한국초등수학교육학회지 13(2) 247-268.   Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 13(2) 247-268.

초등수학에서 문장제의 수학적 구조 파악을 통한 문장제 이해 지도 방안

라우성1) · 백석윤2)

본 연구는 주어진 문장제의 이해에 초점을 두고 그 문제를 구성하고 있는 수학적 구성요소에 대한 이해 및 그 요소들 사이의 구조를 바탕으로 수학학습 성취도가 높은 학습자 군이 보이는 문장제 이해의 특징을 살펴보고, 일반 학생들의 문장제 이해를 돕는 지도 방안을 구안하는데 연구 목적이 있다. 이 연구 목적을 위하여 수학교과서 및 수학익힘책 총 24권에 제시되어 있는 문장제를 수학적 구성요소에 의거 수학적 구조를 유형화하고, 3학년 1개 학급의 수학학습 성취도가 높은 학생을 대상으로 그들이 보여주는 문장제의 수학적 구조 파악의 특징을 살펴보았으며, 이를 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 일반적인 지도 방안 구안에 적용하였다. 연구 결과는 첫째, 문장제는 문장제를 구성하고 있는 수학적 구성요소가 이루고 있는 구조를 총 9가지 유형으로 분류할 수 있다. 둘째, 수학학습 성취도가 높은 학습자는 문장제를 이해할 때, 4가지의 특징을 보였다. 셋째, 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 지도 방안을 4가지 도출해 내어 수정·보완하였다.

[주제어] 초등수학, 문장제 이해, 문장제, 문장제의 수학적 구조

Ⅰ. 서 론

NCTM(1980)은 An Agenda for Action에서 수학교육의 목표를 문제해결 능력의 향상에 두었으며 그 이후로 문제해결은 수학교육의 중요한 화두로 1980년대를 거쳐 1990년대까지 지속적으로 강조되어 오고 있다. NCTM(2000)은 Principles and Standards for School Mathematics에서 문제해결은 모든 수학 학습의 통합적 요소이며 수학을 학습하는 목표 뿐 아니라 실생활의 삶을 위한 중요한 수단이라고 밝히고 있다. 우리나라에서도 수학과 교육과정에서의 문제해결에 대한 관심과 그 실천적 강조는 4차 교육과정 이후 2007년 개정 교육과정에 이르기까지 이어지고 있다.

그럼에도 교육 현장에서 학생들에게 수학을 가르치다 보면 계산 능력이 우수한 학생조차 문장제를 해결하는데 어려움을 느끼는 경우를 볼 수 있다. 사칙 연산의 의미와 알고리즘을 분명히 이해하는 것만으로도 이와 관련된 문제를 해결할 수는 있지만, 실제 문장제가 제시되었을 때 자신이 알고 있는 수학 내용을 어떻게 적용해서 해결해야 될지를 잘 모르는 것이다. 실제로 Kintsch, Reusser와 Weimer(1988)는 1학년 학생들을 대상으로 하여 문제를 해결 활동을 연구하였는데, 단순한 수치만의 형식으로 주어졌을 때에는 학생 전원이 문제를 해결하였

---

1) [제1저자] 서울 삼양초등학교
2) [교신저자] 서울교육대학교 수학교육과

지만 문장제 형식으로 주어졌을 때에는 단지 29%만이 그 문제를 해결할 수 있었다고 한다.

이와 같은 현상이 나타나는 것은 수치와 식만으로 제시되고 알고리즘의 조작에 의해 해결되는 수식제와는 달리 문장제는 수학적 언어와 일반 언어를 혼합하여 제시하며, 실생활에서의 필요성이 반영되었고 그 해결에 있어서 복잡한 정보를 분석 선택하는 과정을 거치게 되기 때문이다(박경애, 2007). 또한, 이러한 자료들은 문장제 해결을 위해서는 문제에 대한 이해가 반드시 뒷받침되어야 함을 보여주는 사례라 할 수 있을 것이다. 문제에 대한 충분한 이해 없이는 그 다음에 이루어져야 할 문제해결의 계획도 세우기 어려우며 그 계획의 실행도 제대로 이루어질 수 없다. 일반적으로 주어진 문제 상황을 적절하게 이해하지 못한 학생들은 대부분 문제해결에 실패하는 것이 보통이다(이의원, 1995).

Polya(1957)는 문제해결 과정의 첫 단계로서 문제이해 단계를 제시하였으며 이해가 되지 않은 문제에 답하려고 하는 것은 어리석은 일이라고 언급하였다. 따라서 그는 그의 저서 How to Solve It에서 보다 이해를 잘하기 위한 활동으로 문제의 핵심 부분을 샅샅이 조사하여 하나씩 차례로 생각해 보고, 여러 가지로 조합하여 생각해 보기도 하고, 각 부분을 서로 관련시켜 보기도 하며, 개개의 것을 문제 전체와 관련시켜 보라고 강조하고 있다. 또한, 문장제 해결에서 문장제를 구성하는 사실과 개념 및 그들 사이의 상호 관계인 구조를 의미하는 과제 상황과 문제해결자가 과제 상황을 받아들여 형성시킨 정신적 표상인 문제 공간이란 개념을 중요시 하고 있다(조영신, 2000, 재인용).

문제를 철저하게 분석하여 이해하는 것은 문제해결의 성패를 좌우하는 중요한 요소이며 문장제가 비록 문장이라는 표현수단을 활용하고는 있지만 그 안에 있는 수학적 요소 사이의 관계를 파악하지 않고서는 문제해결의 실마리를 찾는 것은 쉽지 않은 일이다. 그러나 문제이해를 위한 지도 전략과 관련된 많은 연구에서는 문장제의 언어적 해석이나 의미 파악에 주목하고 있으며, 문장제 안에 구성되어 있는 수학적 요소들이 이루고 있는 구조 파악에 대해서는 별로 많은 연구가 이루어지고 있지 않다.

따라서 본 연구에서 학습자의 성공적인 문제해결을 위해서는 문제이해 과정이 중요함을 알고 문제이해 능력의 향상을 위한 지도 방안을 알아보고자 한다. 이를 위하여 문장제를 중심으로 그 문제에 들어있는 수학적 구성요소와 그 요소들이 이루고 있는 수학적 구조에 집중하여 수학학습 성취도가 높은 학습자가 보이는 문제의 수학적 구조 파악의 특징을 분석하고, 이를 바탕으로 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 활동을 고안하여 문장제 이해를 돕는 지도 방안을 구안하는데 그 목적을 둔다.

이를 위하여 설정된 연구문제는 다음과 같다.

가. 문장제를 구성하는 수학적 요소들이 이루는 문장제의 수학적 구조의 유형은 어떠한가?

나. 수학학습 성취도가 높은 학습자가 주어진 문장제에 대한 수학적 구조 파악 과정에서 보이는 특징은 어떠한가?

다. 문장제의 수학적 구조 파악을 강조함으로써 문장제 이해를 돕는 지도 방안은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 문제이해의 중요성

수학적 문제해결에서 문제를 이해한다는 것은 문제의 각 문장만을 이해한다는 것이 아

니라, 질문을 포함한 문장들 사이의 관계 속에서 문제가 제시하는 상황에 대한 이해, 그리고 질문에 답하기 위해 무엇을 해야 하는지에 대한 이해를 한다는 것을 의미한다(김진숙, 1998).

문제해결에서 이해의 본질에 대해 Greeno(1977)는 Gestalt 심리학자들의 업적에 기초하고 있다. 이들은 문제 상황에 대한 구조적 이해에서 발생하는 "유의미한" 문제해결과 기억되어 있는 알고리즘의 맹목적인 적용에 의한 "기계적인 학습"을 구분하였다. 이러한 입장에 의하면, 이해는 해결되어야 할 문제에 기저하는 구조에 대한 하나의 표상을 구성하는 과정이며, 문제의 구성요소들 사이의 관계에 대한 구조적 이해가 문제해결의 과정에서 본질적인 단계이고 또 직접적으로 문제해결을 가져오는 것으로 보여 지고 있다(Duncker, 1945; Polya, 1957, 재인용).

Riley, Greeno와 Heller(1983)는 문장제의 해결과정에서 필요한 지식을 세 가지로 구분하였는데, 그 세 가지는 문제의 구성요소들을 일관성 있는 구조로 맞추어 문제의 의미관계를 이해하기 위한 문제도식(problem schemata), 문제해결에 관련된 행위에 관한 지식을 나타내기 위한 행위도식(action schmata), 문제해결을 계획하기 위한 전략지식(strategic knowledge)이다. Riley 등은 이 세 가지 지식이 모두 문장제 해결에서 중요한 역할을 하며, 이러한 지식 중에서 어느 하나가 부족해도 아동은 문장제 해결을 성공적으로 수행할 수 없다고 주장한다. 또한 아동이 문장제 해결에서 실패하는 것은 문장제 해결 과정의 요소인 행위도식이 부족한 것에 기인하는 것이 아니라 문제이해에 필요한 문제도식의 결여에 기인한다는 선행연구의 결과를 그들의 이론적 기본 가정으로 하고 있다(현주, 1990).

2. 문장제의 구성요소

지금까지 과제 변인인 문장제의 구성요소에 관하여 Hembree와 Marsh(1993)은 문제해결적 요소를 중심으로 문제의 구성요소를 맥락(context), 기술적 측면(mechanicx), 형태(format)로 구분하였다. Goldin과 McClintock(1984)은 문제해결의 과제 변인들을 총망라하여 구문론, 의미론, 구조, 문제해결 과정 등 크게 4가지로 분류하였다(강화나, 2008). 또한, 김진숙(1998)은 문장제에서의 수학과 언어의 문제를 동시에 고려하여 문장의 구문론, 수학적 의미론적 구조, 문장제가 제시하는 문제해결 전략, 문제의 소재를 문장제의 구성요소로 분류하고 있다.

의미론적 구조는 문장제에 관한 1970년대 후반 이후의 연구 중 주된 연구 주제이다. 그러나 모든 문장제를 연산의 유형에 따른 의미론적 구조 파악의 시도는 몇 가지 문제점을 갖고 있는데 그 중에 하나가 문장제의 문장이 갖고 있는 구문적 분석과 연산구조 분석을 통합하여 모형화 함으로써 연산이 필요하지 않은 문장제, 그리고 단순 사칙연산이 아닌, 혼합연산의 문장제들을 어떻게 유형화할 것인가의 문제가 있다. 그러나 우리 초등학교 교육과정에서는 이렇게 단순한 연산구조 이상을 요구하는 문장제들을 접하게 된다. 따라서 교과서 분석을 위한 의미론적 구조에서는 기존의 유형에 속하지 않은 혼합 계산, 비연산 문제들을 분류하는 기준이 필요하다(김진숙, 1998).

Polya(1957)는 문제의 보다 나은 이해를 위하여 학생은 문제의 주요 부분, 즉 미지인 것, 자료, 조건을 샅샅이 조사하여 하나하나씩 차례차례 생각해 보고, 여러 가지로 조합하여 생각해 보기도 하고, 각 부분을 서로 관련시켜 보기도 하며, 개개의 것을 문제 전체와 관련시켜 보도록 권하고 있다.

그에 따르면 문제의 해결이란 본질적으로 미지인 것을 자료와 연관시키는 것이며 이때

이 역할을 하는 것이 조건이다. 그리하여 "미지인 것은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 조건은 무엇인가?"와 같은 발문을 생각하였는데 이 질문은 일반적으로 적용될 수 있는 것으로 어떠한 종류의 문제를 다룰 때에도 효과적으로 활용할 수 있다고 하였다. 이들 발문은 문제해결자에게 무엇보다 중요한 것으로서 문제에 대한 이해도를 점검할 수 있고 문제의 이런 저런 주요 부분에 주의를 기울일 수 있도록 한다.

문제에는 미지인 것이 여러 개 있을 수도 있고, 조건을 각각 따로 떼어 생각해 보아야 할 다양한 부분으로 이루어져 있을 수도 있으며, 어떤 자료는 그 자체만을 고려해 보는 것이 바람직할 수도 있다. 또한 풀이를 진전시키기 위하여 도입되는 보조요소가 존재한다. 이것은 보조선이나 보조 미지수 등으로 도입되기 위한 분명한 이유가 존재하는 것이다.

본 연구에서는 Polya(1957)가 제시하는 문제의 주요 부분에 주목하여 문장제를 분류하기 위한 기준으로 문장제를 구성하고 있는 수학적 구성요소를 정의하고, 교과서의 문장제를 분석하는데 활용하고자 한다.

3. 문장제의 구조

문제의 어렵고 쉬움은 엄격하게 정의하기에는 어려운 과제이나 지금까지 진행된 연구결과들을 살펴보면 몇 가지 준거에 의하여 문제구조를 규정하려는 경향이 강했다. 어떤 연구자는 문장의 수, 수학적인 단어나 기호의 수 등으로 문제의 난이도를 결정하려고 했고, 정보처리 과정 모형에서는 문제의 정보 수와 정보의 이용을 망(network)으로 나타내어 문제의 구조를 밝히려 했다. 이 방법은 문제의 내적 · 외적에 존재하는 정보수를 빠짐없이 조사하여 이것과 정보의 이용관계를 연결하였기 때문에 구조를 파악하려는 어떤 시도보다 명확하다는 장점이 있다. 그러나 수학문제에서 이 방법은 작업과정이 복잡하여 실제 사용이 어렵기 때문에 비효과적이라고 검토되었다(최수연, 1991).

반면, 각각의 문장제에는 그 문제를 해결하기 위해 문장 안에 문제의 실마리들을 제공하고 있으며 Polya(1957)는 이러한 구성요소를 문제의 주요 부분과 보조요소로 소개하고 있다. 문제를 보다 잘 이해하기 위하여 주요 부분들을 샅샅이 조사하거나 하나하나씩 차례차례 생각해 보고 여러 가지로 조합하여 보는 것, 각 부분을 서로 관련시켜 보는 것, 개개의 것을 문제 전체와 관련시켜 보는 것 등을 권하고 있다. 이러한 활동을 통해 학습자는 문제를 해결하는데 중요한 역할을 할 것 같은 세목을 미리 생각해 두고 명확하게 해 놓을 수 있다. 즉, 학습자들은 문제의 주요 부분과 보조요소가 이루고 있는 관계를 파악함으로써 문제해결에 다가설 수 있게 된다.

따라서 문제의 주요 부분과 보조요소가 이루고 있는 관계를 문제의 구조라 할 수 있을 것이며, 문제의 주요 부분과 보조요소가 문제의 수학적 구성요소로써 모든 문제에 존재하는 것이라고 생각할 때, 문장제 안에서 문제의 수학적 구성요소들이 이루고 있는 관계로 문장제의 수학적 구조를 정의할 수 있을 것이다.

III. 연구 방법

1. 문장제를 구성하는 수학적 요소에 따른 문장제의 수학적 구조 유형화

가. 문장제를 구성하는 수학적 요소 추출

기존의 연구에서는 문장제를 구성하는 요소를 문장의 구성과 의미 등에 중점을 두어왔다. 본 연구는 이와는 다르게 문장제 속에서 문장제를 해결하기 위해 문제해결자에게 주어지는 수학적 구성요소를 추출하고자 하였다.

Polya(1957)는 How to Solve It에서 문제의 주요 부분으로 미지인 것, 자료, 조건을 제시하였으며 문제를 해결하기 위한 실마리로 보조요소를 도입하였다. 이러한 요소들은 답을 구하는 어떠한 문제에서도 적용 가능하다. 이는 곧 문장제가 어떠한 영역에 포함되어 있든 적용 가능하다는 것을 의미한다. 그러므로 본 연구에서는 Polya가 제시한 문제의 주요 부분과 보조요소를 문장제를 구성하는 수학적 요소로 재해석하여 문장제를 구성하는 수학적 요소로서 미지인 것, 자료, 조건, 보조요소를 정의하고 이 요소들을 바탕으로 하여 현행 초등학교 수학교과서 및 수학익힘책에 수록되어 있는 문장제를 분석하였다[3].

나. 문장제를 구성하는 수학적 요소에 따른 문장제의 수학적 구조 유형화

초등학교 수학교과서 및 수학익힘책 24권에서 연구자가 정의한 문장제의 정의에 따라 문장제를 분류하였다. 분류한 문장제는 문장제를 구성하는 수학적 요소(미지인 것, 자료, 조건, 보조요소)들을 바탕으로 하여 분석하였다.

문제에 따라 미지인 것, 자료, 조건은 모든 문제에 포함되어 있었으나 보조요소의 경우 문제에 따라 있는 경우도 있고 없는 경우도 있었다. 따라서 미지인 것, 자료, 조건은 문장제 안에서 1가지가 포함되어 있는지, 혹은 여러 가지가 포함되어 있는지, 보조요소의 경우는 문장제 안에 포함되었는지, 안되었는지에 따라 문제 유형을 총 16가지로 구분하였다. 그러나 초등학교 수학의 특성상 미지인 것이 여러 가지인 경우는 그리 많지 않은 관계로 미지인 것이 여러 가지인 것은 한 가지의 경우로 하여 총 9가지 유형으로 분류하였다.

2. 수학학습 성취도가 높은 학습자가 보이는 문장제의 수학적 구조 파악의 특징

가. 유형에 따른 문장제 문항 작성

초등학교에서 등장하는 문장제를 중심으로 하여 분류한 총 9가지 유형의 문장제를 바탕으로 하여 학습자들이 문장제의 유형에 따라 문제이해에 어떠한 특징을 보이는지를 파악하기 위하여 문장제의 유형에 따른 대표 문항을 개발하였다. 문항은 3학년 2학기의 학습자라면 해결할 수 있는 내용으로 3학년 2학기 수학교과서와 수학익힘책을 참고하여 출제하였다. 문항의 수는 총 10문항으로써 9가지 유형의 문항 중 출제 빈도가 가장 높았던 유형2의 경우는 2가지 문항을 출제하였다. 이는 학습자들과의 면담시 문장제에 대한 이해를 좀 더 상세히 파악하기 위함이다.

나. 수학학습 성취도가 높은 학습자가 보이는 문장제의 수학적 구조 파악의 특징 분석

다양한 각도에서 이론적인 접근을 통하여 학습자를 위한 지도 방안을 강구할 수 있지만 이는 실제적인 면에서 다소 거리가 있을 수 있다. 따라서 그 또래의 학습자가 문장제를 해

3) '미지인 것'은 주어진 문장제에서 구하고자 하는 것을 의미하며, '자료'는 미지인 것을 구하기 위하여 문장제에서 이미 주어진 정보를 말한다. '조건'은 문장제 안에서 미지인 것과 자료를 연결하는 요소이며, '보조요소'는 주어진 문제를 해결하기 위해 문제해결자가 새롭게 첨가해서 사용하는 요소로서 보조선이나 보조식 등을 의미한다.

결할 때 보이는 수학적 구조 파악의 특징을 관찰함으로써 성공적인 문제해결자가 보이는 특징을 활용할 수 있을 것이다. 특히나, 수학학습 성취도가 높은 학습자는 대체적으로 성공적인 문제해결의 결과를 지니게 되므로 그들의 수학적 구조 파악의 특징을 관찰한다면 이론만으로는 부족할 수 있는 부분을 보완할 수 있을 것이다.

서울 강북구의 S 초등학교 3학년 한 개 반을 대상으로 하여 3학년 1학기에 이루어진 단원평가 및 성취도평가에서 비교적 높은 성취를 보였던 평균 90점 이상의 학습자로 단순 계산 능력 우수아보다는 문제해결력이 높은 학습자를 대상으로 면담을 실시하였다. 연구자가 미리 작성해 두었던 10개의 문항을 학습자에게 제시하되, 한 문장제가 시험지 한 쪽에 들어가도록 하여 학습자가 주어진 문제에만 집중하도록 하였다. 면담에 참여한 학습자는 7명의 아동으로 면담은 연구자와 학습자가 일대일로 하는 것을 원칙으로 하여 진행하였다. 면담은 학습자의 문제이해와 문장제를 구성하는 수학적 구성요소 및 구조 파악 정도를 밀도 있게 질문하고 답하는 식으로 진행하였다.

면담의 모든 내용은 녹취를 하였으며 학습자의 특징을 파악할 수 있는 부분을 중심으로 분석하였다. 면담의 내용은 학습자가 문장제를 이해하는 방식이나 구성요소를 인식하는 정도 및 방법을 파악하는데 중점을 두어 분석하였다.

3. 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 지도 방안 구안

가. 수학학습 성취도가 높은 학습자의 특징을 바탕으로 지도 방안 구안

녹취한 면담의 내용을 바탕으로 하여 수학학습 성취도가 높은 학습자가 주로 보이는 문제이해의 특징을 나열하여 보고 각 학습자가 보이는 반응을 분류하여 보았다. 문제의 유형을 중심으로 문장제가 가지고 있는 수학적 구성요소에 따라 학습자가 보이는 반응을 살펴봄으로써 수학학습 성취도가 높은 학습자가 문제이해를 위해 사용하는 전략 및 특성을 추출하였다. 그리고 이를 바탕으로 문장제의 이해를 위한 지도 방법을 마련하였다.

나. 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 지도 방안의 수정 및 보완

앞서 마련한 지도 방법을 학습자에게 직접 투입하여 보고 학습자의 반응을 바탕으로 하여 지도 방법을 수정 · 보완하기 위하여 사례연구를 실시하였다. 참여하는 학습자는 단순계산능력은 뛰어나지만 문장제의 이해에 어려움을 느끼고 이로 인하여 문제해결에 실패하는 학습자 5명을 대상으로 하였으며, 수학학습 성취도가 높은 학습자라도 문장제의 유형에 따라 어려움을 느끼는 부분에는 참여하도록 하였다. 또한 계산 능력을 많이 요구하지 않으면서 학습자의 사고력을 요구하는 문장제의 경우는 수학학습 성취도가 낮은 학습자도 참여하였다.

사례연구는 '연구문제 나.'를 바탕으로 하여 만들어진 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 지도 방안을 수정 · 보완하기 위한 목적으로 진행되었다. 문장제 해결에 어려움을 느끼는 학습자 5명을 대상으로 하여 '연구문제 나.'에서 이루어진 면담과 같은 방법으로 이루어진다. 학습자에게 문장제를 제시하고 그들이 문제해결시 어려움을 겪는 것을 처치하기 위해 이미 고안된 지도 방안 중 적절한 것을 투입한 후, 학습자들이 보이는 반응에 따라 지도 방안을 수정하여 다른 학습자를 통해 다시 보완된 지도 방안을 투입하는 형식으로 진행하였다.

Ⅳ. 자료의 분석

1. 문장제를 구성하는 수학적 요소에 따른 문장제의 수학적 구조 유형화

본 연구에서는 문장제를 구성하는 수학적 구성요소에 집중하여 문장제를 유형화하였다. 이에 의하여 먼저, 문장제를 구성하는 수학적 구성요소를 정의하여야 되는데 앞서 언급했듯이 Polya(1957)가 제시한 미지인 것, 자료, 조건, 보조요소를 문장제를 구성하는 수학적 구성요소로 활용하였다. 각 유형의 종류와 특징을 <표 1>과 같다.

<표 1> 문장제의 유형과 그 특징 분석

유 형	유형별 특징			
	미지인 것	자료	조건	보조요소
유형 1	1가지	1가지	1가지	불포함
유형 2	1가지	2가지 이상	1가지	불포함
유형 3	1가지	1가지	2가지 이상	불포함
유형 4	1가지	2가지 이상	2가지 이상	불포함
유형 5	1가지	1가지	1가지	포함
유형 6	1가지	2가지 이상	1가지	포함
유형 7	1가지	1가지	2가지 이상	포함
유형 8	1가지	2가지 이상	2가지 이상	포함
유형 9	미지인 것이 2가지 이상인 모든 문장제			

가. 유형1

유형1은 문장제에서 구하고자 하는 것, 즉 미지인 것은 하나이고 미지인 것을 구하기 위해 주어진 자료나 조건도 하나씩만 있으며 문장제를 해결하기 위해 문제를 푸는 문제해결자가 보조적으로 도입해야 할 요소가 없는 문장제를 의미한다. 그러므로 유형1은 문제를 해결하기 위한 하나의 자료를 하나의 조건에 대비시켜 미지인 것을 구하는 문장제이다.

유형1과 같은 문장제는 수학교과서나 수학익힘책에 많이 출제되지는 않고 있다. 3학년이나 6학년에서 비교적 출제량이 많고 대부분 규칙을 찾는 문제나 확률 문제가 이러한 모습을 띠고 있다. 이와 같은 문장제에 접한 문제해결자는 평소 많이 접해오던 문제가 아니기 때문에 처음에는 다소 생소함을 느낀다. 하지만 문제를 읽고 조건만 찾아내면 쉽게 문제를 해결하는 편이다.

<표 2> 유형1의 교과서 예시

예) 현주와 철수는 가위바위보로 술래를 정하려고 합니다. 가위바위보에서 한 사람이 낼 수 있는 경우의 수는 얼마입니까? <수학 6-나 p.95> - 미지인 것 : 한 사람이 낼 수 있는 경우 - 자료 : 가위바위보로 술래를 정함 - 조건 : 가위바위보 - 보조요소 : 없음

나. 유형2

초등학교 교과서에 가장 많이 제시되어 있는 문장제 유형이다. 유형2는 미지인 것은 하나이면서 자료가 여러 가지 제시되어 있다. 제시되는 자료는 2개일 수도 있고 그 이상이 될 수도 있다. 그리고 조건은 다수의 자료를 하나로 연결할 수 있는 단 하나의 단서라고 할 수 있다. 또한 이 유형은 문제를 위해 따로 도입해야 하는 문제해결의 실마리, 즉 보조요소는 사용되지 않는다. 그러므로 유형2는 문제 자체에 제시되어 있는 다수의 자료와 하나의 조건을 통해 미지인 것을 구하는 문장제이다.

문장제가 가장 많이 제시되어 있는 수와 연산 영역에서 대부분 많이 활용되고 있으며, 특히, 기초 연산의 알고리즘을 배우고 난 후 이를 확인하기 위해 크기 비교, 사칙연산이 사용되는 문장제 등에서 많이 출제되고 있다. 문제해결자는 초등학교 수학 교과과정을 거치면서 이 유형의 문제를 가장 많이 접하여 비교적 쉽게 이해하는 경향이 있다. 다만, 문장제에 제시되어 있는 조건이 문제의 난이도를 결정한다고 할 수 있어 문제해결자가 문장제에서 드러나는 조건을 찾아낸다면 문제는 쉽게 해결되지만 조건을 찾는데 어려움을 느낀다면 문제해결은 실패로 이어지기가 쉬웠다. 특히나, 문제 자체에서 사용되는 단어의 의미에 대한 이해가 중요한데 이러한 의미 파악이 제대로 이루어지지 못한 문제해결자는 다른 의미를 지니는 연산을 사용하거나 문제해결을 위해 필요하지 않은 자료를 연결함으로써 문제의 해결에 어려움을 겪는 경우가 종종 있었다.

<표 3> 유형2의 교과서 예시

예) 현수네 학교에서는 빈 병을 이틀 동안 모았습니다. 첫째 날에는 427개, 둘째 날에는 394개를 모았습니다. 현수네 학교에서 모은 빈 병은 모두 몇 개입니까? <수학 3-가 p.25> - 미지인 것 : 현수네 학교에서 모은 빈 병의 수 - 자료 : 첫째 날 427개, 둘째 날 39개 - 조건 : 모았다 - 보조요소 : 없음

다. 유형3

유형3은 초등학교 교과서에 거의 존재하지 않는 문장제이다. 미지인 것은 하나 밖에 없으며 이 미지인 것을 구하기 위해 주어진 자료는 하나이다. 하지만 자료와 미지인 것을 연결하는 조건은 여러 가지로, 문제를 해결하기 위해 문제해결자가 도입해야 할 보조 요소는 없다. 문제해결자는 이 문제를 해결하기 위해 하나의 자료를 다양한 조건에 대입시켜 미지인 것을 구해야 한다.

이와 같은 유형은 대부분 고학년에서 문제해결력을 향상시키기 위한 단원에서 주로 다루어지고 있다. 문제해결자에게 문제해결을 위한 고도의 지식을 요구하지는 않지만 주어진 조건들을 잘 살펴보고 그 의미를 살펴 정리해야 하는 과정이 요구되는 문제들이 대부분이다. 유형3과 같은 경우, 문제해결을 위해 문제해결자는 유형1과 마찬가지로 문장제에서 언급하고 있는 조건을 잘 찾아야 하는 과제가 주어지게 된다. 하지만 유형1과는 다르게 찾아낸 조건들 사이의 관계도 잘 파악해야 하는 부담이 주어져 문제해결자는 유형1보다는 어렵게 느끼는 경향이 있었다.

<표 4> 유형3의 교과서 예시

예) 탁구 선수 11명이 각자 다른 선수와 한 번씩 경기를 하려고 합니다. 경기는 모두 몇 번 해야 합니까? <수학익힘책 5-가 p.145> - 미지인 것 : 탁구 경기 수 - 자료 : 선수 11명 - 조건 : 각자 다른 선수와 경기, 한 번씩 경기 - 보조요소 : 없음

라. 유형4

유형4는 대체적으로 유형2가 확장된 형태로 제시되는 경우가 많다. 문장제를 해결하여 구하려는 미지인 것은 하나이지만 미지인 것을 구하기 위해서는 다수의 자료와 다수의 조건이 주어진다. 다만, 문제해결을 위해 문제해결자가 따로 도입할 보조요소는 없다. 그러므로 유형4는 많은 자료를 다양한 조건들을 통해 정리하여 미지인 것을 구하는 문장제이다.

이와 같은 유형은 유형2에 비해서는 적지만 수학교과서나 수학익힘책에서 출제량이 20.0%로 비교적 많이 관찰할 수 있는 문장제이다. 교과서에 제시되는 경우, 단순 계산 문제나 유형2와 같은 형태의 문장제들이 제시된 후에 난이도가 있는 문제로 제시되거나 실생활 문제나 심화 문제로 등장하는 경우가 많다. 따라서 저학년보다는 고학년에서 이와 같은 유형을 많이 관찰할 수 있으며 세 자리 수의 사칙연산이나 혼합계산 문제가 이 유형에 해당된다. 유형4의 경우는 유형2가 확장된 형태가 대부분인 만큼 문제해결자는 더 많은 수의 자료와 조건을 이해해야만 한다. 미지인 것을 찾기 위해 제시된 다양한 자료를 여러 개의 조건을 가지고 정리가 필요한 만큼 어떠한 자료가 어떠한 조건과 연결이 되고 미지인 것에 직접적으로 연결이 되는 자료와 조건을 찾아 해결의 실마리를 찾아야 하는 부담이 문제해결자에게 주어지게 된다. 하지만 유형1이나 유형3에 비하여 교과서에 많이 등장하기 때문에 문제해결자는 유형4와 같은 문장제에 크게 거부감을 느끼지는 않았으며 문제해결 과정에 자신감을 가지고 임하는 것으로 관찰되었다.

<표 5> 유형4의 교과서 예시

예) 영수네 반 34명은 5명씩 6팀으로 나누어 간이 농구를 하고, 나머지는 다른 반 학생 3명과 함께 구경하였습니다. 구경한 학생은 모두 몇 명인지 알아보시오. <수학 4-가 p.84> - 미지인 것 : 구경한 학생 수 - 자료 : 34명, 5명씩 6팀으로 농구, 나머지는 구경 - 조건 : 5명씩 6팀은 간이 농구, 간이 농구를 제외한 나머지 - 보조요소 : 없음

마. 유형5

유형5부터는 유형1~4와는 다르게 보조요소가 등장하게 된다. 유형5는 유형1과 같이 미지인 것을 구하기 위해 자료가 하나, 조건이 하나 제시된다. 하지만 문제해결자는 이 문장제를 바르게 이해하기 위해 보조요소를 도입해야만 한다.

초등학교 수학교과서의 경우에 문제를 해결하기 위해 도입되는 보조요소는 단위와 관련하여 1다스는 12자루, 1주일은 7일, 1시간은 60분, 1m는 100cm 등과 같은 단위 변환의 도입이

많으며 도형 문제의 경우는 보조선의 추가 등이 있을 수 있다. 보조요소의 경우는 처음에는 문제에 하나의 자료로 제시하여 주지만 학년이 올라가면 자연스럽게 학습자들이 도입할 수 있도록 교과서에 제시되어 있다. 따라서 보조요소가 도입되는 유형 5, 6, 7, 8과 같은 문제는 1~2학년보다는 3~6학년에서 주로 관찰할 수 있다. 이렇게 보조요소를 문제해결을 위해 도입해야 하는 경우, 문제해결자는 보조요소가 도입되지 않는 문장제를 이해하는 경우보다 더 혼동하거나 해결 자체를 어려워하는 경우가 많았다. 문제해결자는 때로 단위 관계를 몰라서, 어디에 무엇을 어떻게 이용해야 하는지 몰라서, 또는 단위와 같은 구성요소에 주목하지 않아 문제를 제대로 이해하지 못하여 문제해결에 실패하는 경우가 종종 있었다.

<표 6> 유형5의 교과서 예시

예) 하늘이가 가지고 있는 테이프의 길이를 재었더니 840cm였습니다. 이 테이프의 길이는 몇 m 몇 cm입니까? <수학익힘책 3-가 p.108> - 미지인 것 : 테이프의 길이 - 자료 : 840m - 조건 : 몇 m 몇 cm - 보조요소 : 1m = 100cm

바. 유형6

유형6은 유형2와 유사한 문장제로 이와 같은 문장제는 미지인 것이 하나, 미지인 것을 구하기 위해 제공되는 자료가 다수이며 미지인 것과 자료들을 연결하는 조건이 하나인 것으로 구성되어 있다. 또한, 문제를 해결하기 위해 문제해결자가 도입해야 할 보조요소가 포함되어 있는 문장제이다.

유형6과 같은 경우는 유형2와 비슷한 문장제가 많으나 문제해결자가 보조요소를 도입할 수 있어야 하므로 저학년보다는 고학년으로 갈수록 제시되는 횟수가 많았다. 유형6을 접하는 문제해결자는 유형2에 비하여 다소 문제이해에 어려움을 표시하였다. 이는 문장제에 제시되어 있는 자료와 조건을 표면 그대로 활용할 수 없고 활용을 위해 보조요소가 도입되어야 하기 때문으로 판단된다. 문제해결자는 때로는 문제에 대한 주의력이 부족하여 문장제에 제시되어 있는 자료에 표시되어 있는 단위에 주목하지 못하거나 어떠한 보조요소를 도입해야 하는지를 몰라서 문제해결에 실패하는 모습을 보였다.

<표 7> 유형6의 교과서 예시

예) 은철이네 집에는 가로가 2m이고 세로가 130cm인 돗자리가 있습니다. 이 돗자리의 넓이는 몇 ㎡입니까? <수학익힘책 5-가 p.99> - 미지인 것 : 돗자리의 넓이 - 자료 : 가로 2m, 세로 130cm - 조건 : 직사각형의 넓이 = 가로 × 세로 - 보조요소 : 1m = 100cm

사. 유형7

유형7은 문제해결자가 문장제를 이해하고 해결해야 하는 미지인 것은 하나이며, 미지인

것을 구하기 위해 주어진 자료는 한 가지, 조건은 다수인 문장제이다. 또한, 문제이해 및 해결을 위해 문제해결자는 보조요소를 도입하여야 한다.

그러나 초등학교 수학교과서 및 수학익힘책 24권을 살펴보았을 때, 유형7과 같은 유형의 문장제를 찾아볼 수 없었다. 문제해결자에게 문장제가 주어졌을 때, 문제해결자가 가장 많은 혼란을 겪었던 문제가 이 유형의 문제였다. 생소한 유형의 문제라는 어려움과 함께, 다양한 조건을 다루어야 하고 보조요소까지 도입을 해야 하기 때문에 문제해결자가 문제를 해결하는데 상당한 시간을 필요로 하였다.

아. 유형8

유형8은 유형4와 같이 미지인 것은 하나이면서, 미지인 것을 해결하기 위해 주어진 다수의 자료와 다수의 조건을 포함하고 있다. 그리고 하나 더 해서 문제를 이해하기 위해, 또는 문제를 해결하기 위한 실마리를 위해 보조요소가 도입될 필요가 있는 문장제이다. 또한, 유형8은 대부분이 유형6의 확장 형태라고도 생각할 수 있다. 유형6과 비교하여 유형8의 경우는 다양한 자료를 미지인 것과 연결하기 위하여 다양한 조건을 지니고 있는 있다.

주로 수와 연산 영역과 문자와 식 영역에서 출제되었으며 보조요소의 활용이 필요하기 때문에 저학년보다는 고학년으로 갈수록 그 출제 빈도가 높아졌다. 유형8과 같은 문장제를 해결할 때, 문제해결자는 미지인 것을 구하기 위해, 유형6보다 문장제를 읽고 다양한 자료와 조건을 미지인 것과 관련하여 정렬하여야 하는 어려움을 지니게 되며, 유형4에는 필요치 않는 보조요소를 도입해야 하는 부담까지 있어 문제를 해결하는데 더 많은 시간을 필요로 하였다.

<표 8> 유형8의 교과서 예시

예) 강아지 3마리와 닭 1마리가 놀고 있습니다. 다리는 모두 몇 개입니까? <수학 2-나 p.116> - 미지인 것 : 다리 수 - 자료 : 강아지 3마리, 닭 1마리 - 조건 : 강아지의 다리 수, 닭의 다리 수, 모두 - 보조요소 : 강아지 한 마리의 다리 수 4개, 닭 한 마리의 다리 수 2개

자. 유형9

유형9는 미지인 것이 두 가지 이상인 경우로 자료와 조건의 수나 보조요소의 유무는 상관하지 않았다. 초등학교 수학의 경우는 미지인 것이 두 가지 이상인 경우는 그리 많지 않다. 그래서 자료, 조건, 보조요소와는 상관없이 미지인 것이 두 가지 이상인 경우를 유형9로 정의하였다. 유형9는 초등학교 수준의 연립방정식 문제로, 여러 번의 순차적인 질문으로 문장제를 제시한 경우는 이 경우에 해당하지 않는다.

유형9의 경우는 미지인 것이 두 가지이기 때문에 자료나 조건이 미지인 것을 연결하는 상태로 제시되는 경우가 많다. 의외로 저학년에서 수 가르기와 같은 수와 연산 영역에서 많이 출제되었으며 그 이후에는 고학년에서 주로 출제됨을 확인할 수 있었다. 이와 같은 문제를 해결할 때, 문제해결자는 미지인 것이 무엇인지를 찾아내는 것부터 혼란을 겪는 듯 보였으며, 논리적인 문제해결보다는 직감적으로 문제를 하려는 경향을 보였다.

<표 9> 유형9의 교과서 예시

예) 어느 직사각형의 둘레가 40cm이고, 가로는 세로의 3배입니다. 이 직사각형의 가로와 세로는 얼마입니까? <수학 6-나 p.137> - 미지인 것 : 가로와 세로 길이 - 자료 : 직사각형의 둘레 40cm - 조건 : 둘레 = (가로 + 세로) × 2, 가로 = 세로 × 3 - 보조요소 : 없음

2. 수학학습 성취도가 높은 학습자의 주어진 문장제에 대한 수학적 구조 파악의 특징 분석

가. 문장제 속에 들어있는 중요한 자료와 조건에 주목한다.

대부분의 학습자들은 문장제를 읽은 후, 문장제에서 제시하는 자료와 조건을 찾아낸다. 미지인 것, 자료, 조건, 보조요소라는 용어와 의미를 알고 찾아낸 것은 아니지만 문장제에 드러나는 중요 실마리를 통해 문제를 이해한다. 이 과정에서 문장의 문맥을 통해 문제를 이해하는 경우도 있지만 대부분의 경우 단어에 주목하는 경우가 많다. 특히, 문제해결 수준이 높은 학습자들은 문제를 이해하기 위해 좀 더 결정적인 단어에 주목한다.

> 윤호는 저금통장에 5398원이 있습니다. 오늘 2360원을 저금하였습니다. 지금 윤호의 통장에는 모두 얼마가 있습니까? (유형2)

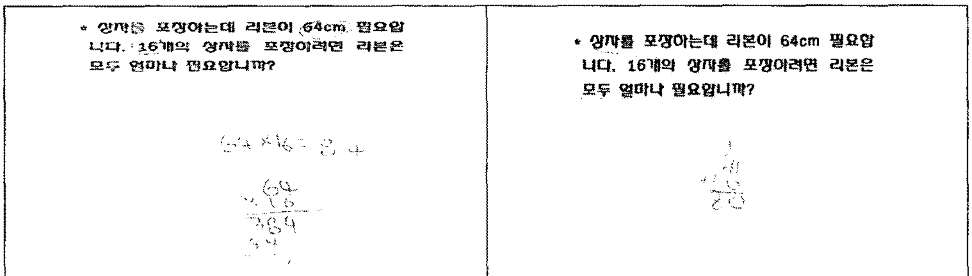
위와 같은 문장제에서 많은 학습자들은 문제를 해결하기 위해 '모두'라는 단어에만 주목한다. 조건으로써 '모두'라는 단어는 중요한 의미를 지니고 있지만 이것이 조건의 전부는 아니다. 문제해결 수준이 높은 학습자들은 '모두'라는 단어뿐만 아니라 '저금'이라는 단어에도 자료와 미지인 것을 연결하는 조건이 숨어 있다는 것에 주목한다. '모두'라는 단어를 통해 학습자들은 이 문장제가 '더해짐'이라는 조건을 가지고 있음을 알 수 있다. 하지만 그 의미 속에는 그것이 단순히 한 번만 더하는 것인지, 여러 번 반복해서 더하는 것인지에 대한 정보는 찾기 어렵다. '저금'이라는 단어는 학습자들에게 이것이 한 번만 더하는 것이라는 것을 알아차릴 수 있게 해준다. 이처럼 문제해결 수준이 높은 학습자들은 문제해결을 위해 좀 더 결정적인 단어에 주목한다. 이 단어는 자료가 될 수도 있으며, 조건이 될 수도 있다. 또한, 그것은 문제해결을 위해 학습자가 도입해야 할 보조요소를 위한 실마리일 수도 있다.

나. 문제의 자료와 조건을 머리에 그림을 그리듯이 이해한다.

모든 유형의 문제에서 다소 차이는 있지만 수학학습 성취도가 높은 학습자는 문장제가 주어졌을 때, 머릿속으로 재현해 낸다. 문제이해가 빠른 학습자일수록 문장제를 읽고 재현해 내는 데까지 이르는 속도나 재현 속도가 빠르며 이는 때로는 그림을 그리는 것처럼 나타날 수도 있고 때로는 영화를 보듯이 나타내는 경우도 있다. 학습자는 이러한 활동을 통해 문장제에 제시되어 있는 자료와 조건을 잘 이해할 수 있으며 이를 바탕으로 문제해결의 실마리를 찾아낸다.

아래의 두 학습자의 면담 내용을 살펴보면 두 명의 학습자가 다 '모두'라고 하는 같은 단어에 주목하고 있음을 알 수 있다. 그러나 두 학습자가 이끌어 내고 있는 조건은 사뭇 다른 양상을 보인다. 학습자 A의 경우는 문장제에 제시되어 있는 자료와 조건을 머릿속으로 잘 재현하고 있기 때문에 '모두'라고 하는 단어에 주목하고 있음에도 문제해결을 위한 조건을 잘 찾아냈지만 학습자B의 경우는 '모두'라는 단어에만 집중하여 엉뚱하게 조건을 이끌어 내고 있는 것이다.

이와 같이 문제해결 수준이 높은 학습자들은 문장제에서 제시하고 있는 자료와 조건을 직접 재현해 냄으로써 문제를 이해하는 것이 훨씬 더 빠르고 정확하게 문제를 해결할 실마리를 찾아냄을 알 수 있었다.



[학습자 A] [학습자 B]

[그림 1] 학습자 A와 학습자 B의 학습지

<표 10> 학습자 A와의 면담 내용

S_A : 이거는요. '모두' 구하라고 했으니까요, 64cm를요, 16개 상자를 만들려고 하니까, 64×16을 하면 나오는데….
T : 왜 64×16을 하나요?
S_A : 64cm가 필요하면요 16개의 상자를 포장한다고 했잖아요. 64cm+64cm+64cm+.. 이렇게 해야 하잖아요. 16개를 만드니까.
T : 아.. 한 개를 포장할 때 64cm가 필요하니까 16개를 만들려면?
S_A : 네.

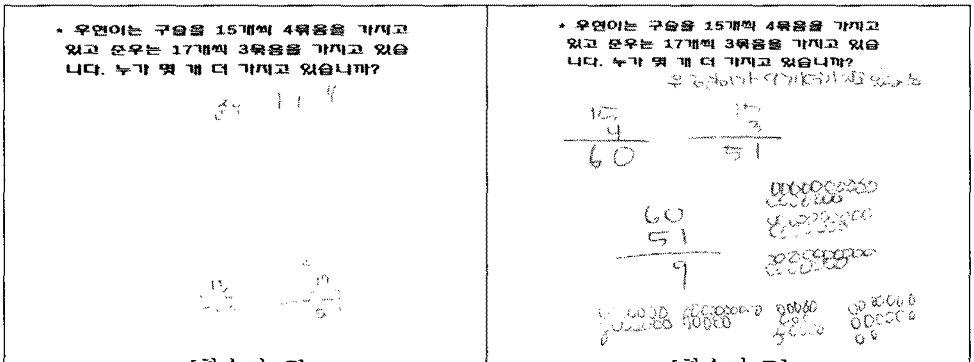
<표 11> 학습자 B와의 면담 내용

S_B : 응? 뭐지? 이 문제는 어떻게 푸는지 모르겠어요.
T : 문제를 잘 읽어 보세요.
S_B : 아, 64-16?
T : 왜 빼야 한다고 생각했어요?
S_B : 아! 80이예요.
T : 설명해 볼 수 있어요?
S_B : (64와 16을 가리키며) 이거랑 이거 더했어요. '모두'라고 했으니까요.
T : 상자를 포장하는데 64cm가 필요한데 똑같은 상자를 16개 포장했어요. 어떻게 해야 할까요?
S_B : 잘 모르겠어요.

다. 문장제에서 미지인 것을 잘 숙지한다.

문장제 문제는 문제 상황을 설명하는 여러 문장들의 결합으로 이루어진 문제이다. 이러한 문장제를 읽고 학습자들은 문장제에서 주어진 자료와 조건, 보조요소를 어떻게 도입해야 하는지의 여부 등을 알아내야 한다. 주어진 자료와 조건이 무엇인지, 보조요소를 도입해야 하는지의 여부 등을 알고 있다고 하더라도 문제에서 구하고자 하는 것, 즉 미지인 것을 모른다면 문제를 해결할 수 없다. 이 측면에서 문제해결 수준이 높은 학습자들은 문제를 읽고 미지인 것이 무엇인지를 잘 찾아낸다. 미지인 것이 무엇인지를 알아냄으로써 문제를 읽고 알게 되었던 여러 정보를 잘 정리하고 이는 자연스럽게 문제이해와 연결되어 문제해결까지 이어지는 것이다.

다음에 제시된 학습자C는 문제에서 주어진 자료와 조건 등을 잘 숙지하고 있다. 하지만 결정적으로 미지인 것이 무엇인지에 관해서는 관심을 두지 않음으로써 문제를 완벽하게 이해하지 못하였으며 이것은 학습자가 문제해결에 이르는 과정을 방해하였음을 알 수 있다. 학습자C는 비록 문제해결 과정에서 계산에 실수를 범하였지만 평소 문제해결 능력이 비교적 높은 학습자이다. 하지만 문제이해적 측면에 중점을 두고 살펴봤을 때, 학습자C는 문제를 제대로 읽지 않고 성급하게 해결하려고 함으로써 평소 잦은 실수를 범하기도 하는데 이번 활동을 통해 그 원인을 파악할 수 있었다. 반면에, 학습자D는 미지인 것이 무엇인지 잘 숙지함으로써 문제이해 및 문제해결 과정이 자연스럽게 연결되고 있음을 발견할 수 있다.



[학습자 C] [학습자 D]

[그림 2] 학습자 C와 학습자 D의 학습지

<표 12> 학습자 C와의 면담 내용

Sc : 15개씩 4묶음이니까 곱했어요. 또, 17개씩 3묶음이니까 곱했어요.
T : 그리고서 어떻게 했어요?
Sc : 51이 더 크니까 40을 뺐어요.
T : 왜 그렇게 했어요?
Sc : (한참을 생각한 후에) 아, 알겠다. 누가 몇 개 더 가져갔냐고 했으니까요.
T : 처음 문제를 풀 때, 앞에서부터 차례로 했어요? 아니면 아래 부분에 중점을 두고 풀었어요?
Sc : 앞에서부터요.
T : 그럼 문제에서 물어보는 건 알았어요?
Sc : (멋쩍어하며) 아니오.

<표 13> 학습자 D와의 면담 내용

T : 이 문제에서 꼭 알아야 하는 부분은 어떤 거예요?
S_D : 누가 몇 개를 더 가지고 있냐고 물어보는 문제니까 15개씩 4묶음이랑 17개씩 3 묶음이요.
T : 그럼 이 자료를 어떻게 연결했어요?
S_D : 이 두 개를 곱한 다음에 빼요.
T : 왜 그렇게 해야 할까?
S_D : 몇 개씩 몇 묶음이니까 곱해야 해요. 그리고 누가 더 많이 가지고 있냐고 물어봤으니까 빼야 해요.

라. 예전에 풀었던 문장제를 통해 문장제를 이해한다.

면담에 참여했던 대부분의 학습자는 유형2에 속하는 문장제에 대해서 상당히 자신감 있는 모습을 보였다. 학습자가 문제를 이해하고 반응하는 시간은 매우 빨랐으며, 그 정확도 역시 상당히 높았다. 그러나 학습자들이 평소 많이 접하지 못했던 유형1, 3, 5, 7에 대해서 대부분의 학습자들은 어려움을 호소했다. 학급에서 문제해결 수준이 어느 정도 높은 수준에 있는 학습자들이라도 평소 많이 접하지 못했던 문제를 접하게 되면 잠시 망설이고 자신감 없어 하며 문제를 해결하는 시간이 다소 걸리는 것을 알 수 있었다.

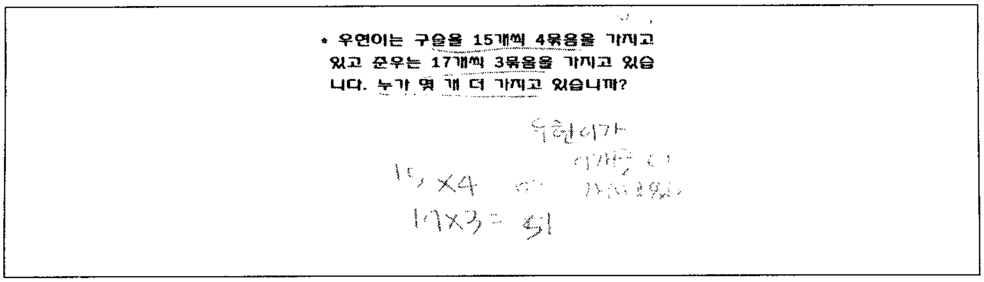
이것은 Polya(1957)의 『전에 이것을 본 일이 있는가?, 관련된 문제를 알고 있는가?』라는 발문을 통해 그 이유를 알 수 있다. 문제해결 수준이 높은 학습자들은 예전에 풀었던 문장제를 기억하고 그 문장제와 비슷한 문제의 경우, 예전의 경험을 빗대어 문제를 해결하기 때문에 예전부터 많이 풀어왔던 유형2와 같은 문장제는 상당히 빠른 시간 안에 비교적 정확하게 이해하는 반면, 평소 많이 접해보지 못했던 유형의 문장제에는 약간의 어려움을 느끼게 되는 것이다.

3. 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 지도 방안 구안

가. 문장제의 수학적 구성요소 찾기

문장제를 구성하고 수학적 구성요소는 문제를 이해하고 해결하기 위해서 반드시 알아야 하는 요소이다. Polya는 미지인 것, 자료, 조건을 문제의 핵심이고 주요 부분이라고 말하였으며, 학생은 미지인 것과 자료, 조건을 찾을 수 있어야 한다고 하였다. 그러므로 학습자가 반드시 그 수학적 구성요소의 용어를 알고 그 요소에 따라 내용을 숙지할 필요는 없으나 문장제를 해결하기 위해 스스로 찾아야 하는 요소들이 있다는 것을 알고 그것들이 무엇인지 찾아내는 활동은 중요하다고 볼 수 있다.

문장제를 읽고 문제를 해결하기 위해 꼭 필요한 것에 밑줄을 긋거나 동그라미를 그리는 등 중요 단어에 표시를 하는 것으로 수학적 구성요소를 찾을 수 있다. 학습자가 문제를 해결하기 위해 중요한 부분을 찾기 위해 여러 번 내용을 읽고 생각하는 과정에서 문제이해와 해결을 위해 없어서는 안 되는 부분을 찾아 그것들을 연결 짓게 된다. 그 속에서 학습자는 문장제를 이해할 수 있으며 문제해결의 실마리를 찾아나갈 수 있다. 또한, 문장제에서 수학적 구성요소만을 추출해 냄으로써 문제해결에 혼동을 줄 수 있는 부수적 내용을 삭제할 수 있으며 이를 통해 학습자는 문제해결에 직접적으로 영향을 주지 않는 것들로 인한 혼란을 줄일 수 있다.



[그림 3] 학습자 E의 학습지

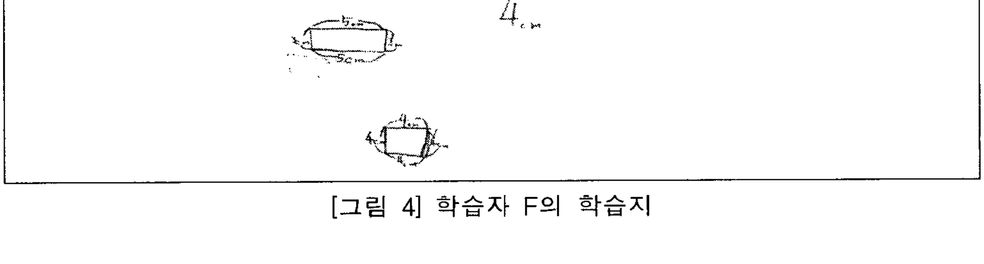
<표 14> 학습자 E와의 면담 내용

T :	문제를 읽고 문제를 풀기 위해서 꼭 필요한 부분이 밑줄을 한 번 그어 보세요.
S_E :	(문제를 읽고 밑줄을 긋는다.)
T :	이 세 가지만 있으면 문제를 풀 수 있나요?
S_E :	네. 구슬을 누가 더 많은지 알아야 해요. 우현이랑 준우의 구슬이 몇 개인지 필요해요.

나. 문장제에 제시되어 있는 자료와 조건을 그림으로 나타내기

대부분의 문장제는 문제 상황을 문장으로 표현하고 있다. 또한 문장제에서 제시하고 있는 문장은 문제해결을 위한 실마리, 즉 수학적 구성요소를 포함하고 있다. 문장이라는 것이 물론 의사소통의 수단이기는 하지만 글로 표현되어 있는 것이기에 이해에 있어 더 많은 시간이 걸리기도 하고 혼동을 주기도 한다. 특히, 수학학습 성취도가 낮은 학습자의 경우는 문장제에 제시되어 있는 문장이 이해가 되지 않아 문제를 해결하지 못하는 경우도 많다. 또한, 앞서 이루어졌던 면담을 통해 문제해결 수준이 높은 학습자는 그들 스스로 문장제를 읽고 그것을 그림이나 영상으로 생각하여 보고 이를 통해 자료와 조건 등 수학적 구성요소를 찾아내는 것을 볼 수 있었다.

그러므로 문장제를 잘 이해하기 위해 학습자가 문장제에 제시되어 있는 자료와 조건을 그림으로 나타내도록 하였다. 그림으로 나타내기 전 학습자는 잘못된 조건에 집중하기도 하고 조건을 제대로 해석하지 못하여 문제의 실마리를 찾아내는데 어려움을 겪었으며 다양한 자료를 어디에 어떻게 적용해야할 지에 대해 곤란해 하고는 했다. 하지만 문장제를 읽고 그림을 통해 문제 상황을 나타냄으로써 학습자는 문장제에 제시되어 있는 미묘한 조건의 차이를 알 수 있었으며, 제시되어 있는 자료가 구체적으로 무엇을 나타내는지도 알 수 있었다.



[그림 4] 학습자 F의 학습지

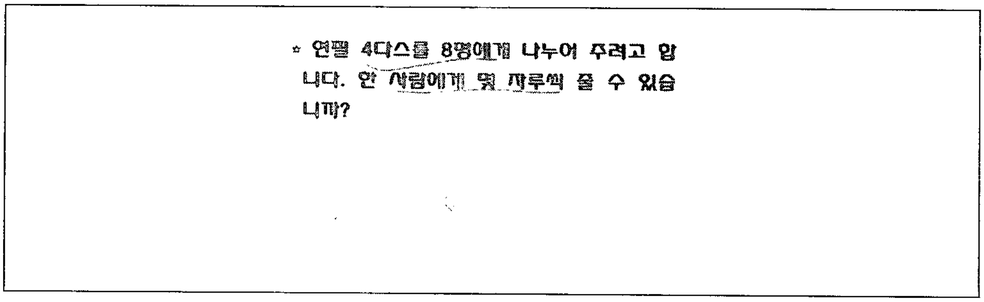
<표 15> 학습자 F와의 면담 내용

T : 문제에서 구하려는 건 뭔가요?
S_F : 직사각형과 둘레가 같은 정사각형의 한 변의 길이요.
T : 그럼 문제를 풀기 위해 주어진 자료는 뭐예요?
S_F : 5cm, 3cm요.
T : 그럼 문제를 어떻게 해결할 수 있을까요?
S_F : 잘 모르겠어요.
T : 문제에서 말하고 있는 것을 그림으로 나타낼 수 있을까요?
S_F : (학습지에 직사각형을 그린다.)
T : 직사각형에 가로, 세로의 길이도 써 보면 어떨까요?
무엇을 알 수 있나요?
S_F : 직사각형의 둘레를 알 것 같아요.
T : 그럼 문제를 해결할 수 있나요?
S_F : (정사각형을 그리면서) 정사각형은 네 변의 길이가 같으니까 구할 수 있어요.

다. 문장제에 제시되어 있는 수학적 구성요소를 자신의 말로 표현하기

Polya(1957)는 How to Solve It의 문제에 대한 이해 부분에서 무엇보다 문제를 설명하는 언어적 진술이 이해되어야 한다고 진술하고 있다. 또한, 교사는 학생에게 문장을 반복해서 읽도록 요구하여, 학생이 문제를 유창하게 진술할 수 있도록 해야 한다고 말한다. 이는 학습자가 자신의 말로 문제를 표현함으로써 문장제에서 제시하고 있는 수학적 구성요소를 이해하고 그것을 문제를 해결하기 위한 적재적소에 배치할 수 있기 때문이라 생각한다.

문장제에 제시되어 있는 문장과 그 문장 속에 포함되어 있는 수학적 구성요소는 출제자의 의도에 따라 배열되어 있는 것이다. 어떤 학습자는 그 배치를 가지고 바로 문제를 이해할 수 있지만 그렇지 않은 학습자들도 많다. 이런 학습자는 문제를 여러 번 읽고 문제에서 하려고 하는 말, 즉 문제에서 제시하고 있는 수학적 구성요소를 자신의 것으로 만드는 작업이 필요하다. 그러한 작업의 하나로 자신이 이해한 것을 학습자 자신의 말로 말하려고 노력한다면 그러한 과정을 통해 자신이 미처 깨닫지 못했던 미지인 것, 자료, 조건, 보조요소를 파악할 수 있을 뿐더러 그것들이 어느 곳에서 어떻게 활용되어야 하는지도 인지할 수 있다.


* 연필 4다스를 8명에게 나누어 주려고 합니다. 한 사람에게 몇 자루씩 줄 수 있습니까?

[그림 5] 학습자 G의 학습지

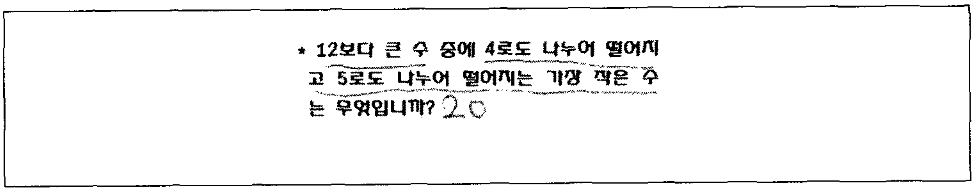
<표 16> 학습자 G와의 면담 내용

T : 문제를 읽고 네가 이해한 대로 말해볼까요?
S_G : 연필 4다스를 8명에게 주려면 한 사람에게 몇 자루씩 줘야 할까요?
T : 그러면 문제를 어떻게 풀어야 할까요?
S_G : 4에서 8을 못 나눠요. 아.. 4에 12를 곱해야 해요.
T : 왜 12를 곱해야 하나요?
S_G : 다스는 12자루니까 곱해야 해요.
T : 그렇다면 만약에 문제에서 4다스가 아니라 4자루라고 했다면 12를 곱해야 할까요?
S_G : 아니요. '자루'니까 곱할 필요가 없어요.

라. 문장제의 구성요소 사이의 관계 파악하기

문장제의 구성요소를 알고 구성요소들 사이의 관계를 파악하는 것은 다소 어려울 수 있으나 그 과정에서 학습자들은 다양한 생각을 하고 생각을 발전시킬 수 있다. Polya(1957)는 문제를 보다 잘 이해하기 위하여 문제의 주요 부분인 미지인 것, 자료, 조건을 샅샅이 조사하여 하나하나씩 차례차례 생각해 보고, 여러 가지로 조합하여 생각해 보기도 하고, 각 부분을 서로 관련시켜 보기도 하며, 개개의 것을 문제 전체와 관련시켜 보기도 하라고 권고하고 있다.

미지인 것, 자료, 조건, 보조요소 사이의 관계를 통해 어떤 것들이 서로 연결이 되어 있으며 그 연결이 무엇을 통해 이루어졌는지, 또 구성요소들이 부족하거나 과잉이 되었을 때, 다른 내용으로 바뀌었을 때 문제해결 과정이 어떻게 달라지는지를 알게 되면서 학습자들은 좀 더 발전된 생각을 가질 수 있게 된다. 이러한 과정을 거치면서 학습자는 그동안의 학습해 왔던 내용을 다시 곱씹어 볼 수 있으며 이는 하나의 문장제를 해결하는데 그치지 않고 그와 비슷한 수학적 구성요소를 가진, 즉 같은 유형의 다른 문장제를 해결하는 것에도 이어질 수 있다. 또한, 이는 문제 제기적 측면에서 학습자의 사고 능력을 확장시켜줄 수도 있다.



[그림 6] 학습자 H의 학습지

<표 17> 학습자 H와의 면담 내용

T : 문제에서 구하려는 건 뭔가요?
S_H : 12보다 큰 수 중에서 4랑 5로 나누어 떨어지는 수요.
T : 그럼 문제에서 중요한 부분에 밑줄을 그어볼까요?
S_H : (학습지에 밑줄을 긋는다.)
T : 이렇게 세 부분으로 나눌 수 있어요?

S_H : 네.
T : 어떻게 20이 나왔나요?
S_H : 20이 4로도 나누어떨어지고 5로도 떨어져요.
T : 그럼 이 문제에서 "12보다 큰 수"라는 말이 없고 "20보다 큰 수"라는 말이 있다면 어떻게 될까요?
S_H : 문제를 풀 수 없을 거 같은데요.
T : 좀더 생각해 볼까요?
S_H : (곰곰히 생각한 후에) 40?
T : 문제가 20보다 큰 수라고 바뀌면 답이 40으로 바뀌나요?
S_H : 네.
T : 그럼 이번에는 "12보다 큰 수"라는 말이 아예 없다며 어떻게 될까요?
S_H : 음.. 답은 똑같을 거 같은데요. 4로도 나누어 떨어지고 5로도 나누어 떨어지는 수는 20이니까요.
T : 그럼 "12보다 큰 수"라는 말은 없어도 될까요?
S_H : 네. 그럴 거 같아요.
T : 그럼 "가장 작은 수"라는 말이 없다며 어떻게 될까요?
S_H : 음.. 20하고 다를 거 같아요. 40이나 이런 것도 될 거 같아요.
T : 그럼 답이 여러 개가 되는 건가요?
S_H : 네. 20도 되고 40도 되요.
T : 이렇게 문제에서 주어진 조건을 생각해 보니까 어때요?
S_H : 좀더 쉽게 느껴졌어요. 앞으로도 이렇게 생각해 보면 좋을 거 같아요.

Ⅴ. 결 론

성공적인 문제해결을 위해서는 문제의 올바른 해결 방법을 찾아 실행하는 것이 중요하다. 하지만 문제의 해결 방법을 찾아 실행하는 것에는 먼저 문제를 바르게 이해하는 것이 선행되어야 한다. 본 연구에서는 문제이해에 초점을 두고, 문장제를 구성하고 있는 수학적 요소의 이해 및 그 구조에 따른 문장제의 유형화를 바탕으로 하여 수학학습 성취도가 높은 학습자들의 문장제 구조 파악의 특징을 살펴보고 문장제의 이해를 돕는 지도 방안을 구안하고자 하였다.

본 연구의 결과는 다음과 같다.

첫째, 문장제는 문장제를 구성하고 있는 수학적 구성요소에 따라 총 9가지 유형으로 분류할 수 있다. 둘째, 수학학습 성취도가 높은 학습자는 문장제를 이해할 때, 문장제의 수학적 구성요소와 관련하여 문제를 읽으면서 문장제 속에 들어있는 중요한 자료와 조건에 주목하고 문제의 자료와 조건을 머리에 그림을 그리듯이 문장제를 이해하였다. 또한, 문장제에서 구하고자 하는 미지인 것을 잘 숙지하고 문제해결에 임하였으며 예전에 풀었던 문장제를 바탕으로 하여 문장제를 이해하는 특징을 보였다. 셋째, 수학학습 성취도가 높은 학습자가 문장제를 이해하는 특징을 바탕으로 하여 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 지도 방안을 도출해 내어 수정·보완하였다. 본 연구를 통해 강구한 지도 방안은 문장제의 수학적 구성요소 찾기, 문장제에 제시되어 있는 자료와 조건을 그림으로 나타내기, 문장제

에 제시되어 있는 수학적 구성요소를 자신의 말로 표현하기, 문장제의 구성요소 사이의 관계 파악하기이다.

이상의 연구 결과에 따른 결론은 아래와 같다.

첫째, 지금까지 보여 왔던 문장제의 유형들이 유형 분류를 위하여 문장제를 이루고 있는 언어 요소와 연산 요소 등에 중점을 두었던 반면에, 문장제가 포함하고 있는 수학적 구성요소, 즉 문제해결을 위해 학습자에게 주어지는 다양한 변인들이 이루고 있는 수학적 구조에 초점을 두어 문장제를 유형화할 수 있었으며, 문장제의 유형에 따라 학습자가 보이는 반응에 차이가 있음을 알 수 있었다. 학습자는 수학적 구성요소를 많이 포함하고 복잡한 구조를 가지고 있는 유형의 경우, 문장제를 이해하기 위하여 그렇지 않은 유형에 비해 시간을 더 많이 사용하였으며, 문제를 해결하기 위해 필요한 미지인 것, 자료, 조건, 보조요소를 다 찾았다 해도 이들 사이를 연결하는데 시간을 더 소요한다거나 연결 과정에서 더 많은 실수를 범하였다. 또한, 많이 접해본 문장제 유형은 학습자가 자신감 있게 문제를 이해한 내용을 설명하고 해결 과정에 도달하는 반면, 그렇지 못한 문장제 유형은 자신이 이해한 내용에 대해 의심을 가지거나 질문을 함으로써 문제를 이해하는데 어려움을 느끼는 것을 발견할 수 있었다.

둘째, 수학학습 성취도가 높은 학습자는 문제의 해결을 위해 문장제에서 주어진 수학적 구성요소를 이해하고자 다양한 전략을 사용하고 있었으며 이러한 전략들은 학습자가 성공적인 문제해결에 이를 수 있도록 하였다. 그들은 수학적 구성요소의 종류나 용어나 의미를 구체적으로 이해하고 그 용어를 사용하는 것은 아니지만, 문제를 이해하는 과정에서 문제를 해결하기 위해 반드시 필요한 변인이 있다는 것을 염두에 두고 이를 찾아내기 위해 직관적으로 주어진 문제 상황에 따라 적절한 전략을 사용하여 문제해결의 실마리를 찾아내는 능력이 우수하였다. 또한, 문장제의 이해에 있어서도 좀 더 핵심적인 수학적 구성요소에 집중함으로써 문제해결에 유리하게 작용하였다.

셋째, 수학학습 성취도가 높은 학습자들이 가지는 문장제 이해의 특성을 바탕으로 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 지도 방안을 구안할 수 있었으며 이러한 활동들은 학습자의 문장제 이해에 도움이 되었다. 본 연구에서 제시한 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 지도 방안은 학습자들이 문장제를 읽고 이해하는 과정에서 문장제 속에 포함되어 있는 문제해결에 결정적인 영향을 미치는 수학적 구성요소를 찾고 인지할 수 있도록 하며, 문장제 안에서 수학적 구성요소들이 서로 이루는 관계를 파악할 수 있도록 돕는 활동들로 구성되어 있다.

얻어진 결론을 토대로 학습자의 문제이해를 돕기 위한 문장제의 수학적 구조 파악을 강조하는 지도 방법에 대한 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 고학년에서는 여러 단원을 통하여 다양한 문장제를 두루 접할 수 있으며 문장제에 수학적 구성요소가 여러 가지 포함되고 그 구조가 복잡하게 이루어진 문장제가 고학년에 많이 제시되어 있다. 또한, 학습자가 자신의 생각을 좀 더 조리 있게 말할 수 있다는 것을 감안하였을 때, 초등학교 고학년을 대상으로 연구가 좀 더 이루어진다면 좋을 것이다.

둘째, 본 연구에서 제시하고 있는 지도 방안을 실제 수업에 적용하기에 앞서 장기적으로 적용하여 보고 그 효과를 검증해 볼 필요가 있겠다.

셋째, 문장제의 수학적 구조 파악을 통한 더 많은 연구를 통해 문장제 이해에 대한 다양한 유형의 활동이 만들어지기를 바라며 더 나아가 학년별, 수준별로 효과적인 지도 유형의 정리가 이루어진다면 좋을 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (1997). **초등학교 교육과정 해설(IV).** 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부 (2008). **수학 및 수학익힘책 1~6학년 가, 나단계.** 서울: (주)두산.

강화나 (2008). **문장제의 문장구조에 따른 문제해결자의 반응.** 서울교육대학교 석사학위논문.

김진숙 (1997). **초등학교 수학교과서 문장제 문제해결 관점에서의 연구.** 이화여자대학교 박사학위논문.

박경애 (2007). **소집단 협동학습이 문장제 문제해결력에 미치는 효과.** 서울교육대학교 석사학위논문.

이의원 (1995). 초등학교 아동의 수학과 문제해결과정의 정보처리적 관점. **대한수학교육학회 논문집,** 5(1), 39~53.

전은미 (2002). **아동의 수학 문장제 이해 방법과 문제 해결 능력 사이의 관계 연구.** 서울교육대학교 석사학위논문.

조영신 (2000). **문장제의 도식화 및 번안지도를 통한 문제 해결 능력 신장 방안.** 부산교육대학교 석사학위논문.

최수연 (1991). **문제구조에 대한 학습자의 인지과정연구.** 이화여자대학교 석사학위논문.

현주 (1990). **아동의 순수 문장제 해결 능력 발달에 관한 연구.** 이화여자대학교 박사학위논문.

Duncker, K. (1945). On problem solving. *Psychological Monographs, 58,* 1~110.

Goldin, Gerald A. and C. Edwin McClintock (1984). *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* Philadephia: The Franklin Institute Press.

Greeno, J. G. (1978). Nature of problem solving abilities. In W. K. Ester(Ed), *Handbook of Learning and Cognitive and Cognitive Processes, Vol.5,* Hilsdale, NJ: Erbaum.

Hambree, R. & Marsh, H. (1993). Problem solving in early childhood: building foundations. *In Research Ideas for the Classroom: Early Childhood Mathematics,* Ed. by R. J. Jensen. New York: Macmillan Publishing Co.9 NCTM Research Project).

Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1989). The role of understanding in solving word problems on second graders' eye movements. *Journal of Educational Psychology, 20,* 405~438.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action: Recommendation for School Mathematics of the 1980s.* Reston, VA: The National Council of Teacher of Mathematics, Inc..

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* 류희찬 외 역 (2007), 학교수학을 위한 원리와 규준. 경문사.

Polya, G. (1957). *How to solve it.* 우정호 역 (2002), 어떻게 문제를 풀 것인가. 교우사.

Riely, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. *In The Development of Mathematical Thinking,* ed. by H. Ginsberg, NY: Academic Press, 153~196.

<Abstract>

Teaching the Comprehension of Word Problems through Their Mathematical Structure in Elementary School Mathematics

Ra, Woo Seong[4]; & Paik, Suckyoon[5]

The purpose of this study was to examine the mathematical components of word problems and the structure of the components, to examine the characteristics of the understanding of mathematics high achievers about word problems, and ultimately to devise a teaching method geared toward facilitating learner understanding of the word problems.

Given the findings of the study, the following conclusion was reached:
First, word problems could be categorized according to their mathematical components, namely the mathematical structure of multiple variables provided to learners for their problem solving. And learner's reaction might hinge on the type of word problems.
Second, the mathematics high achievers relied on diverse strategies to understand the mathematical components of word problems to solve the problems. The use of diverse strategies made it possible for them to succeed in problem solving.
Third, identifying the characteristics of the understanding of the mathematics high achievers about word problems made it possible to lay out successful lesson plans that stressed understanding of the mathematical structure of word problems. And the teaching plans enabled the learners to get a better understanding of the given word problems.

Keywords : elementary mathematics, understanding the problem, word problem, mathematical structure

논문접수: 2009. 6. 10
논문심사: 2009. 10. 14
게재확정: 2009. 11. 6

4) rws81@hanmail.net
5) sypaik@snue.ac.kr