한국초등수학교육학회지 13(2) 211-229.　　Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 13(2) 211-229.

초등학교 6학년 학생들의 교과서 비례 문제 해결과 비례 추론에 관한 연구

권미숙[1) ·](1) 김남균[2)](2)

본 연구에서는 7차 교육과정에서 6학년 때 도입되는 교과서의 비례 문제들이 학생들의 비례 추론 능력과 어떠한 관련이 있는지를 알아보기 위해 교과서의 비례 문제 해결 실태를 파악하고, 수준별 비례 추론 능력을 하위영역으로 나누어 교과서 비례 문제 해결 능력에 따라 하위영역별로 비례추론 능력이 어떠한지 분석하였다. 연구결과 교과서의 비례 문제에서 정답률이 높은 문제들은 설명에서 비례식을 이용해서 풀 수 있도록 제시되어 있었으며, 비례식을 세웠을 때 두 비 사이의 관계가 정수비로 계산이 간단하였다. 비례 추론 하위 영역 중 비감각 영역의 문제 해결을 잘하였고, 양과 변화 영역에 대한 부분의 능력은 가장 뒤떨어졌다. 교과서의 비례 문제 해결 능력과 비례 추론의 관계에 대해서는 교과서의 비례 문제 해결이 우수한 학생일수록 비례 추론 능력이 우수였다. 교과서 비례문제의 해결 결과가 비례추론 능력을 예언할 수 있다고 볼 수 있다. 교과서 비례문제 수준에 따라서 비례 추론 문제 해결의 수준차를 알아본 결과, 차이가 많이 나지 않는 문제는 꼭 비와 비율 관련 단원이 아니라도 수학 교과서에서 다양하게 접할 수 있는 문제였고, 수준별 차이가 많이 나는 문제는 그동안 교과서에서 쉽게 접해보지 못한 유형으로 단순히 비례식을 이용해서는 해결할 수 없는 문제들이었다. 따라서, 비례추론 하위영역별로 모든 영역에 대하여 능력을 향상시키기 위해서는 교과서에 비례식 외에 다양한 상황과 내용의 비례문제를 포함하여 지도하여야 할 것이다.

[주제어] 비례문제해결, 수학교과서 비례문제, 비례추론

Ⅰ. 서 론

우리의 일상생활에서는 비와 비율, 비례와 같은 수학적 상황이 자주 나타난다. 따라서 실생활에서 자주 접하는 비례적 상황을 이해하고 이를 추론해 내는 능력의 중요성은 더욱 강조된다고 할 수 있다. 비례 추론은 초등학교 산술의 결정이고 뒤따르는 모든 과정의 기본이며, 능숙한 비례 추론은 상위 수학 학습 성공의 필수적인 요인이다(Lesh, Post, & Behr, 1988). 또 NCTM(2000)에서는 비례 추론은 아무리 시간과 노력이 많이 소요되더라도 반드시 획득될 필요가 있다고 하였다.

그러나 이처럼 중요한 비례 추론이 실제 학생들이나 성인들도 비례 추론 과제를 잘 해결하지 못한다(Baroody & Coslick, 1998). 그 원인에 대한 연구를 종합해보면, 첫째, 비례 추론의 모호성과 관련 개념이 다양함을 들 수 있다. 비례적 상황을 추론하기 위해서는 비례적인

---

1) [제1저자] 경기도 희성초등학교
2) [교신저자] 청주교육대학교 수학교육과

상황과 그렇지 않은 상황을 구분하는 것 뿐 아니라, 비례적 상황의 구조적인 유사성을 인식해야 한다(English & Holford, 1995). 또한 비례 추론에 가장 기본이 되는 학습 대상인 비는 다른 수학적 대상들과는 상이한 특성을 내포하고 있다. 추상적 대상인 수나 도형이 학생들에게 어느 정도 직관적 이해를 제공함에 반하여 비는 추상적인 개념이다. 두 양 또는 두 수를 다루면서 그것을 하나의 대상으로 파악하는 것은 학생들에게 쉽지 않다(정은실, 2003).

둘째, 비례 추론을 단 하나의 의미로 명확하게 정의하는 것은 쉽지 않다. 대신에 시간에 지나면서 쌓여지고, 다양한 상황에서 상호 작용을 통해 이해되므로, 비례 추론을 가르치는 것은 어렵다. 때문에 비례 추론 능력이 길러지기 위해서는 장기간의 시간과 노력, 그리고 다양한 차원의 경험이 필요하다(Lamon, 1989, 1999).

셋째, 비례 추론 능력을 기르기 위한 방법을 정확하게 알지 못하기 때문이다. 많은 교육과정은 비례 추론의 개념에 대한 이해가 부족함에도 알고리즘($a:b=c:x$)에서 미지수를 구하기 위한 절차적 지식을 강조한다. 7차 교육과정에서는 비와 비율, 비의 값, 비례식, 연비 등의 여러 가지 개념들이 단순히 절차만을 강조한 알고리즘에 의해 단지 계산되는 방법만이 지도되고 있기 때문에 비례 추론에 대한 근본적인 이해가 부족하다. 비례식을 사용하여 문제를 해결하는 것은 비례 추론의 전부가 아니다. 때문에 비례 추론 능력을 기르기 위한 다양한 방법이 연구되어야 한다.

Streefland(정은실, 2003에서 재인용)는 우리나라 교과서에 나와 있는 것처럼 비를 지도하는 대부분의 프로그램이 현실과 관련 있는 것처럼 보이는 문제 하나를 제시한 후에는 순수하게 수에 의해 비를 연습하도록 하고 있다고 하면서 비에 대한 교육과정을 비판하고 있다. 또, 제 7차 교육과정에서 다루고 있는 비가 Thomson(1994)이 구분한 여러 수준의 비 가운데 특별한 고정된 두 양 사이에 존재하는 곱셈적 관계를 인지하는 비의 초보적 수준이라고 비판한다(정은실, 2003에서 재인용). 따라서 현재의 비와 비율 지도의 방법으로는 학생들에게 비례 추론 능력을 길러주기에 어려운 환경이라고 할 수 있다.

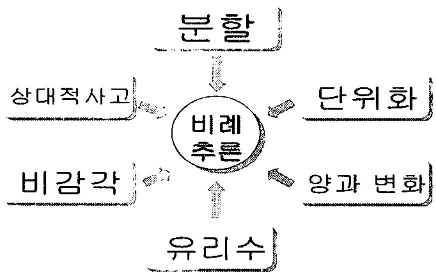
학생들에게 비례 추론 능력을 심어주기 위해서는 학생들이 취학 전부터 수세기, 대응시키기, 분할 등의 과정을 알고 사용하고 있음을 알아차리는 것이 중요하다. 어린 아이들도 자신의 손가락을 사용하여 수 세기를 할 수 있고, 손가락과 수를 대응 시킬 수 있으며 음식을 공평하게 나누어 먹는 방법을 경험을 통해 알고 있다. 따라서 교사는 이러한 기초적인 지식이 새로운 지식의 발판이 되고, 새로운 지식의 설계를 도울 수 있는 효과적인 도구가 됨을 인식하여야 하며, 학생들의 과거의 경험을 적절하게 수집하고 사용할 수 있어야 한다.

이에 본 연구자는 7차 교육과정에서 6학년 때 도입되는 교과서의 비례 문제들이 학생들의 비례 추론 능력과 어떠한 관련이 있는지를 알아보기 위해 교과서의 비례 문제 해결 실태를 파악하고, 수준별 비례 추론 능력을 하위영역으로 나누어 교과서 비례 문제 해결 능력에 따라 하위영역별로 비례추론 능력이 어떠한지 분석하였다. 이를 통하여 비례 추론 능력의 발달에 대한 정보를 상세화하고 지도에 도움을 주고자 한다.

Ⅱ. 비례 추론의 하위 영역

비례 추론의 하위 영역에 대한 학자들의 견해는 다양하였지만, Lamon(1989, 1993, 1999a, 1999b)은 오랜 동안의 연구를 통하여 1999의 연구에서는 비와 비례 추론을 이해하기 위한 필수적인 지식과 교수학적 전략을 구체적으로 제시하고 있다. Lamon(1999)에 따르면 비례

추론은 즉각적으로 생성되지 않고 장기간에 걸쳐 다양한 차원의 경험을 통해 발달된다고 하였다. 때문에 교사는 학생에게 비례 추론에 대한 형식적, 추상적인 학습이 이루어지기 전에 비례 추론의 결정적인 하위 영역을 경험할 수 있는 기회를 주어야 한다. Lamon(1999)은 비례 추론의 능력을 기르기 위해 다음과 같은 6가지 영역의 경험을 제안하였다.



[그림 1] 비례 추론을 위한 사고 영역

[그림 1]에서 살펴보면 비례 추론의 능력을 기르기 위해 분할, 단위화, 양과 변화, 유리수, 비감각, 상대적 사고의 경험이 필요함을 알 수 있다. 세부적으로 살펴보면 상대적 사고와 단위화는 지적 기능이고, 분할은 통찰력을 증진시키기 위한 활동으로 구체적인 활동을 포함한다. 또, 비 감각은 직관적 지식이다. 무엇을 해야 하고, 언제 해야 할지에 관해 적절한 문맥을 통하여 습득하는 것이다. 유리수에 대해 아는 것은 유리수의 세계 안에서 다양한 의미와 조작으로 융통성 있게 유리수를 움직일 수 있음을 의미한다. 마지막으로 양과 변화에 관한 추론은 비례 추론으로 표현된 양과 변화에 관해 해석하고 조작하는 능력이다. 각각을 정리하면 다음과 같다.

1. 상대적 사고

어떤 두 양이나 수를 비교함에 있어서 두 양의 덧셈적 관계에 주목하여 "How many?"로 비교하는 것을 절대적 사고라고 한다. 이에 반하여 상대적 사고는 두 양 사이의 곱셈적 관계에 주목하고 "How much?"의 개념으로 비교하는 것이다. 때문에 비례 추론 능력을 기르기 위해서는 학생들이 상대적 변화와 절대적 변화의 차이를 구별할 수 있도록 다양한 비교 상황을 제시하는 것이 좋다. 왜냐하면 단숨에 절대적인 사고에서 상대적인 사고로 전환하기는 어렵기 때문이다. 상대적 사고와 절대적 사고를 구별하게 하는 여러 가지 상황을 다양하게 제시하고 해결하는 과정을 통해 상대적 사고의 필요성을 인식하고 점진적으로 절대적 사고보다는 상대적 사고로 변화할 수 있도록 해야 한다. 비례 추론에서는 절대적 사고보다는 상대적 사고를 통하여 양들을 비교하는 상대적 사고가 기반이 되어야 한다.

2. 단위화

"How much?"에 대해 대답을 하기 위해서 우리는 전체에서 차지하는 부분에 관한 묶음 단위를 선택해야 한다. 단위화의 과정은 어린 아이들이 쉬운 연산을 배우는 초기의 과정을 통해 쉽게 살펴볼 수 있다. 아이들은 수를 세면서 처음에는 손가락을 사용해서 1대 1 대응으로 수를 세고, 다음에는 머릿속의 생각으로 수를 세고 나중에는 10씩 묶어서 수를 세는 전략을 인식한다. 이렇게 단위화의 과정은 복잡하게 점차 증가하는 양을 구조적으로 생각

하기 위해 단위의 구성을 다양하게 하는 것이다.

이 때, 단위의 구성을 어떻게 할 것인가에 따라 차이가 있다. 예를 들어 공 4개를 하나의 단위로 보았을 때 즉, 공 4개가 한 묶음이라면 공 6개는 $1\frac{1}{2}$묶음이 될 것이다. 또한, 공 2개를 하나의 묶음으로 보았을 때 공 6개는 3묶음이 된다. 우리가 배우는 분수 역시 전체를 몇 묶음으로 나눌지에 따라 결정되는 단위화를 기본으로 한 개념이다. 때문에 분수를 정확하게 이해하기 위해서는 단위에 대한 이해가 필수적이다(Lamon, 1999). 상황에 따라 어떤 단위를 적용할지를 결정하기 위해서는 단위에 대한 사고 과정을 경험하여야 한다.

3. 분할

분할은 사물을 똑같이 등분하는 과정이다. 분할은 나누어진 각 부분이 겹치지 않는 것을 의미하고 모든 부분이 사물의 한 부분이라는 것을 뜻한다. 또한 나누어진 각각의 부분이 같은 크기라는 부가적인 조건이 포함되어 있다. 만약 □가 하나의 단위라면, 이렇게  의 4조각으로 분할되었을 때, 이 분할은 $\frac{1}{4}$을 나타내기에는 적당하지 않다. 왜냐하면 분할된 조각의 모양이 똑같지 않기 때문이다. 분할화는 유리수의 핵심이라고 할 수 있고, 분수와 소수 (소수는 10개의 같은 부분으로 나누어 진 것이다) 모두 분할에 의해 형성된 개념이기 때문에 아주 중요하다. 분할은 수와 수학적 개념의 생산, 추론과 연산을 위한 기초적인 활동이다.

4. 비감각

비 감각을 기르기 위해서는 비례적 상황의 특징을 파악할 필요가 있다. 비례 추론에서 비 감각을 가지는 것은 중요하다. 왜냐하면, 비례적 상황과 비례적이지 않은 상황의 분석을 통해 비례적인 수학적 상황에 관해 직관적 감각을 가질 수 있기 때문이다. 비례적 상황은 두 양이 곱셈적으로, 같은 요소에 의해 증가하는 것이다. 비례적 상황을 나타내는 그래프는 (0 , 0)에서 시작하는 직선 그래프임을 확인할 수 있다. 비례적 관계에서 우리는 하나의 양이 다른 것과 관련되어 있는 규칙을 발견해야 한다. 규칙은 하나의 양을 알고 있을 때 또 다른 양을 발견하는 방법을 알게 한다. 비례적인 상황에서는 규칙은 모든 경우에 항상 같지만 비례적이지 않은 상황에서는 두 양에 관련된 규칙을 찾아낼 수가 없다.

비례적 상황은 증가하는 경우에만 존재하는 것은 아니다. 예를 들어 하나의 일을 하는데 혼자 일할 때 걸리는 시간보다 많은 사람들이 함께 일한다면 일을 끝마치는 데에 걸리는 시간은 훨씬 적어진다. 그러므로 사람의 수가 많아지면 일하는 데에 걸리는 시간은 줄어든다. 즉, 하나의 일을 하는데 일하는 사람들이 두 배로 많아지면 일 하는 데 걸리는 시간은 절반으로 줄어들고, 일하는 사람들이 세 배로 많아지면 일을 하는데 걸리는 시간은 $\frac{1}{3}$로 줄어든다. 두 종류의 양이 관계된 규칙이 있는데 위의 경우에는 (사람)×(시간)=상수이다. 이 규칙은 두 개의 결과물(두 수의 곱)들이 항상 변하지 않음을 말해준다.

5. 양과 변화

학생들은 어릴 때부터 1등, 3개의 사탕, 5개의 빵, 10층, 100m달리기의 등수를 세고 측정을 하는 과정을 경험한다. 이러한 경험들을 비례추론 능력으로 발전시켜 주기 위해서는

변화가 수반된 관계에 대해 체계적인 접근이 필요하다(Lamon, 1999). 변화는 크게 관계에 의한 변화, 모양에 의한 변화, 비율에 의한 변화, 변화의 표현 등을 살펴볼 수 있다.

6. 유리수

유리수(초등 수준에서 분수)에 대하여 학생들은 개념을 이해하고 응용하는데 어려움을 겪고 있을 뿐 아니라 단순한 분수 계산에서도 낮은 성취도를 보이고 있다. 이러한 어려움을 찾는 여러 연구들이 있었지만 대부분 주요 원인으로 분수 자체가 지니는 다양한 개념적 의미를 들고 있다. 비로서 의미를 갖는 분수는 하나의 양을 비교했을 때 다른 양이 얼마정도인지를 나타낼 때 이용된다. 비의 의미로서 분수를 이해하고 분수를 이해할 때 비의 의미를 이해할 수 있다면 비례 추론 능력이 길러지는데 도움이 된다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

교과서의 비례 문제 해결 수준에 따른 비례 추론 이해 정도를 알아보기 위해 경기도 안양시에 소재하고 있는 H 초등학교 6학년 3개 반과 충청북도 청주시에 소재하고 있는 G 초등학교 6학년 4개 반 총 227명을 연구 대상으로 하였다.

2. 교과서의 비례 문제 추출

제 7차 수학 교과서 및 선행 연구를 통해 6-가, 6-나 단계의 교육과정에 제시된 문제를 중심으로 주제별로 선별하였다. 본 검사지는 Cronbach's alpha 값이 0.872로 신뢰도가 있는 검사지로 볼 수 있으며, 전문가의 검토를 통하여 타당도를 높였다. 검사지는 <부록 1>과 같다.

3. 비례 추론 문제 개발

6학년 학생들의 교과서의 비례 문제 해결 정도와 비례 추론 능력과의 관계를 파악하기 위해 비례 추론 영역을 문헌을 검토한 결과를 토대로 상대적 사고, 단위화, 분할, 비감각, 양과 변화, 유리수로 나누어 각각의 하위 영역에 대한 문항을 개발하였다. 각 하위 영역당 2개의 문항을 작성하였고, 문항 수가 많은 관계로 1개의 문제씩 나누어 검사지 1과 검사지 2로 나누어 2회에 걸쳐 검사할 수 있도록 하였다. 각 검사지는 Cronbach's alpha 값이 0.852로 신뢰도가 있는 검사지로 볼 수 있으며, 전문가의 검토를 통하여 타당도를 높였다. <부록 2>에 비례추론 검사지 2를 실었다.

4. 본 검사 실시 및 자료 수집

6학년 학생들의 교과서의 비례 문제의 해결 실태와 비례 추론 능력의 관계를 파악하기 위해 경기도 안양시에 위치한 H 초등학교 3개 반과 충청북도 청주시에 위치한 G 초등학교 4개 반 200여명을 연구 대상으로 연구자가 개발한 교과서의 비례 문제 검사지와 비례 추론 능력 검사지 1, 2를 해결하도록 하였다. 예비검사를 통해 드러난 문제점을 고려하여 2007년 10월 말~11월 초에 본 검사를 실시하였다. 검사지 투입 시점은 6-가 단계의 비와 비례, 비례식을 학습한 이후이고, 6-나 단계의 연비를 학습하기 이전이다. H초등학교는 본 연구자

가, G초등학교는 검사 실시에 따른 유의점을 잘 설명한 후, 각 반 담임이 실시하였다.

5. 자료 분석 방법

본 검사는 6학년 학생들의 교과서의 비례 문제 해결 실태와 비례 추론 능력의 관계 정도를 파악하기 위해 초등학교 6학년 학생 227명이 답한 검사지를 통해 양적 · 질적으로 이루어졌다. 문헌 검토를 통해 대략적인 분석틀을 마련하고, 예비 검사의 분석을 통해 분석틀을 구체화하였다.

6학년 학생들의 교과서의 비례 문제 해결 실태를 알아보기 위하여 교과서의 비례 문제 검사지를 채점하여 학급 평균(M)을 기준으로 상은 M+10이상, 중은 M±10, 하는 M-10 이하로 수준을 나누었다. 또, 교과서의 비례 문제 검사지 각각의 문제별로 반응수(정답, 오답, 무반응)를 조사하였다.

교과서 비례추론 문제 해결 능력에 따른 6학년 학생들의 비례 추론 능력은 하위영역별로 어떻게 나타나는지를 알아보기 위하여, 교과서의 비례 추론 검사지 해결 결과 상(M+10), 중(M±10), 하(M-10)의 세 집단이 각각 비례 추론 검사지의 영역별 문제별해결 정도와 해결 내용을 분석하고 상관관계를 분석하여 피어슨 상관계수를 산출하였다. 분석 결과를 토대로 각 집단별로 해결에서 차이가 적거나 많은 비례 추론 하위 영역 내용을 질적으로 정리하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 교과서의 비례 문제 해결 실태 분석

교과서의 비례 문제 해결 실태를 분석한 결과 경기도 안양 소재의 H 초등학교와 충북 청주 소재의 G 초등학교 평균이 다소 차이가 있었다. 학급 평균(M)을 기준으로 상(M+10), 중(M±10), 하(M-10)로 구분하였다.

비록 학교별 · 학급별 평균이 서로 다르지만 지역별로, 반별로 배운 내용과 과정이 서로 다를 것이므로 학급 평균(M)을 기준으로 구분하는 것이 집단별로 가지는 학습의 차이로 인해 생기는 왜곡 현상을 줄일 수 있다고 보았기 때문이다. 교과서의 비례 문제는 총 17개로 문제별 반응 수(정답, 오답, 무반응)는 <표 1>과 같다.

교과서의 비례 추론 검사지의 반응수를 살펴보면, 정답률이 높은 문제(정답률 80% 이상)는 2, 8, 11번이고, 정답률이 낮은 문제(정답률 50% 이하)는 6, 7, 10, 16, 17번이었다. 정답률이 높은 문제들은 대체로 비례식을 손쉽게 세울 수 있으며, 두 비 사이의 관계가 정수비로 계산이 간단한 문제였다. 또한, 문제 11번과 같이 두 수의 간단한 관계를 파악하는 문제도 정답률이 높았다. 반면 정답률이 낮은 문제들은 문제 7, 10번과 같이 백분율을 이용한 문제이거나, 문제 16번, 17번과 같이 문제에서 비 관계가 명확하게 나타나지 않고, 이해하기에 복잡한 문제였다.

정답률이 높은 문제들은 문제가 비례식을 이용하여 문제를 해결 할 수 있게 서술되어 있었으며[3]), 비례식을 세웠을 때 두 비 사이의 관계가 정수비로 계산이 간단하였다. 또 문

3) 문제 2. 빵 3개를 만드는데 달걀이 6개 필요합니다. 빵 9개를 만들기 위해서는 달걀에 몇 개 필요할까요? (3 : 6 = 9 : □)-내비교, 간비교 모두 정수비 관계임.

제에 주어진 비가 5 : 1과 같이 한 단위 전략을 쉽게 사용할 수 있는 형태였으며4), 비례식을 세웠을 때 $A:B=A':B'$의 관계가 순차적으로 서술되어 있었다. 대응표를 보고, 두 수의 관계를 파악하는 문제 역시 정답률이 높았는데 대응표를 이용하여 두 수의 관계를 묻는 질문은 <4-나> '8. 문제푸는 방법찾기'5) 에서부터 나오는 문제 유형이다.

<표 1> 교과서의 비례 문제 반응 수

문 제	정답(%)	오답(%)	무반응(%)	계
1	162 (71.4)	57 (25.1)	8 (3.5)	227
2	203 (89.4)	22 (9.7)	2 (0.9)	227
3	166 (73.1)	56 (24.7)	5 (2.2)	227
4	175 (77.1)	48 (21.2)	4 (1.8)	227
5	156 (68.7)	42 (18.5)	29 (12.8)	227
6	94 (41.4)	117 (51.5)	16 (7.0)	227
7	57 (25.1)	162 (71.4)	8 (3.5)	227
8	188 (82.8)	26 (11.5)	13 (5.7)	227
9	175 (76.3)	28 (12.2)	24 (11.5)	227
10	103 (45.4)	114 (50.2)	10 (4.4)	227
11	193 (85.0)	22 (9.7)	12 (5.3)	227
12	122 (53.7)	85 (37.5)	20 (8.8)	227
13	152 (67.0)	64 (28.2)	11 (4.8)	227
14	163 (71.8)	45 (19.8)	19 (8.4)	227
15	115 (50.7)	96 (42.3)	16 (7.0)	227
16	78 (34.4)	136 (59.9)	13 (5.7)	227
17	73 (32.2)	147 (64.8)	7 (3.1)	227

* 문제 1, 5, 6번은 소문제 4개 중 3문제 이상 맞추었을 때 정답으로 인정하였음

4) 문제 8. 병주네 집에서는 쌀과 보리쌀을 5:1의 비로 섞어서 밥을 짓는다고 합니다. 쌀을 400g 넣으면, 보리쌀은 몇 g 넣어야 하는지 알아보시오.
- 한 단위 전략 ($400 \div 5 = 80g$) 또는 비례식 전략 ($5:1 = 400:\square$)

5) 수학 교과서 4-나에 제시되어 있는 대응표

□	1	2	3	4	5
△	2	4	6	8	10

,

□	3	6	9	12	15
△	1	2	3	4	5

반면 정답률이 낮은 문제들은 문제 7, 10번과 같이 백분율을 이용한 문제[6] 이거나 문제 16번, 17번과 같이 문제에서 비 관계가 명확하게 나타나지 않고, 문제 서술이 복잡하여 문제에서 구하고자 하는 내용을 이해하기에 어려운 문제였다. 백분율은 <6-가>단계에서 처음 도입되며, 비와 비율에 대한 개념을 익힌 후 기준량이 100일 때의 비율을 백분율이라고 정의한다. 교과서에서는 비율을 백분율로 나타내는 방법으로 '백분율(%)=비율×100'을 공식으로 제시하고 있다. 때문에 '이 문제를 해결하기 위한 공식을 기억하지 못하여 문제를 풀 수 없다'라고 대답한 학생들을 다수 볼 수 있었다. 백분율을 외우고 공식으로 습득해야 하는 기술이 아니라 기준량이 100인 상황을 도입하여 백분율의 개념을 좀 더 체득시킬 필요가 있다. 정답률이 낮은 문제의 또 다른 유형은 문제에서 비례식을 이용해서 문제를 해결할 수 있다는 암시가 없는 것이다. 문제가 다소 복잡해 보이고, $A:B=A':\square$의 관계로 쉽게 비례식을 세울 수 없을 때 학생들은 당황하고 문제를 어려워한다.[7] 그리고 비례식을 이용해서 풀었더라도 거기에서 끝이 아니라 비례식을 이용하여 해결한 것을 다시 문제가 요구하는 조건으로 변환시켜야 하는 문제에서도 정답률이 낮았다.[8]

즉, 학생들은 문제가 비례식으로 풀 수 있도록 진술되어 있고, 두 비가 간단한 정수비 관계일 때 정답률이 높았으며, 문제에서 비례식을 이용하여 풀어야 하는지가 명확하게 드러나지 않고, 백분율을 이용하였으며, 두 비가 정수비 관계가 아닐 때 정답률이 낮은 것을 알 수 있다.

2. 비례 추론의 하위 영역별 해결

비례 추론 능력 검사지의 해결 실태를 통해 각 영역별로 정답일 경우, 오답일 경우, 무반응인 경우에 대한 반응수를 조사하고 백분율로 나타낸 결과는 다음 표와 같다.

<표 2> 비례 추론의 하위 영역별 정답률 (%)

비례추론 하위영역	정답	오답	무반응	계
상대적 사고	56.6	42.5	0.9	100
단위화	59.0	37.2	3.8	100
분할	·	·	·	·
비감각	73.7	16.7	9.6	100
양과 변화	16.2	74.2	9.6	100
유리수	61.0	23.2	15.8	100

* 분할 영역은 문제의 특성상 정 · 오답으로 분류가 곤란하여 공란으로 처리함

가장 정답률이 높은 영역은 비감각 영역으로 정답률이 73.7%이고, 가장 정답률이 낮은

6) 문제 7. 작년에는 공책 5권에 2000원이었는데, 올해에는 4권에 2000원입니다. 공책값은 작년에 비해 몇 % 올랐습니까?
문제 10. 마라톤 대회에 참가한 선수는 200명입니다. 그 중에서 124명이 결승점까지 달렸습니다. 결승점까지 달린 선수는 참가한 선수의 몇 %입니까?

7) 문제 16. 원 ㉮와 원 ㉯가 그림과 같이 겹쳐 있습니다. 겹쳐진 부분의 넓이는 ㉮의 넓이의 $\frac{2}{3}$이고, ㉯의 넓이의 $\frac{1}{5}$입니다. 원 ㉮의 넓이가 27cm2 이라면, 원 ㉯의 넓이는 cm2입니까?

8) 공장에 ㉮와 ㉯, 두 기계가 있습니다. 두 기계가 같은 시간에 만들어내는 장난감 수의 비는 6 : 5입니다. ㉮ 기계가 1시간에 장난감 360개를 만든다면, ㉮와 ㉯ 두 기계로 4950개의 장난감을 만드는데 걸리는 시간은 몇 시간 몇 분일까요?

영역은 양과 변화 영역으로 정답률이 16.2% 밖에 되지 않았다. 여기에서 주목할 만한 것은 양과 변화 영역의 정답률이 가장 낮다는 것이다. 그 이유는 교과서의 비례 문제에서는 비례식으로 동치인 비를 생성하는 능력을 습득하는데 반하여 양과 변화 문제는 동치인 비를 생성하고 이를 비교하는 능력까지 요구되기 때문이다. 예를 들어, 교과서 비례 문제 중 '빵 2개를 만드는 데에 달걀이 3개 필요합니다. 빵 4개를 만드는 데에는 달걀이 몇 개 필요한지 알아보시오.' 라는 문제는 $2:3=4:\square$로 동치인 비를 만들어 해결할 수 있다. 그러나 양과 변화 영역 문제의 경우 우선 ●의 막대의 길이를 추론하여 비를 만든 후 ♥의 막대 길이의 비와 비교를 해야 한다. 이런 점에서 볼 때 양과 변화 영역에서 제시된 문제의 과정이 더 복잡한 것은 분명하다. 그러나 비례 추론은 동치인 비를 만드는 것뿐만 아니라 비를 비교하는 능력도 포함되며(Walle, 2001), 실생활에서도 비를 비교해야 하는 상황을 쉽게 접할 수 있다. 따라서 학생들이 비례식을 생성하고 해결하는 능력뿐만 아니라 서로 다른 비를 비교하고 판단할 수 있는 문제도 접할 수 있어야 한다. 각 영역별 해결 내용을 정리하고 논의하면 다음과 같다.

첫 번째로, 상대적 사고 영역에서는 절대적 사고와 상대적 사고를 구별하여 사고할 수 있는지를 알아보았는데, 상대적 사고로 생각할 수 있는 학생이 50% 정도였다. 홍수영(2006)의 연구에서 살펴보면 5학년 학생들이 절대적 사고와 상대적 사고의 의미에 관련된 문제에서 91.8%의 학생들이 상대적 사고보다 절대적 사고가 우선시 되고 있고, 상대적 사고의 경우에도 단순히 질적으로 추론하는 수준을 넘지 못한다고 하였다. 위의 선행연구와 비교해보면 교과서의 비례 개념을 습득하기 전인 5학년 학생들은 상대적 사고와 절대적 사고의 의미를 거의 구별하지 못하고, 설사 구별한다고 해도 질적 추론 수준 이상을 넘지 못하지만, 교과서의 비례 개념을 습득한 6학년 학생들은 50% 가량의 학생이 상대적 사고의 의미를 이해하고 있으며 비와 관련지어 자신의 의견에 대한 타당한 이유를 설명할 수 있었다.

두 번째로, 단위화 영역에서는 $\frac{1}{n}$이 주어졌을 때, 1의 단위를 찾아내는 문제의 정답률이 72.7%로 제일 높았으며 $\frac{m}{n}$이 주어졌을 때, 1의 단위를 찾아내는 문제의 정답률이 65.6%, $1\frac{1}{n}$로 대분수가 주어졌을 때 1의 단위를 찾아내는 문제의 정답률이 56.8%로 점점 낮아졌다.

교과서에서 단위화 영역과 관련된 부분을 찾아보면 비와 관련된 개념 보다는 분수 개념에서 더 쉽게 찾아 볼 수 있다. 단위에 대해 유연한 사고를 가질 수 있도록 다양한 상황 속에서 구체적인 사물로 수많은 경험을 통해 단위에 대해 조직화하는 연습을 할 필요가 있다. 이는 후에 분수의 개념을 이해하는 데에 큰 기초가 될 것이다. 왜냐하면 분수는 주어진 조각 수나 모양, 색깔 등에 관계없이 $\frac{b}{a}$라는 것이 상대적인 양으로 일정하기 때문이다(Lamon, 1999).

세 번째로, 분할 영역은 유리수의 핵심이라고 할 수 있고, 분수와 소수 모두 분할에 의해 형성된 개념이다. 분할은 수와 수학적 개념의 생산, 추론과 연산을 위한 기초적인 활동이다(Lamon, 1999). 이처럼 분할의 개념이 수의 생성에 기초하였기 때문에 대분의 학생들이 분할 영역의 문제를 쉽게 풀 수 있었다. 다만 다양한 방법으로 분할을 시도하였을 때, 기존의 한, 두 가지 방법에 익숙한 학생들이 어려움을 겪는 모습을 확인할 수 있었다.

다섯 번째로 비감각 영역에서 학생들의 정답률이 가장 높음을 확인하였다. Cramer와 Post는 비례적 상황에 내재해 있는 수학적 관계를 이해하는 것으로 다양한 문제 영역을

해결할 수 있는 능력, 비례적이지 않은 상황과 비례적인 상황을 식별하는 능력을 포함하여 비례적 추론 능력이라고 정의하였는데 6학년 학생들은 제시된 두 상황의 관계가 서로 관련이 있음을 알아내고, 정비례 관계인지 반비례 관계인지 확인하였으며, 주어진 상황이 타당한지 아닌지를 판단할 수 있었다.

여섯 번째로 유리수 영역에서 비로서 의미를 갖는 분수는 하나의 양을 비교했을 때 다른 양이 얼마정도인지를 나타낼 때 이용된다. 비는 상대적인 크기의 개념을 전달하는 관계이다. 따라서 이는 '수'로서 보다는 비교지수로서 더욱 정확하게 고려되어야 하며 이러한 비례의 사용은 대소 비교를 요구하는 다양한 물리적 상황과 문제에 매우 유용한 문제 해결 도구이다(Behr et al., 1983). 그러나 학생들의 유리수 영역의 해결 실태를 살펴보면 수직선에서의 유리수의 위치를 찾고, 관계를 파악하는 문제의 정답률이 약 30%정도 밖에 되지 않았다. 이 결과로 볼 때 비의 의미로 분수를 이해하는데 많은 노력을 들여야 하겠다.

3. 교과서의 비례 문제 해결에 따른 비례 추론의 하위 영역 문제 해결

교과서의 비례 문제 해결 실태와 비례 추론과의 관계를 살펴보기 위해 학급 평균(M)을 기준으로 학생들의 수준을 나누고 비례 추론검사지 해결 정도를 파악하였다. 그 결과 비례 추론의 하위 6개 영역에서 모두 교과서의 비례 문제를 잘 해결하는 '상' 수준의 학생들이 '중', '하' 수준의 학생들보다 비례 추론 능력이 우수하였다.

가. 수준에 따라 해결에 차이가 적은 내용

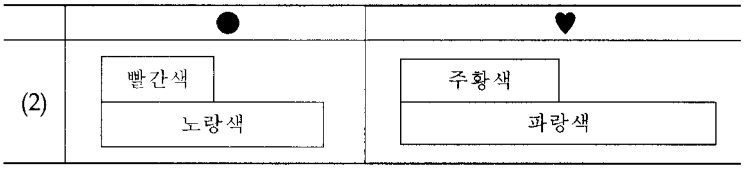
수준별 차이가 가장 작은 영역은 상대적 사고 영역 중 절대적 사고로 대답하는 문제였으며('상' 수준 : 91.4%, '중' 수준 : 98.0%, '하' 수준 : 77.2%), 분할 영역의 주어진 사물을 사람 수만큼 똑같이 나누어 주는 문제에서도 수준별 차이가 거의 없었다. 또, 유리수 영역의 주어진 그림을 보고 유리수로 표현을 하는 문제나 제시된 분할 그림을 이용하여 전체 학생 중 남학생과 여학생의 수를 알아내는 문제로 두 문제 모두 '상' 수준과 '중' 수준에서 정답률의 차이가 5%를 넘지 않는다.

두 수를 비교하는데 있어 상대적 사고보다는 절대적 사고가 더 익숙하고, 주어진 그림을 분할하여 유리수(분수)로 만드는 과정은 분수를 설명하면서 자주 접하는 과정이다. 또한, 제시된 분할 그림을 이용하여 부분이 차지하는 몫을 찾아내는 문제 역시 흔히 겪을 수 있는 문제이며 분할 영역에서 주어진 사물을 공평하게 사람 수만큼 나누는 것 역시 아주 기초적인 나눗셈에 지나지 않는다. 학생들이 절대적 사고는 대부분 계발하였으며, 비례 추론의 하위 영역 중에서 학생들의 개념 중 사물을 등분하는 분할의 개념, 그림을 보고 유리수로 나타내기, 남학생과 여학생의 수를 알아내어 유리수로 나타내는 내용에 대한 이해가 빠르다고 할 수 있다. 또한 수준별 차이가 많이 나지 않는 문제는 꼭 비와 비율 관련 단원이 아니라도 수학 교과서에서 다양하게 접할 수 있는 상황과 유형의 문제였다.

나. 수준에 따라 해결에 차이가 큰 내용

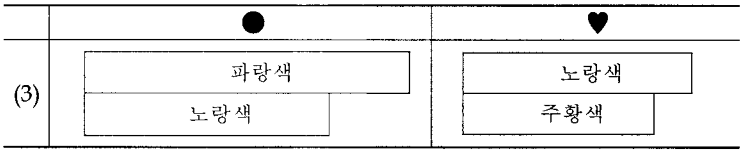
우선, 양과 변화를 이해하는 정도를 알아보기 위한 퀴즈네르 색막대(Cuisinaire rods)문제에서는 '중' 수준의 학생의 정답률이 약 10% 내외인 반면 '상' 수준의 학생의 정답률은 30% 이상으로 약 3배 이상 차이가 났다. 상 수준의 학생들이 월등히 높은 해결률을 보였다. 양과 변화 문제에서 특이한 점은 <문제 3-(2)>의 정답률이 '중' 수준보다 '하' 수준이

더 높았던 점이다. <문제 3-(2)>는 두 막대의 길이가 ●, ♥ 모두 1:2로 시각적으로 확연히 보인다. 때문에 다른 두 문제와 달리 '●와 ♥의 관계가 같은가?'의 질문에 '그렇다'라고 쉽게 답하였다. 반면 '중' 수준의 학생들은 제시된 그림에 주목하지 않고 막대 길이 관계가 같은지 다른지의 고민보다는 무조건 막대를 바꿔야 한다는 생각에 정답률이 높지 않았다. 하수준은 비례적 관계로 답했다기 보다 위의 막대가 아래보다 짧기 때문에 그렇다고 답하여 정답률이 높고, 중수준은 비율이 같게 하는 것을 막대를 바꾸어 같은 길이로 나타내려 하였기 때문에 오히려 정답률이 낮았던 것 같다.



[그림 2] 양과 변화 <문제 3-(2)>

수준별로 모두 <문제 3-(3)>의 정답률이 가장 낮았는데, 제시된 문제는 [그림 3]과 같다.

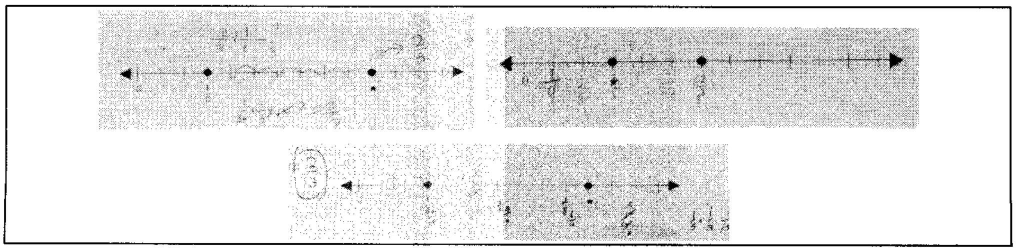


[그림 3] 양과 변화 <문제 3-(3)>

<문제 3-(3)>을 해결하면서 ♥의 '주황색 : 노랑색 = 3 : 4'와 ●의 '노랑색 : 파랑색 = 4 : 6 '이 같다고 생각하는 학생들이 많았다. 상대적으로 작은 막대인 ♥의 3:4의 관계가 $4-3=1$만큼의 차이가 나고, 상대적으로 큰 막대인 ●의 4:6의 관계가 $6-4=2$만큼의 차이가 나므로, 1이나 2정도의 근소한 차이를 같게 보는 경향이 있다고 생각된다.

둘째, 유리수 영역에서 수직선을 이용하여 주어진 유리수의 위치를 찾거나 수직선에 해당하는 유리수를 찾아내는 문제의 정답률도 '중' 수준의 학생은 22%인 반면 '상' 수준의 학생은 67.2%로 정답률이 2배 이상 차이가 났다.

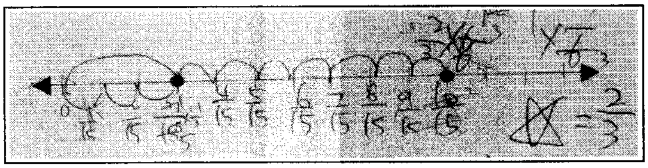
수직선을 이용하여 해당되는 유리수의 위치를 찾거나 유리수를 수직선에 표시하는 문제에 대해서 다른 유리수 문제에 비해 '상' 수준의 정답률이 더욱 두드러지게 높았다. 유리수를 추상화하여 이해하고 그 크기와 순서를 수직선에 나타내는 것을 가장 어려워함을 알 수 있다.



[그림 4] '상' 수준의 유리수 영역 해결 2

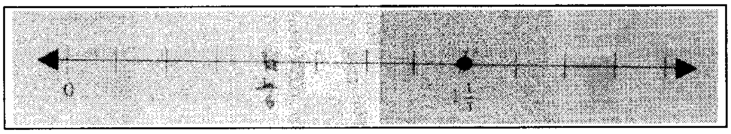
'상' 수준의 학생들은 문제를 해결하기 위해 수직선에서 1도막에 해당하는 유리수의 관계를 파악하여 문제를 해결하거나, 각각의 수직선에 해당하는 유리수를 통분으로 찾아내어 각각의 수직선에 대응시켜 문제를 해결하거나, 제시된 분수 $\frac{1}{5}$만큼 수직선을 건너뛴 후, 더 이상 건너세기를 할 수 없을 때 수직선을 임의로 분할하여 문제를 해결하였다(그림 4).

그러나 '중' 수준의 학생은 '상' 수준의 학생에 비해 좀 더 구체적이고, 시각적으로 사고하는 모습을 확인할 수 있었다. 주어진 분수 $\frac{1}{5}$이 수직선 3칸을 차지하고 있으므로 수직선 1칸은 $\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$임을 찾아내어, $\frac{1}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{3}{15}$…등으로 수직선 칸마다 해당하는 수를 적어 정답을 확인하였다[그림 5].



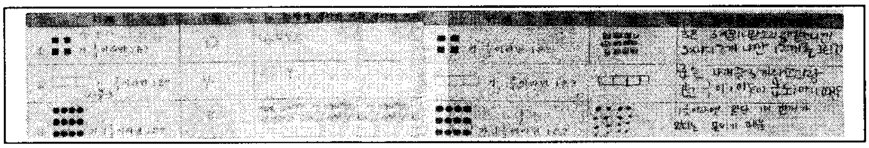
[그림 5] '중' 수준의 유리수 영역 해결 2

반면, '하' 수준의 학생은 무응답이 49.1%로 아주 높았고, 문제를 해결한 경우도 [그림 6]과 같이 사고과정을 확인할 수 없는 경우였다.



[그림 6] '하' 수준의 유리수 영역 해결 2

셋째, 단위화 영역에서 주어진 단위가 $1\frac{1}{n}$일 때 정답률의 차이가 가장 컸으며('상' 수준 : 82.9%, '중' 수준 : 55%, '하' 수준 : 28.1%), 주어진 단위가 $\frac{m}{n}$, $\frac{1}{n}$로 단순해질수록 정답률의 차이가 작아졌다.

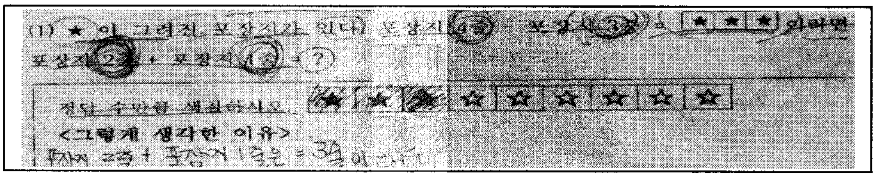


[그림 7] '상' 수준의 단위화 영역 해결 1

[그림 7]과 같이, 단위에 대한 문제의 의미를 이해한 후 간단한 계산으로 문제를 해결하거나 $\frac{n}{m}$과 같은 분수의 의미를 이용하여 해결과정을 설명하였다. 그러나 $1\frac{n}{m}$과 같은 대분수를 이용한 단위의 사고에 있어서는 정답률이 다소 낮았다. 특히, '상'수준의 학생들의

정답률은 다른 문제들과 별반 차이가 없으나 '중', '하' 수준으로 갈수록 이 문제에 대한 정답률이 앞의 문제들과 10% 이상 차이가 났다. 교과서의 비례 추론 개념이 부족한 학생들은 단위화의 사고에 있어 특히 1 이상의 단위가 구성되어 있을 때, 기본 단위 1을 찾아내는 능력이 부족하고 단위를 새롭게 구성하려는 시도보다는 기존의 1이라는 지식에 갇혀 단위를 새롭게 구성하는데 실패하는 모습도 볼 수 있었다.

또 다른 문제의 해결에서 드러난 점은 '상' 수준의 학생들은 단위화에 대한 문제를 이해하고 주어진 조건을 이용하여 유연하게 사고할 수 있었으나 '중'에서 '하' 수준으로 갈수록 기존에 자신이 배웠던 산술 방법을 이용하여 문제를 해결하려는 경향이 있다는 것이다. 아래 그림은 '하' 수준의 학생이 제시된 조건을 고려하여 문제를 해결하기보다는 답을 구하기 위하여 제시된 수에 대해 의미없는 산술적 조작을 하여 단순한 계산의 결과로 답을 낸 예이다.



[그림 8] '하' 수준의 단위화 영역 해결 2

이상에서 볼 때, 학생들이 어려워하는 비례 추론의 하위 내용은 퀴즈네르 막대처럼 낯선 문제 상황과 주어진 비가 동치인지 아닌지를 판단하여 판단 결과에 따라 수정까지 이루어져야 하는 복잡한 문제를 들 수 있다. 또, 기존의 자연수 또는 소수를 이용하여 순차적인 수의 위치를 표시하던 수직선을 이용하여 수직선에서의 유리수의 위치를 찾게 하는 문제 역시 수를 묶어 세거나 건너 세는 등의 수를 재구성하여야 하는 어려움을 보였다. 단위화 문제 역시 1이라는 기준에 익숙해있던 학생들은 $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$, $1\frac{1}{n}$의 기준을 새롭게 제시함으로서 사고의 혼란을 겪었다.

V. 결 론

본 연구 결과를 요약하면 첫째, 교과서의 비례 문제에서 정답률이 높은 문제들은 설명에서 비례식을 이용해서 풀 수 있도록 제시되어 있었으며, 비례식을 세웠을 때 두 비 사이의 관계가 정수비로 계산이 간단하였다. 또, 문제에 주어진 비가 $5:1$과 같이 한 단위 전략을 쉽게 사용할 수 있는 형태였으며, $A:B=A':B'$의 관계가 순차적으로 서술되어 있었다. 대응표를 보고, 두 수의 관계를 파악하는 문제 역시 정답률이 높았는데 대응표를 이용하여 두 수의 관계를 묻는 질문은 4-나 '8. 문제를 푸는 방법 찾기' 단원에서부터 나오는 문제 유형이다.

반면 정답률이 낮은 문제들은 백분율을 이용한 문제 또는 비 관계가 명확하게 나타나지 않고, 이해하기에 복잡한 문제였다. 정답률이 낮은 문제의 또 다른 특징은 문제에서 비례식을 이용해서 문제를 해결할 수 있다는 암시가 없는 것이다. 문제가 다소 복잡해 보이고, $A:B=A':\square$의 관계로 쉽게 비례식을 세울 수 없을 때 학생들은 당황하고 문제를 어려

워한다. 그리고 비례식을 이용해서 풀었더라도 거기에서 끝이 아니라 비례식을 이용하여 해결한 것을 이용해 다시 문제가 요구하는 조건을 충족시켜야 하는 문제에서도 정답률이 낮았다.

즉, 학생들은 문제가 비례식으로 풀 수 있도록 진술되어 있고, 두 비가 간단한 정수비 관계일 때 정답률이 높았으며, 문제에서 비례식을 이용하여 풀어야 하는지가 명확하게 드러나지 않고, 백분율을 이용하였으며, 두 비가 정수비 관계가 아닐 때 정답률이 낮은 것을 알 수 있다.

둘째, 비례 추론 하위 영역 중 가장 정답률이 높은 영역은 비감각 영역으로 정답률이 73.7%이고, 가장 정답률이 낮은 영역은 양과 변화 영역으로 정답률이 16.2% 밖에 되지 않았다. 6학년 학생들은 비례적 상황(정비례 상황, 반비례 상황)을 판단하는 능력이 우수하나 두 수의 관계를 통해 동치인 비를 생성하고 이를 비교하는 능력은 많이 부족함을 알 수 있었다.

셋째, 교과서의 비례 문제 해결 능력과 비례 추론의 관계에 대해서는 예상한 대로 교과서의 비례 문제 해결이 우수한 학생일수록 비례 추론 능력이 우수함을 알 수 있었다. 교과서의 비례 문제 해결 실태로 수준을 구분하였을 때, 비례 추론 검사지의 양과 변화 영역의 문제와 유리수 영역의 수직선 문제, 단위화 영역에서 기준 단위가 1이 아닐 때의 문제에서 수준별 차이가 많이 났다.

상대적으로 수준별 차이가 크지 않은 문제는 상대적 사고 영역 중 절대적 사고로 대답하는 문제와 분할 영역의 주어진 사물을 사람 수만큼 똑같이 나누어 주는 문제였다. 또, 유리수 영역의 주어진 그림을 보고 유리수로 표현을 하는 문제와 제시된 분할 그림을 이용하여 전체 학생 중 남학생과 여학생의 수를 알아내는 문제 역시 수준별 차이가 크지 않았다.

수준별 차이가 많이 나지 않는 문제의 특징은 꼭 비와 비율 관련 단원이 아니라도 수학 교과서에서 다양하게 접할 수 있는 문제이다. 그러나 수준별 차이가 많이 나는 문제는 그동안 교과서에서 쉽게 접해보지 못한 유형으로 단순히 비례식을 이용해서는 해결할 수 없는 문제들이었다.

Lamon(1999)은 비례 추론 능력은 하나를 배운다고 해서 단숨에 생기는 능력이 아니라 장기간의 시간과 다양한 차원의 경험을 통해 발달된다고 하였다. 또, 비례 추론 능력은 오랜 학습이 이루어지면서 전구에 불이 켜지듯 생겨나는 감각이기 때문에 학생들에게 교과서의 비례 개념을 도입하기 이전에 비례 추론을 구성하고 있는 다양한 구성영역을 경험할 수 있는 기회를 제공해야 한다고 하였다. 학생들이 교과서의 비례 개념을 배우기 이전에 비례적 사고를 기를 수 있도록 상대적 사고, 단위화, 분할, 비감각, 양과 변화, 유리수 등의 영역을 골고루 경험하고 탐구할 수 있는 기회가 제공되어야 한다. 특히, 개정7차 교육과정에서는 학생들의 비례 개념 발달이 빠르고, 비례 문제를 해결함으로써 다른 영역의 문제 해결을 도울 수 있다는 취지하에 비와 비율이 5학년 때부터 다루어진다. 이때에 기존의 교과서에서 다루던 내용 뿐 아니라 퀴즈네르 막대처럼 다양한 소재로 비율을 지도하고 비례 추론의 다양한 영역을 학습하고 통합할 기회를 제공하여야 할 것이다. 또한, 6학년 학생의 경우 형식적인 비례식 문제와 함께 단순한 비례식을 이용하여 해결할 수 없는 문제와 정수비가 아닌 비례 문제에 대해서도 경험할 기회를 제공하는 것이 비례 추론을 확대하고 심화하는 방안이라 생각된다.

비를 배우는 것은 결국 비에 대한 안목을 길러 어떤 상황이나 맥락 안에서 그것을 조직하는 수단으로 비라는 관점을 택할 수 있고, 추론으로 연결 지어 문제를 해결할 수 있도록

하는 것이므로 비례 추론 능력을 길러주기 위한 다양한 경험을 조직적으로 구성하여 교육과정을 구성하고 그 효과를 살펴보는 후속 연구가 필요하다. 비례 추론 능력을 길러주기 위하여 교과서의 비례 개념을 도입하기 이전에 비례 추론의 하위 영역을 언제, 어떤 방법으로 도입할 것인지를 판단하여 교육과정과 교수법을 정교화 하여야 하기 때문이다. 현재 7차 교육과정에 제시된 비와 비율 관련 단원은 주요 개념을 설명하고 알고리즘을 습득하는 방식이므로 좀 더 흥미로운 비와 비율 관련 과제를 개발하고 그 과제를 투입하여 학생들의 비례 추론 능력의 신장에 도움이 될 수 있는 구체적인 방법에 대한 연구가 비례추론의 하위 영역을 중심으로 이루어진다면 효과적이리라고 생각된다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2002). **수학 4-가, 수학 4-나, 수학 5-가, 수학 5-나, 수학 6-가, 수학 6-나**. 서울: 대한 교과서 주식회사.

정은실 (2003). 비 개념에 대한 교육적 분석. **대한수학교육학회지**, 13(3). 247-265.

Baroody, A. J. & Coslic, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to k-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

English, L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc. 고상숙 외 5인 공역 (2004). 수학교육론: 인지과학에서 수체계의 정신모델, 계산과정, 그리고 문제해결. 서울: 경문사.

Lamon, S. J. (1989). *Ratio and proportion: Pre instructional cognitions.* Unpublished Doctoral Dissertation, The University of Wisconsin.

Lamon, S. J. (1993a). Ratio and proportion : children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T. A. Fomberg (Eds), *Rational Number.* (pp. 131-156). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (1993b). Ratio and proportion : cognitive foundation in unitizing and norming. In G. Herel & J. Comfrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.* (pp.89-120). Albany, NY: Summy Tress.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding : Essential context knowledge and instructional strategies for teachers.* Lawrence Erlbaum Associates. Inc.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. J. (1998). Proportionality and the development of prealgebra understandings. In A. F. Coxford & A. P. Shulte(Eds.), *The ideas of algebra,* K-12(1988 Yearbook). Reston, VA: The National Council of Teacher of Mathematics. Inc.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

<Abstract>

A Study on the Solving Proportion Problems of Mathematics Textbooks and Proportional Reasoning in 6th Graders

Kwon, Mi Suk[9]; & Kim, NamGyun[10]

The purpose of this study is analysis of to investigate relation proportion problem of mathematics textbooks of 7th curriculum to proportional reasoning(relative thinking, unitizing, partitioning, ratio sense, quantitative and change, rational number) of Lamon's proposal at sixth grade students.

For this study, I develop two test papers; one is for proportion problem of mathematics textbooks test paper and the other is for proportional reasoning test paper which is devided in 6 by Lamon. I test it with 2 group of sixth graders who lived in different region. After that I analysis their correlation.

The result of this study is following. At proportion problem of mathematics textbooks test, the mean score is 68.7 point and the score of this test is lower than that of another regular tests. The percentage of correct answers is high if the problem can be solved by proportional expression and the expression is in constant proportion. But the percentage of correct answers is low, if it is hard to student to know that the problem can be expressed with proportional expression and the expression is not in constant proportion.

At proportion reasoning test, the highest percentage of correct answers is 73.7% at ratio sense province and the lowest percentage of that is 16.2% at quantitative and change province between 6 province.

The Pearson correlation analysis shows that proportion problem of mathematics textbooks test and proportion reasoning test has correlation in 5% significance level between them. It means that if a student can solve more proportion problem of mathematics textbooks then he can solve more proportional reasoning problem, and he have same ability in reverse order. In detail, the problem solving ability level difference between students are small if they met similar problem in mathematics text book, and if they didn't met similar problem before then the differences are getting bigger.

Keywords: proportion problem, mathematics textbook, proportional reasoning

논문접수: 2009. 10. 29
논문심사: 2009. 11. 10
게재확정: 2009. 11. 19

9) lean99@hanmail.net
10) ngkim@cje.ac.kr

<부록1> 교과서 비례문제 검사지

1. □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

① 6 대 15 → □ : □
② 5와 8의 비 → □ : □
③ 9의 17에 대한 비 → □ : □
④ 7에 대한 4의 비 → □ : □

2. 빵 3개를 만드는데 달걀이 6개 필요합니다. 빵 9개를 만들기 위해서는 달걀이 몇 개 필요할까요?

3. 연필 5자루에 1500원입니다. 연필을 13자루 살려면 얼마의 돈이 필요합니까?

4. 다음 비례식에서 □안에 알맞은 수를 넣으세요.
① 8 : 5 = 20 : □
② 5 : □ = 25 : 30
③ 42 : 36 = □ : $\frac{1}{7}$
④ □ : 3 = 1 : 0.75

5. 다음 비를 가장 간단한 자연수의 비로 나타내시오.
① 8 : 12 = ② 0. 3 : 0. 7 =
③ 36 : 132 = ④ $\frac{1}{5}$: $\frac{1}{8}$ =

6. 다음 중 비례식이 옳은 것을 모두 찾아 쓰시오.
① 2 : 4 = 4 : 8 ② 5 : 7 = 10 : 13
③ 3 : 2 = 15 : 10 ④ 4 : 5 = 5 : 6
⑤ 10 : 8 = 4 : 5

7. 작년에는 공책 5권에 2000원이었는데, 올해에는 4권에 2000원입니다. 공책값은 작년에 비해 몇 % 올랐습니까?

8. 병주네 집에서는 쌀과 보리쌀을 5 : 1의 비로 섞어서 밥을 짓는다고 합니다. 쌀을 400g 넣으면, 보리쌀은 몇 g을 넣어야 하는지 알아보시오.

9. 태극기의 가로와 세로의 비는 3:2입니다. 오른쪽과 같은 태극기를 만들려면, 세로는 몇 cm로 해야 합니까?

10. 마라톤 대회에 참가한 선수는 200명입니다. 그 중에서 124명이 결승점까지 달렸습니다. 결승점까지 달린 선수는 참가한 선수의 몇 %입니까?

11. 영희와 순미는 같은 반 친구입니다. 오늘은 영희 부모님의 결혼기념일이자 순미 어머님의 생신이십니다. 두 친구는 축하 선물로 무엇이 좋을까 고민하다가 부모님이 좋아하시는 꽃을 사기로 결정했습니다. 영희는 A꽃집에서 엄마가 제일 좋아하시는 장미꽃 35송이를 6,000에 샀습니다. 순미는 B꽃집에서 장미꽃 50송이를 7,000원에 샀습니다. 누가 더 장미꽃을 싸게 샀을까요?

12. 대응표를 보고, □와 △의 관계를 말하여 보시오.

□	1	2	3	4	5
△	2	4	6	8	10

13. 바닷물 5L를 증발시켜 170g의 소금을 얻었습니다. 바닷물 12L를 증발시키면, 몇 g의 소금을 얻을 수 있습니까?

14. 5분 동안에 6km를 달리는 자동차가 있습니다. 같은 빠르기로 달릴 때, 150km를 가려면 몇 시간 몇 분 걸리겠습니까?

15. 지영이는 운동화를 한 켤레 사려고 하는데, 마음에 드는 똑같은 운동화가 시장과 백화점에 모두 있고, 각각의 정가와 할인율은 다음 표와 같습니다. 지영이는 어디에서 운동화를 더 싸게 살 수 있는지 알아보시오.

	정가	할인율(%)
시장	25000원	10%
백화점	35000원	30%

16. 원 ㉮와 원 ㉯가 그림과 같이 겹쳐 있습니다. 겹쳐진 부분의 넓이는 ㉮의 넓이의 $\frac{2}{3}$이고, ㉯의 넓이의 $\frac{1}{5}$입니다. 원 ㉮의 넓이가 27cm^2이라면, 원 ㉯의 넓이는 cm^2입니까?

17. 공장에 ㉮와 ㉯, 두 기계가 있습니다. 두 기계가 같은 시간에 만들어내는 장난감 수의 비는 6 : 5입니다. ㉮ 기계가 1시간에 장난감 360개를 만든다면, ㉮와 ㉯ 두 기계로 4950개의 장난감을 만드는데 걸리는 시간은 몇 시간 몇 분일까요?

<부록2> 비례추론검사지1

1. 다음 문제를 보고 답란에 알맞은 그림을 그리고 그렇게 생각한 이유를 적어 보시오.

문제	답	그렇게 생각한 이유
① ■■ ■■ 가 $\frac{1}{3}$이라면 1은?		
② □□□ 가 $\frac{3}{4}$이라면 1은?		
③ ●●●● ●●●● ●●●● 가 $1\frac{1}{2}$이라면 1은?		

2. 다음은 보고 추론하여 문제를 해결해 보시오.

(1) ★ 이 그려진 포장지가 있다. 포장지 4줄 - 포장지 3줄 = ★★★ 이라면 포장지 2줄 + 포장지 1줄 = ?

정답 수만큼 색칠하시오. ☆☆☆☆☆☆☆☆☆

<그렇게 생각한 이유>

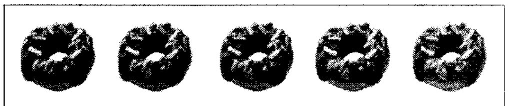
(2) ▲ 가 그려진 블럭이 있다. 7칸의 블럭 - 5칸의 블럭= ▲▲▲이라면 6칸의 블럭 - 2칸의 블록= ?

정답 수만큼 색칠하시오. △△△△△△△△△

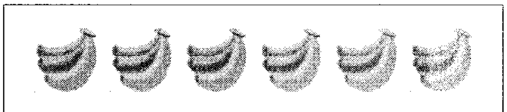
<그렇게 생각한 이유>

3. 다음의 문제를 해결하고, 그 이유를 적어보시오.

(1) 쿠키를 2명에게 **똑같이** 나누어 주시오.

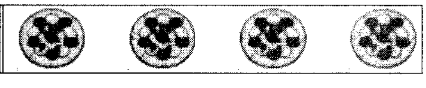


(2) 바나나를 4명에게 **똑같이** 나누어 주시오.

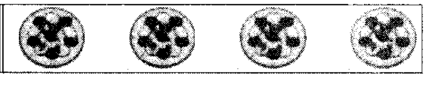


4. "4판의 피자를 3명에게 똑같이 나누어 주어라." 라는 문제에 대한 대답을 서로 다른 방법으로 **최대한 많이** 찾아보시오.

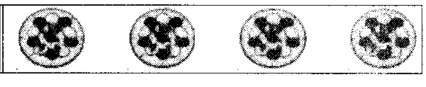
첫 번째 방법



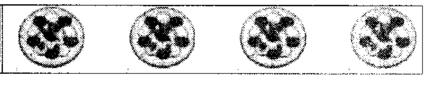
두 번째 방법



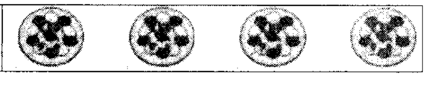
세 번째 방법



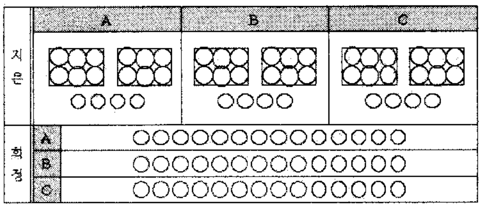
네 번째 방법



다섯 번째 방법



5. 3명의 학생에게 8묶음의 음료수를 나누어 주려고 한다. (1묶음에는 6캔의 음료수가 있다.) 다음 두 학생이 나누어 준 방법을 보고 더 간단한 방법을 고른 후, 그 이유를 설명하시오.



<더 간단한 방법을 사용한 사람>

<그렇게 생각한 이유>

<만약 나라면?>

6. 다음을 잘 읽고 타당한 것과 타당하지 못한 것으로 분류하여 번호를 적고, **타당하지 못한 것의 이유를** 적어 보시오.

타당한 것	타당하지 못한 것

1	만약 한 팀의 오케스트라 연주단이 1시간동안 운명 교향곡을 연주한다면 두 팀의 오케스트라 연주단은 같은 곡을 30분만에 연주할 수 있을까? (두 팀의 운명 교향곡 연주 수준은 똑같다.)
2	만약 내 차가 1통의 기름으로 100km를 갈 수 있다면 2통의 기름으로는 200km를 갈 수 있을까?
3	만약 트럭의 바퀴가 6개라면 똑같은 트럭 3대의 바퀴는 18개일까?
4	만약 한 소년이 잔디를 깎는데 3시간이 걸린다면 2명의 소년은 잔디를 깎는데 6시간 걸릴까? (모든 소년의 잔디 깎는 속도는 같다.)
5	만약 한 여성이 마트에 가는데 20분 걸린다면 2명의 여성는 10분만에 마트에 갈 수 있을까? (모든 여성의 걸음걸이 속도는 같다.)

<타당하지 못한 이유>