉을 이어주는데 사용되며, 여러 가지 각도를 나타내는 2발(180°), 3발(120°), 4발(90°), 5발(72°), 6발(60°), 8발(45°) 연결대와 물음표, C자형 연결대로 구성되어 있어서 도형을 구현할 때 여러 가지 각도를 조작해낼 수 있다.

1. 연구대상

본 연구는 경기도의 한 중학교의 2학년 전체학급 14개 반 중에서 2개 반을 실험반으로, 2개 반을 비교반으로 선정하였다. 임의의 1개 반의 학생 구성은 남학생과 여학생이 골고루 분포되어 있다. 실험에 참가한 4개 반은 모두 같은 수학교사에게 지도 받은 학생이며 조별활동이 효과적인 상, 중, 하 수준의 학생이 고루 섞여 있는 이질집단이다. 4개 반의 수업 분위기를 고려하여 수업분위기가 밝은 1개 반과, 대체로 수업분위기가 조용하고 얌전한 1개 반을 각각 실험반과 비교반으로 골고루 선정하여 비교적 균형을 이루도록 하여, T_1반, T_2반을 실험 반으로 C_1반, C_2반을 비교반으로 선정하여 본 연구를 실시하였다.

<표 III-1> 연구에 참가한 실험반과 비교반의 학생 수

구분	실험반 (명)			비교반(명)		
학급	T_1반	T_2반	합계	C_1반	C_2반	합계
인원	38	39	77	38	37	75

2. 연구 절차

자료 수집의 방법으로 교구의 효과를 파악하기 위해서는 실험반과 비교반의 사전·사후 성취도 검사를 통한 정량연구방법을 사용하였으며, 사전·사후 검사지를 활용하여 그 결과를 ANCOVA 통계분석 처리를 하였다.

임인재 외(2003)는 공분산분석은 독립변인 이외에 다른 요인이 종속변인에 영향을 주는 것을 통제함으로써 가능한 한 독립변인만이 종속변인에 영향을 미칠 수 있도록 하는 분석방법으로 검증의 정확도를 높여줄 수 있다고 하였다. 이 분석 방법은 잡음요인에 대한 실험적인 통제가 아니라 통계적인 통제방법으로 실험집단을 무선표집하거나 무선적으로 배당할 수 없었기에 있을 수 있는 잡음요인의 영향을 통계적으로 통제할 수 있기 때문에 본 연구에서 분석방법으로 택하였다. 사후성취도 분석에서 사전성취도가 공변량으로 사용되었는데 이는 실험설계에서 변인을 통제함으로써 성취도에 대한 정확도를 기하기 위함이다.

공간능력 발달 과정에서 교구의 역할을 조사하기 위해서는 통계적 수치가 의미하는 효과 있음 · 없음 이상의 것이 필요하므로 정성연구방법의 사례연구를 사용하였다. 실험 반에서는 수업의 학습 과정을 녹화한 비디오, 연구자의 현장 관찰 노트와 학생의 기록지 등 3 가지 측면에서 자료수집이 이루어졌다. 매 차시 학습지를 개개인에게 나누어 주어 형성평가의 형식으로 학습 내용의 인지 정도를 조사하였고, 학습 후 개인적으로 학습 내용을 적어보고 학습 소감을 적게 함으로써 기하 사고력의 발달 과정에서 교구활용이 미치는 수업의 효과를 조사하였다.

자료 수집의 시기는 학생들의 학기말고사가 끝난 바로 직후인 12월 초순부터 12월 말 방학 전까지의 약 3주 동안 5차시로 진행되었다. 이 5차시 학습자료는 고상숙 · 홍인숙 · 박혜선 (2008)의 연구의 결과를 활용하였다. 연구의 신뢰도를 높이기 위해 장시간의 자료수집이 더 선호되는바 10차시의 연구과정을 초기에 계획하였으나 1개월간의 겨울방학의 긴 공백으로 인해 2월에 이루어질 수업이 12월과 연속적인 수업이 되지 못하는 현장의 문제점으로 인해 부득불 12월에 실시한 내용으로만 연구수행이 수정 보완되었고 12월 말 2학기 종료식 이전 날의 마지막 시간에 사후 검사를 실시하여 연구의 검사도구로 활용하였다. 그 결과를 SPSS의 프로그램에 따라 통계분석 처리하였다.

3. 연구도구

가. 수학 학습 성취도

일반적으로 교육정책 위정자들은 (1) 비형식적 교사 구안검사, (2) 교사에 의한 지필검사, 그리고 (3) 표준검사라는 3가지 유형의 평가가 존재함에 동의한다(Costa와 Loveall, 2002). 따라서 본 연구의 실험을 위해 사용한 연구도구는 위의 (2)의 분류에 해당된다. 사전 검사로는 2학년 2학기말고사의 성취도의 결과를 활용하였다. 학기말고사의 평가 내용이 2학년 8-나 "사각형의 성질과 도형의 닮음"부분으로 2, 3차원의 기하사고의 향상을 다루는 본 연구의 선행 내용으로 밀접한 관계가 있어 본 연구를 위한 사전 성취도 검사로 채택되었다. 사전 성취도 검사 문항은 25문항이고, 만점은 100점이다.

사후성취도 검사는 사전성취도 검사와 마찬가지로 25문항이고, 각 문항당 배점은 4점으로 만점은 100점으로 평가요소로는 선행연구 고찰에서 언급하였듯이 공간시각화의 변환(10), 공간방향화의 재조직된 전체(5)와 전체에 대한 부분(10)을 포함하여 구성되었다.

나. 연구지도안

중학교 기하내용을 바탕으로 선행연구인 고상숙외(2008)에서 공간능력을 위해 개발된 학습자료 내용을 재구성하여 사용된 연구지도안의 구성은 다음과 같다(부록 참조).

<표 III-2> 연구지도안

모형	차시	학습내용	주안점
귀납적 수업 모형	1차시	교구로 다양한 도형 만들어 보기	교구 특성 파악하기
	2차시	정사면체와 정육면체의 겨냥도와 전개도 그리기	정사면체와 정육면체의 겨냥도의 차이점을 비교
	3차시	정육면체와 정팔면체의 겨냥도와 전개도 그리기	정육면체와 정팔면체의 전개도의 차이점을 비교
	4차시	평면도형에서 꼭짓점 자르기를 이용 입체도형으로 확장	과정 중심적인 사고를 위해 하위 차원에서부터 교구의 특성을 살려서 설명이 필요
	5차시	정이십면체의 꼭짓점 자르기를 이용한 축구공 만들기	수학적 성질을 활용한 축구공 만들기에서 수학의 특성을 발견할 수 있음

Ⅳ. 연구결과 및 분석

1. 교구를 활용한 활동에서 성취도조사

가. 사전 성취도 검사 결과

사전 성취도 검사 결과는 <표 Ⅳ-1>, <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-1> 수학 학습 성취도의 사전 검사 결과

		N	M	SD
실험반	T_1반	77	72.21	24.29
	T_2반		70.30	23.95
	전체		71.24	23.978
비교반	C_1반	75	72.83	20.55
	C_2반		69.26	23.06
	전체		71.07	21.749
전체		152	71.16	22.830

<표 Ⅳ-2> 사전검사에서 t-검증

	구분	N	평균	표준편차	t	Sig. (2-tailed)
사전 성취도	실험반	77	71.24	23.978	.048	.962
	비교반	75	71.07	21.749		

실험반과 비교반의 사전성취도에 대한 t-검증 결과 5% 수준에서 p>.05이므로 유의미한 차가 없다. 즉 두 집단은 사전검사 성취도에서 동질집단이라 할 수 있다.

나. 사후 성취도 검사 결과

교구를 활용한 기하탐구활동을 통해 학생들의 성취도 변화의 신뢰도 있는 분석을 하기 위하여 사전검사를 공변량으로 한 ANCOVA 분석을 한 결과는 <표Ⅳ-4>와 같다. 실험처치에 의한 학생들의 성적은 유의수준 0.05에서 p<.05 로 유의미한 차이를 보였다. 즉 교구를 활용한 수업의 학생 성취도가 교구를 활용하지 않은 수업의 학생성취도보다 유의미하게 더 효과가 있었다고 말할 수 있다. 분석에 있어 설명을 덧붙이자면 사전검사에서 동질집단이었으므로(위 <표 Ⅳ-2> 참조) 사전성취도를 통제하는 ANCOVA를 통해 굳이 통제할 이유는 없지만, 이 변인의 영향을 제거한다하더라도 집단간의 관계는 여전히 변함이 없다(임인재, 김신영, 박현정, 2003, p. 397)는 주장을 토대로 다른 t검증, 분산분석(ANOVA)등의 분석을 사용하여도 통계적으로 유의도는 변함이 없었다.

<표 Ⅳ-3 > 실험반과 비교반간 사전・사후 검사 결과

구분	실험반(N=77)		비교반(N=75)	
	평균	표준편차	평균	표준편차
사전검사	71.24	23.98	71.07	21.75
사후검사	75.05	13.77	69.33	14.91
전체	72.56	19.50	70.15	18.58

평균은 100점 만점임.

<표 Ⅳ-4> 사후 성취도의 ANCOVA
Tests of Between-Subjects Effects
종속변수: 사후성취도

소스	제 Ⅲ유형 제곱합	자유도(df)	평균제곱	F	유의확률 (Sig.)
수정된 모델	13899.587(a)	2	6949.794	56.892	.000
절편	25519.700	1	25519.700	208.908	.000
사전성취도	13080.383	1	13080.383	107.078	.000
실험반과 비교반 비교	793.855	1	793.855	6.499	.012
오차	18201.465	149	122.157		
합계	810880.000	152			
수정합계	32101.053	151			

a R Squared = .433 (Adjusted R Squared = .425)

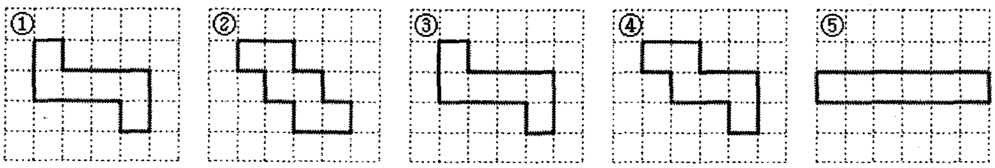
<표 Ⅳ-5> 항목별 성취수준

	t-test for Equality of Means						
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper
Total SV2	0.566	150	0.573	0.5811	1.0276	-1.4494	2.6116
	0.564	143.632	0.574	0.5811	1.0301	-1.4551	2.6173
Total SO1	0.666	150	0.506	0.3221	0.4834	-0.6330	1.2772
	0.665	146.913	0.507	0.3221	0.4841	-0.6347	1.2788
Total SO2	2.506	150	**0.013**	3.5816	1.4291	0.7578	6.4055
	2.507	149.992	**0.013**	3.5816	1.4288	0.7585	6.4047
Total (SO) SO1+SO2	2.397	150	**0.018**	3.9037	1.6287	0.6855	7.1219
	2.397	149.949	**0.018**	3.9037	1.6285	0.6859	7.1216

공간능력 항목별 성취도를 분석하면 다음과 같다. 전체적으로 실험반이 비교반보다 유의한 향상을 나타내었

3. [시각화(변환)]

정육면체의 전개도라고 할 수 없는 것은?



21. [시각화(변환)]

정팔면체의 각 꼭짓점으로부터 일정한 길이의 모서리를 잘라내면 단면은 어떤 다각형인가?

① 삼각형 ② 사각형 ③ 오각형 ④ 육각형 ⑤ 팔각형

고(<표 Ⅳ-4> 참고), 항목별로는 공간방향화가 공간시각화보다 더 높다. 공간방향화의 하위 요소간에는 재조직된 전체가 전체에 대한 부분보다 높다. 실험반과 비교반의 정답률을 살펴보면 다음과 같다(<표 Ⅳ-6> 참조).

정답률이 높은 문항은 3번(100.00%)으로 나타났는데 이는 시각화(변환)를 측정하는 문항으로, 교구활용을 통하여 학생들이 여러 입체를 조작해봄으로써 2차원에서 3차원으로의 변환에 대한 학습을 쉽게 할 수 있었다고 할 수 있다. 그러나 비교반과 별 차이가 없던 문항으로 이 문항에 대한 좀 더 세밀한 분석은 전개도에 관한 학습은 중학교 1학년과정에서 많이 다루었으며 문항의 지문 중 ⑤과 같은 답안은 깊은 사고없이 쉽게 선택할 수 있는 답안이었던 것으로 사료되어 이에 대한 수정이 요구된다.

정답률이 낮은 문항은 21번(33.77%)으로 나타났는데 여전히 3차원 도형에서 잘라진 단면(2차원)의 모양을 파악하는 것이 어려운 과제로 보인다. 이 낮은 정답률은 방향화가 시각화보다 우수한 결과를 가져온 직접적 요인으로 볼 수 있으며, 아직 학생의 개념습득에 내면화가 충분히 되지못한 상태로 더 많은 학습 시간과 개념습득을 위한 학생의 노력이 요구된다. 그러나 실험반은 비교반을 상회한 것으로 보아 이는 교구 조작을 통하여 얻은 효과라고 볼 수 있을 것이다.

이상의 실험결과에 대해 다음과 같이 요약해볼 수 있다.

첫째, 학생이 교구를 직접 조작해봄으로써 쉽게 공간도형의 구성요소를 시각적으로 지각하고 2차원과 3차원간의 변환하는 과정이 용이하였고(SV), 또한, 도형의 방향의 변화에도 불구하고 도형의 성질을 파악하는 과정(SO)이 훨씬 수월하기 때문에 실험반이 비교반보다 전체 공간능력에서 유의한 향상을 가져왔다.

둘째, 방향화가 시각화보다 높은 성취를 보이는 것은 선행연구와 다른 것으로 교구를 사용하여 직접 적용했던 학습 경험이 방향화에 대한 더 높은 성취를 가져왔다($p=0.018$). 또한, 방향화 내에선 전체에 대한 부분(SO2. $p=0.013$)이 재조직된 전체(SO1)보다 실험의 효과가 있었던 것으로 나타났다.

셋째, 방향화에서 '전체에 대한 부분'는 대상들 상호간의 관계를 파악해야 하므로 학생 자신이 교구를 활용하여 직접 조작해보는 활동을 통한 본 연구에서는 효과가 높았던 것으로 보인다. 하지만 방향화에서 재조직된 전체는 여전히 재인지하는 과정에 따른 장기간의 학습이 이루어져야하는 부분이다.

넷째, 공간 시각화의 변환에서 도형의 일부 잘라진 단면의 모양을 파악하는 활동은 어려운 개념이므로 이 부분에 대한 더 많은 교사의 연구와 준비가 필요하다.

<표 Ⅳ-6> 공간능력 구성요소별 정답률

항목	하위요소	문항번호	정답률(%)	
			실험반	비교반
공간 시각화(SV)	변환(SV2)	3	100.0	98.67
		4	40.26	54.67
		5	90.91	93.33
		6	96.10	96.00
		7	92.21	93.33

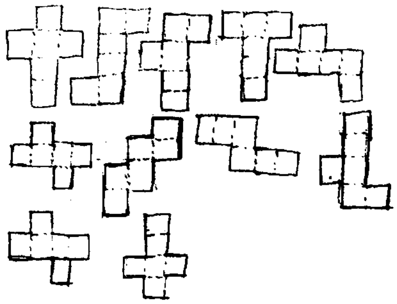
		8	44,16	37.33
		19	76.62	74.67
		21	33.77	22.67
		22	58.44	60.00
		23	72.73	60.00
	공간시각화 평균 정답률		73.45	69.07
공간 방향화(SO)	재조직된 전체 (SO1)	1	84.42	81.33
		2	89.61	88.00
		9	98.70	100.00
		11	96.10	92.00
		12	79.22	78.67
		평균	89.61	88.00
	전체에 대한 부분 (SO2)	10	93.51	92
		13	92.21	89.33
		14	68.83	66.67
		15	88.31	81.33
		16	42.86	41.33
		17	77.92	62.67
		18	44.16	34.67
		20	58.44	34.67
		24	64.94	60.00
		25	61.04	40.00
		평균	69.22	60.27
	공간방향화 평균 정답률		76.02	69.51
공간능력 평균 정답률			75.05	69.33

2. 공간시각화, 공간방향화의 발달과정에서 학생들의 반응

가. 정다면체의 전개도와 겨냥도 그리기활동

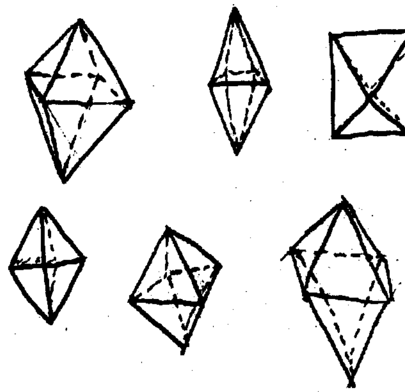
1) 정육면체 전개도 그리기

위 그림 <그림Ⅳ-1>에서와 같이 교구 사용을 통하여 2차원에서 3차원으로의 변환을 용이하게 할 수 있어서 가능한 전개도를 정확하게 그리는데 훨씬 도움이 되었으며, <그림Ⅳ-2>에서도 교구의 직접 조작을 통하여 각 방향에서 바라본 정팔면체의 겨냥도를 관찰을 통해 직관적으로 잘 그려내었다. 하지만 본 교구는 선분(뼈대) 중심의 활동을 지원하기 때문에 면이 없다. 따라서 겨냥도에서 점선과 실선을 잘 구별하지 못하는 경우가 몇 몇 학생에게서 나타났다.



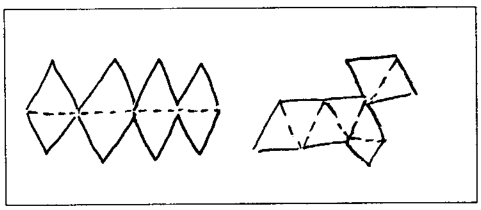
<그림Ⅳ-1> 공간 시각화(변환) 활동

2) 정팔면체 겨냥도 그리기



<그림Ⅳ-2> 공간방향화(전체에 대한 부분) 활동

또한 본 교구는 연결대가 점과 점을 쉽게 이어주는 특징을 가지고 있기 때문에 학생들은 <그림Ⅳ-3>의 경우와 같이 정팔면체의 전개도에서 실제 정팔면체 전개도가 되지 않은 경우에 대하여도 정삼각형 8개가 이어져서 정팔면체가 만들어지는 경우가 몇 몇 학생에게서 공통적으로 나타났다.



<그림Ⅳ-3> 정팔면체 전개도 오류

<그림Ⅳ-3>은 점들이 이어져서 본 교구에서 정팔면체가 되는 것처럼 인식하게 하는 경우가 발생하는 대표적인 예이다. 이때는 전개도란 변으로 이루어진 면과 면이 모여 입체가 될 수 있음을 상기할 필요가 있다. 여러 차시로 구성된 활동에서 다음 상위 차시로 발전하다 보면 기초적인 개념이 습득된 이후라고 생각하고 전개도를 몇 개나 찾을 수 있을까하는 다양성 활동에만 치중할 우려가 발생한다. 이를 메타인지적 이동이라고 하는데 이 점에 유의하여 교사는 전개도와 입체의 관계를 재조명할 기회로 삼아야 한다. <그림Ⅳ-4>처럼 종이로 만든 경우도 같이 제시하여 왜 전개도가 되지 않은지에 대해 학생 스스로 설명할 수 있는 기회로 삼아서 입체도형이란 모서리를 통해 면과 면이 이어지고 내부는 닫힌 공간이 되며 점은 모서리와 모서리의 교점으로 면을 연결하지 못한다는 것을 본 논문의 7페이지에서 제시한 다면체의 구성요소간의 관계를 바탕으로 재인지할 기회를 갖는다. 이 점은 교구사용에서 교사가 교구의 장점 및 단점을 미리 잘 파악하고 오류의 기회를 활용하여 다시 개념을 재확인하는 과정을 통해 학생의 반성적 사고를 이끌 수 있어야 한다. 다음은 오류상황을 학습의 기회로 활용하는 한 장면이다.

[프로토콜1]

교사: (학생이 그린 정팔면체 전개도 중에서 위 <그림Ⅳ-3>를 가리키며) 이것은 정팔면체가 될 수 있나요?

학생A: 네. 이것 보세요.(자신이 교구로 만든 위와 같은 전개도의 한 꼭짓점에 4개의 정삼각형이 되게 접으며) 정팔면체가 만들어집니다.

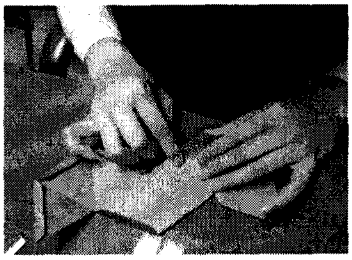
학생B: 이것보세요. 저도 만들었어요.

(여기저기서 많은 학생들이 웅성거리며 자신이 위 <그림Ⅳ-3>과 같이 교구로 만든 모형을 보여준다.)

교사: 이 부분을 종이로 만들어볼까요? 어떻게 되나요?

학생들: (종이로 만들어 본 한참 후) 이렇게 점들이 모인 곳은 떨어져서 입체가 될 수가 없어요.

교사: 그러면 우리가 사용한 교구로는 왜 될 수 있었을까요?



<그림Ⅳ-4> 종이로 정팔면체 전개도에서 정팔면체 접기

학생들: 서로 연결이 되니까요.

학생들: (위 <그림Ⅳ-3>을 가리키며) 저것은 정팔면체의 전개도가 아니네요.

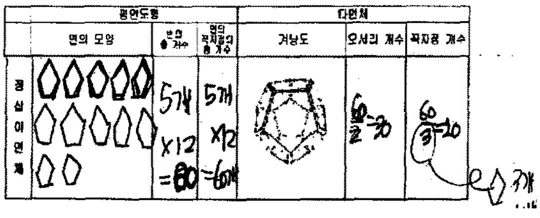
교사: 다시 정리해 봐요?

학생C: 정팔면체라는 입체가 되려면 변이 연결이 되어서 면과 면을 이어 입체를 만들어야 해요. 점과 점은 만나서 면을 만들지 못하니까 입체가 되지 않아요.

교사: 그래요. 가장 기본적인 것이지만 입체를 만들어 갈 때 우리가 늘 생각해야 되는 것이지요! [또 교사는 전개도가 되는 경우와 이처럼 되지 않은 경우를 비교하게 해서 대화 내용은 더 진행되었다.]

나. 정다면체의 면의 모양과 개수로 모서리와 꼭짓점 개수 구하기 활동

1) 정십이면체의 면의 모양과 개수로 정십이면체의 모서리와 꼭짓점 개수 구하기



<그림Ⅳ-5> 공간 방향화(재조직된 전체) 활동

[프로토콜 2]

교사: 정십이면체를 이루는 면은 어떤 도형입니까?

학생A: 정오각형이요.

교사: 그러면 정십이면체의 모서리의 개수, 꼭짓점의 개수는 각각 몇 개입니까?

학생A: 모서리는 30개이고요, 꼭짓점은 20개요.

교사: 왜 그렇죠?

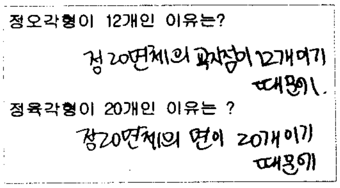
학생A: 왜냐하면,... 음...(잠시 생각을 하고 뭔가 계산을 하더니) 정십이면체는 정오각형 12개로 이루어져있고, 정오각형 1개의 변의 개수가 5개이니까 총 변의 개수는 $5\times12=60$개, 총 꼭짓점 개수도 $5\times12=60$인데, 여기서 정십이면체를 만들면 모서리 개수는 $\frac{60}{2}=30$, 꼭짓점 개수는 $\frac{60}{3}=20$입니다.

교사: 모서리 개수는 왜 2로 나누고, 꼭짓점 개수는 왜 3으로 나누어주는 거죠?

학생A: 왜냐하면, 전에 정사면체를 만들 때 삼각형 2개에서 각 삼각형에서 변 1개씩, 2개씩 묶어주어야 정사면체 한 모서리가 되므로 $3\times4=12$, $\frac{12}{2}=6$으로 총 모서리 개수를 2로 나누면 되고, 정육면체도 마찬가지로 사각형 2개를 각 변 1개씩 그러니까 변 2개를 묶어줘야 정육면체 한 모서리가 되잖아요. 그렇게 하면 정십이면체도 마찬가지로 정오각형 2개에서 각 변 1개씩 즉 2개를 묶어주어야 하나의 모서리를 만드니까 2로 나누어 주었습니다. 꼭짓점의 개수는 정사면체에서 한 꼭짓점에 삼각형 3개가 만나서 정사면체 1개의 꼭짓점이 되므로 $3\times4=12$, $\frac{12}{3}=4$ 즉, 총 꼭짓점개수를 3으로 나누어 주면 됩니다. 정육면체도 같고, 정십이면체는 한 꼭짓점에 정오각형이 3개씩 모이므로 3으로 나누어 주었습니다.

이 프로토콜은 학생들의 대화가 매우 유용하게 자신의 활동을 잘 묘사하고 있음을 알 수 있다. 교구를 이용한 활동을 통해 수학적 사실을 설명하는 과정을 보면 오일러 공식을 단순히 수식으로만 인식하고 적용하는 것이 아니라 왜 그렇게 되는지를 정당화시켜가는 과정임을 알 수 있다. 이는 개념의 내면화를 이루어가는 한 과정으로써 Piaget(1952)가 주장한 반영적 추상화를 이루어가는 한 단면이라고 할 수 있다.

2) 정이십면체의 꼭짓점 자르기를 통하여 축구공 만들기 활동


정오각형이 12개인 이유는?
정20면체의 꼭지점이 12개이기 때문에.
정육각형이 20개인 이유는 ?
정20면체의 면이 20개이기 때문에

<그림 IV-6> 공간시각화(회전) 활동

[프로토콜3]

교사: 정이십면체의 꼭짓점을 깎으면 정이십면체를 이루는 면은 어떤 모양이죠?

학생B: 정오각형과 정육각형으로 이루어져요.

교사: 왜?

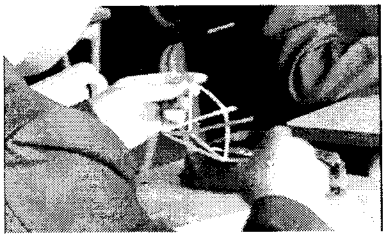
학생B: 정이십면체의 한 꼭짓점에 정삼각형이 5개가 모이잖아요, 그래서 꼭짓점을 깎아내면 단면이 정오각형이 되고, 또... 아, 정육각형은요 정이십면체의 한 면이 정삼각형이므로 정삼각형을 잘라내면 정육각형이 생겨요.

교사: 그러면 정오각형과 정육각형은 각각 몇 개씩이죠?

학생B: (한참 생각을 하더니) 정오각형은 12개, 정육각형은 20개요.

교사: 그것을 어떻게 구했지?

학생B: 정이십면체는 꼭짓점이 $\frac{3\times20}{5}=12$이므로 12개의 정오각형이 생기고, 정이십면체의 면이 20개이므로 정육각형 20개가 나옵니다.



<그림 IV-7> 정팔면체 만들기

<그림 IV-8> 정사면체 꼭짓점 자르기

준정다면체의 성질은 교구가 없는 환경에서는 잘 설명하기 어려운 수학적 성질이다. 본 교구를 활용하면서 갖는 가장 큰 장점은 직접 자신의 활동을 통해 직관적 관찰이 가능하고 이를 바탕으로 수학적 성질을 발견해서 정당화하고 더 나아가 자신이 만든 것과 친구가 만든 것을 비교해서 객관화하는 과정이 매우 용이하다는 것이다. 가령 평면의 칠판 수업에서 3차원의 입체를 설명하는 경우 조작적 사고가 일어나리라고 기대하기 어렵고 단지 축구공이 가진 수학적 사실을 외우는데 그치기 쉽다. 또한, 교사용 기술공학적 화면에서 시각적으로 관찰하는 과정을 통해 인지할 수도 있겠지만 그런 경우는 자신이 직접 조작하는 과정을 통해 그 개념이 내면화가 되어 동화나 조절로 이어나갈 수 있게 확인하는 과정이 더 필요하다.

그러나 교구로 직접 만들어보고 관찰하여 수학적 사실을 발견해가는 것은 조작적 사고를 통해 자신이 스스로 구성해가는 기회가 되며 서로 간의 상호작용이 활성화 되는 계기가 마련되어 객관화하는 과정이 용이해짐을 알 수 있다. 이런 과정은 스키마(Piaget, 1952)가 견고하게 이루어가는 과정이 될 수 있으므로 교구활동의 장점이 본 연구에서도 충분히 활용되었음을 알 수 있다. 또한, 지금까지 교구로는 준정다면체의 단면의 모양을 구현하기가 곤란하여 학생들이 눈으로 확인하고 파악하기는 어려웠다. 그것은 고정식이거나 조립식의 교구로써 이미 면이 고정되어 있어 그 단면을 직접 잘라보는 것이 불가능하고 따라서 만들어진 상태에서 추측만 가능하였다. 이것은 본 교구가 프로토콜 1에서는 유의할 사항으로 작용된 점이기도 하지만 준정다면체 활동에서는 면이 있음을 가정하고 접근하면 본 교구의 유연성을 지닌 교구의 장점이 십분 발휘되는 부분이라고 할 수 있다. 따라서 교사는 교구의 장점을 활용할 줄 알고 또 그 단점을 토론의 주제로 삼아 극복하는 과정도 미리 연구하여서 수학수업이 역동적으로 의미있게 진행될 수 있게 하여야 할 것이다.

V. 결 론

교구를 사용한 수업을 통해 학생들은 훨씬 더 유연하게 공간능력을 위한 학업성취에서 높은 성취를 보였다. 공간능력은 전통적인 수업을 통해서만은 쉽게 획득되기가 어려운 단원인 만큼 앞으로 다양한 교구가 학생의 공간능력 신장을 위해 학교 현장 수업에서 활용되었으면 한다.

김유경(2007)의 실태조사에 의하면 현행 수학 교과서에서는 공간 시각화에 비하여 공간 방향화 내용을 심도 있게 다루지 않고 있기 때문에, 초등학교 6학년 학생들이 3차와 관련한 공간 방향화 능력이 공간 시각화 능력에 비하여 부족한 것으로 드러났다. 이와 대조적으로 본 연구에서는 중학교 2학년 학생을 대상으로 한 공간능력에 대한 사후검사에서 공간방향화가 공간시각화보다 더 높은 성취를 보이고 있다. 이는 교구를 사용하여 직접 적용했던 경험이 공간방향화에 더 효과가 있었음을 반영한다. 교구를 사용하지 않은 전통 수업에서는 공간시각화의 우세가 보고되었다면(김유경, 2007), 교구를 사용한 환경에서는 공간방향화의 우세가 가능하였음을 나타낸다. 다시 말해 그 동안 향상시키기 어려웠던 공간방향화를 교구를 사용함으로 향상시킬 수 있었다고 말할 수 있다. 이는 본 교구활용의 효과의 한 특징이다. 앞으로의 연구에서는 같은 사전 사후 검사지를 사용하여 공간방향화와 공간시각화 활동에서 각각의 구성요소간의 향상도, 상관관계 또는 이들 사이에서 교구의 역할을 조사하는 후속연구가 요구된다.

또한, 공간방향화의 재조직된 전체에 대한 문항인 9번과 공간시각화의 변환에 대한 문항인 4번, 5번, 7번, 22번의 경우는 작은 차이이지만 비교반의 정답률이 오히려 높음을 볼 수 있다. 이 문항들은 본 연구에서 사용된 교구를 이용하면 훨씬 쉽게 접근할 수 있는 내용이지만, 연구기간이 짧고 또한 시기적으로 기말고사를 끝낸 시점이었으므로 학생들은 교구를 수학적 개념을 이해하는 학습보다는 다른 목적(놀이감 등 전도)으로 사용하려는 경향이 컸기 때문에 이런 약간의 차이가 나타난 것으로 보인다. 하지만 전체적으로는 통계적으로 교구활용으로 유의함을 나타낸 것으로 보아 앞으로 연말이 아닌 안정적인 분위기 속에 개념이해에 초점을 둔 좀 더 장기간의 연구가 이루어진다면 이는 쉽게 전환될 것으로 보인다. 교사는 본 교구의 특징인 유연성에 유의하여 교수 학습의 목적에 따른 안내를 제공할 수 있어야 하므로 수업에 대한 사전 연구가 먼저 선행되어야 할 것이다.

끝으로, 교과교육에서 교구활용에 관해 국내에서 소개되는 대부분의 연구가 외국의 교구를 활용하고 있어 열악한 현장에서 비용면에 현실성이 없는 점은 가장 큰 단점으로 꼽을 수 있다. 상대적으로 저렴하고 국내 기하적 교구로 유일한 4D frame과 같은 교구활용을 통한 학습이 지니는 효과는 학년별 기하의 여러 영역에서 지속적으로 연구가 이루어져서 현장의 학습을 세부적으로 안내해야 할 필요가 있다. 또한, 본 연구의 학생들의 학습 과정에서도 나타내었듯이 모든 교구는 장, 단점을 가지고 있다. 장점을 활용하고 단점을 보완하는 구체적인 방안과 안내를 제공하는 연구가 더욱 활성화되어 학생의 수학적 사고를 유의미하게 향상시킬 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

강순자 · 고상숙 (1999). 공간 능력을 신장하기 위한 기하 학습자료 개발: GSP를 이용하여 정다면체 구성. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **38(2)**, pp.179-187.

고상숙 · 홍인숙 · 박혜선 (2008). 기하사고의 공간능력 향상을 위한 교구활용 수업의 효과. 수학교육학논총, **32**, pp.57-84.

권오남 · 박경미 · 임형 · 허라금 (1996). 공간능력에서의 성별차이에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **35(2)**, pp.125-141.

김유경 · 방정숙 (2007). 초등학교 6학년 학생들의 공간감각과 공간추론능력 실태조사. 학교수학, **9(3)**, pp.353-373

신현성 (2004). 수학과 수업모형 및 설계, 서울: 경문사.

임인재 · 김신영 · 박현정 (2003). 교육 · 심리 · 사회 연구를 위한 통계방법, 서울: 학연사.

전평국 · 정부용 (2003). 공간시각화에서 교구 역할. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **15**, pp.87-92.

한기완 (2001). 공간감각을 기르기 위한 교구활용방안. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **12**, pp.57-66.

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, pp.47-60.

Burnett, S. A., Lane, D. M., & Dratt, L. M. (1979). Spatial visualization and sex differences in quantitative ability. *Intelligence* **3**, pp.345-354.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (ED.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp.420-464). New York: Macmillan.

Cooper, L. A., & Shepard, R. N., (1973). Chrometric studies of the rotation of mental images. In W. G. Chase(Ed.), *Visual Information Processing*(pp. 75-176). New York Academic Press.

Costa, A. & Loveall, R. (2002). The legacy of Hilda Taba. *Journal of Curriculum and Supervision*, **18(1)**, pp.56-62.

Creswell, J. W. (2003). Research design: *Quantitative, qualitative, and mixed methods approaches.* Thousand Oaks: SAGE Publications.

Ekstrom, R. B., French, J. W., Harmon, H. H., & Dermen, D. (1976). *Manual for Kit of Factor-Referenced Cognitive Tests.* Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Fennema, E. (1979). Woman and girls in mathematics-equity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, **5**, pp.126-139.

Fennema, E,. & Sherman, J. (1977). Sex related differences in mathematics achievement, spatial visualization, and affective factors. *American Education Research Journal*, **14**, pp.51-71.

French, J. W. (1951). The description of aptitude and achievement tests in terms of rotated factors. *Psychometric Monographs*, **(No 5)**. Chicago: University of Chicago Press.

Gardner, H. (1983). *Frames of mind: the theory of multiple intelligences.* New York: Basic Books.

Gay, D. (1998). *Geometry by discovery.* New York: Wiley.

Greene, J. C., Caracelli, V. J., & Graham, W. F.

(1989). Toward a conceptual framework for mixed-method evaluation designs. *Educational evaluation and policy analysis*, **11(3)**, pp.255-274.

Grobecker, B., & De Lisi, R. (2000). An investigation of spatial-geometrical understanding in students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, **23**, pp.7-22.

Hannafin, R. D,. & Truxaw, M. P. (2008). Effects of spatial ability and instructional program on geometry achievement. *The Journal of Educational Research*, **101(3)**, pp.148-156.

Kaufmann, G. (1990). Imagery effects on problem solving. In P.J.Hampson, D.F. Marks, & J. R. E. Richardson(Eds.), *Imagery, Current development* (pp. 169-196). London: Routledge & Kegan Paul.

Kersh, M. E., & Cook, K. H. (1979, August). *Improving mathematics ability and attitude, a manual.* Seattle: Mathematics Learning Institute, University of Washington.

Lohman, D. F., & Kyllonen, P. C. (1983). Individual differences in solution strategy on spatial tasks. In R. F. Dillon & R. R. Schmek(Eds.), *Individual differences in cognition*(pp.105-135). New York: Academic Press.

Lohman, D. F. (1979). *Spatial ability: Individual differences in speed and level(Technical Report No.9).* Stanford, CA: Aptitude Research Project of School of Education, Stanford University.

Mathison, S. (1988). Why triangular? *Educational Researcher*, **17(2)**, pp.13-17.

Mcgee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, **86(5)**, 889-918.

Piaget, J. P. (1952). *The origins of intelligence in children.* New York: International Universities Press.

Phunlapthawee, K. (2000). *An analysis of construct structures for spatial and error pattern scores*

Swanson, S. (1992). Mixed-method triangulation: Theory and practice compared. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Francisco.

Taba, H., Durkin, M., Fraenkel, J., & McNaughton, A. (1971). *A Teacher's Handbook to Elementary Social Studies. An Inductive Approach.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Tartre, L. A. (1984). *The role of spatial orientation skill in the solution of mathematics problems and associated sex-related differences.* Unpublished doctoral dissertation, The University of Wisconsin-Madison.

Tartre, L. A. (1990). Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21(3)**, pp.216-229.

An Effect of Students' Learning for Spatial Ability Using a Geometric Manipulative

Choi-Koh, Sang Sook
Dept. of Mathematics Education, Dankook University, Jukjeon-Dong, Gyeonggi, Korea
E-mail : sangch@dankook.ac.kr

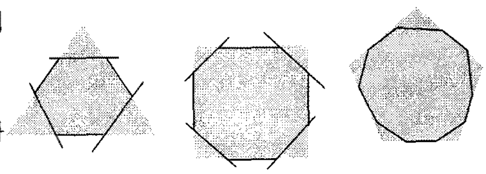
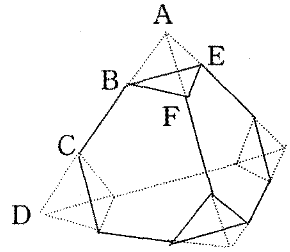
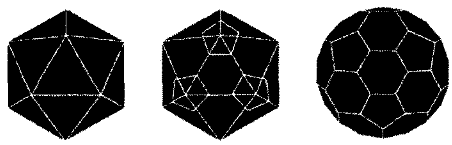
Jung, Inchul
Dept. of Mathematics Education, Chonnam National University, Gwangju Metropolitan City, Korea
E-mail : ijung@chonnam.ac.kr

Park, Mangoo
Dept. of Mathematics Education, Seoul National University of Education, Seoul, Korea
E-mail : :mpark29@snue.ac.kr

The study was to investigate an effect of students' learning for enhancing spatial ability, using a geometric manipulative recently designed. A mixed methodology was chosen to achieve the purpose of the study. To find students' achievement, 152 of the 8th graders in Kyunggi Do participated in data collection. At the same time, students' performance of the class was videotaped and analyzed to see students' responses. The results showed that the effect of using the manipulative was statistically significant at level, $p< .05$ to enhance the spatial ability. Specifically, in comparison of each component, spatial orientation was more effective than spatial visualization. In the spatial orientation, the part of field was more effective than the reorganized whole. It showed that students were given more opportunities to find mathematical properties and relations between 2nd and 3rd-dimensional figures through their intuitive observation, and also the manipulative helped the students find the property of the part of field because it gave an easy way to manipulate the property of the find parts of whole which was composed of the frame of the solid figures without surfaces. In using the manipulative, students were very flexible in finding the number of plane figures, but the relations between the 2nd and 3rd dimensional figures need to be clearly guided in consideration of the characteristics of the manipulative, based on the definitions of geometric properties(cf. points can make lines, not surfaces directly).

* ZDM Classification : D43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Spatial ability, Mixed methodology, Manipulative, 4-D Frame, Math Achievement

제 5차시 지도안

<table>
<tr><td colspan="3">**정다면체의 꼭짓점을 자를 때 단면의 모양**</td><td>차시</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="3">**관련 단원 I. 정다면체 (7-나)**</td><td colspan="2">**공간방향화(전체와 부분)**</td></tr>
<tr><td colspan="5">**학습 목표 : 정다면체의 꼭짓점을 자를 때 단면의 모양과 꼭짓점의 개수를 말할 수 있다.**</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>문제 파악</td><td colspan="3">· 평면도형인 다각형의 꼭짓점을 자르면 어떤 도형이 생기는지 발표해 보자.
· 학습목표 제시
- 입체도형의 꼭짓점을 자르면 어떤 모양으로 변하는가?
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">전개</td><td>탐구 활동</td><td colspan="3">· 정다면체를 이루는 면의 모양과 면의 개수, 한 꼭짓점에 모이는 면의 개수와 꼭짓점의 개수를 각각 알아보자.
· 연결봉 AB, BC, CD와 같이 3개를 연결하여 만들어보자.
· 연결봉 3개씩으로 연결된 것을 모서리로 하여 정사면체를 만들어보자.
· 정사면체의 꼭짓점 A를 잘라내어 점 B, E, F를 이어보자.
· 단면은 어떤 도형으로 변하는가?
왜 그렇게 변하는지 이유를 말해 보자.

</td></tr>
<tr><td>규칙성 발견</td><td colspan="3">· 정사면체의 꼭짓점을 자르면, 단면은 어떤 도형이 되는가?
- 한 꼭짓점에 3개의 다각형이 모이므로 꼭짓점을 자르면 정삼각형이 생긴다.
· 정육면체와 정팔면체의 꼭짓점을 자르면, 꼭짓점은 각각 어떤 모양이 되는가?
· n개의 면이 정다면체의 꼭짓점에 모일 때, 꼭짓점을 자른 부분은 정 n각형이 생긴다.</td></tr>
<tr><td>적용</td><td colspan="3">· 정십이면체의 꼭짓점을 자르면, 꼭짓점은 어떤 모양이 되는가?
· 축구공은 오각형이 12개 육각형이 20개 모여 있다. 왜 그러는지 이유를 말해 보자.

정20면체 / 정20면체의 꼭짓점을 깎는 과정 / 깎은 정20면체</td></tr>
<tr><td colspan="2">정리</td><td colspan="3">· 한 꼭짓점에 n각형의 면이 모였을 때 꼭짓점을 자르면 어떤 모양인지 정리해보자.
· 수업후의 소감을 적어보자.</td></tr>
</table>

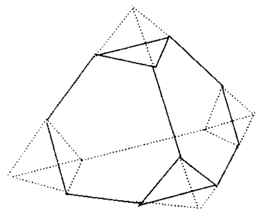
제 5차시 학습지

정다면체의 꼭짓점을 자를 때 단면의 모양		차시	5
학습목표	**정다면체의 꼭짓점을 자를 때 단면의 모양과 꼭짓점의 개수를 말할 수 있다.**		
( )반 번호 ( ) 이름( )			

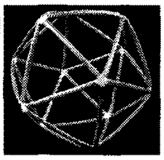
1. 정다면체에 대하여 다음을 알아보자.

정다면체	면의 모양	면의 개수	한 꼭짓점에 모이는 면의 개수	꼭짓점의 개수
정사면체				
정육면체				
정십이면체				

2. 정사면체는 한 꼭짓점에 모이는 정삼각형의 면의 수가
( )개이고,
정사면체의 꼭짓점을 잘라내면 단면은
( )각형으로 변한다.

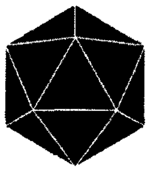


3. 다음을 구하여 보자.

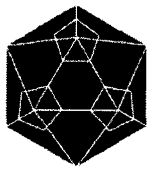
정다면체	겨냥도	옆면인 정다각형을 그려보자.	한 꼭짓점에 모이는 면의 수는?	정다면체의 꼭짓점을 자르면		잘린 정다면체를 이루는 면의 모양은?
				옆면인 정다각형의 모양은 어떻게 변하는가 그려보자	단면은 어떤 모양으로 변하는가 그려보자	
정6면체						정팔각형이 ( )개 정삼각형이 ( )개 총( )면체가 된다.
정20면체						정오각형이 ( )개 정육각형이 ( )개 총( )면체가 된다.

4. 축구공은 정오각형이 12개, 정육각형이 20개가 모여 이루어져있다. 왜 그런지 이유를 말해 보자.

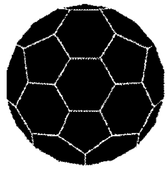
(1) 정오각형이 12개인 이유는?



정20면체



정20면체의 꼭짓점을 깎는 과정



깎은 정20면체

(2) 정육각형이 20개인 이유는 ?

5. 수업 내용을 정리 해 보고 느낀 점을 말해 보자.