

# Phase-type 수리시간을 갖는 무기체계의 적정예비품수 결정

†윤 혁\* · 이상진\*

## The Optimal Spare Level of a Weapon System having Phase-type Repair Time

†Hyouk Yoon\* · Sangjin Lee\*

### ■ Abstract ■

The probability distribution of the repair process should be determined to choose the optimal spare level of a weapon system with a queueing model. Though most weapon systems have a multi-step repair process, previous studies use the exponential distribution for the multi-step repair process. But the PH distribution is more appropriate for this case. We utilize the PH distribution on a queueing model and solve it with MGM(Matrix Geometric Method). We derive the optimal spare level using the PH distribution and show the difference of results between the PH and exponential distribution.

Keywords : Optimal Spare Level, Queueing Model, PH distribution, MGM

## 1. 서 론

군이 전투장비를 운영함에 있어 적정 예비장비수를 확보하는 것은 매우 중요한 일이다. 왜냐하면

수리를 요하는 고장이 발생했을 때 입고된 고장장비를 예비장비로 대체함으로써 전력공백 발생을 방지할 수 있기 때문이다. 그러나 예비장비가 늘어나면 전력공백은 없어지나 관리부담과 운영유지비용이

논문접수일 : 2009년 06월 03일    논문수정일 : 2009년 10월 01일    논문게재확정일 : 2009년 10월 31일

\* 국방대학교 국방관리학과

† 교신저자

증가하게 되므로 적정 수준의 예비장비수를 결정할 필요가 있다.

적정 예비장비수를 결정하기 위해 대기행렬이론, 시뮬레이션, 선형계획법 등을 활용하고 있다[2, 5, 6]. 이 중에서 확률적 현상의 모형화가 가능하고 절차가 간단한 대기행렬이론이 적정 예비장비수를 결정하기 위한 모형으로 많이 쓰이고 있다. 본 연구는 대기행렬이론을 이용하여 모형을 구성하였다.

대기행렬이론에서는 먼저 실제 자료 분석을 통하여 장비의 고장률과 서비스율을 구하고 대기행렬모형을 구성한 후 각 상태들의 안정상태확률을 구하게 된다. 안정상태확률로부터 성과측정값을 구하여 일정기준을 만족하는 예비장비수를 적정 예비장비수로 결정하게 된다.

따라서 대기행렬모형이 현실을 제대로 반영하는가의 여부는 고장률과 서비스율을 추정하는 단계에서 결정된다. 기존의 대기행렬이론을 이용한 연구에서는 계산상의 편의성을 위해 고장간격과 서비스시간을 지수분포로 가정하여 모형에 적용하였다[2, 5]. 지수분포를 모형에 적용하기 위해서는 적합도를 검정해야 하는데 고장간격에 대해서만 검정하는 경우가 대부분이다[2]. 또한 서비스시간에 대한 지수분포의 적합도 검정을 실시한 논문도 있지만 적합도 검정에서 기각되더라도 계산상의 편리성을 위해 지수분포로 가정하여 모형을 구성하였다[5].

고장시간간격은 대체적으로 지수분포 가정이 적합한 것으로 나타나지만 여러 가지 단계로 이루어진 정비시간에 대한 분포는 단순 지수분포 추정이 현실을 제대로 반영할 수 없다.

여러 단계로 이루어진 정비절차를 살펴보면 다음과 같다. 운용부대의 정비 능력을 초과한 고장장비는 정비부대에 입고되어 수리를 받게 된다. 정비부대에 입고된 고장장비의 정비절차를 살펴보면 1) 최초검사 및 수리부속확보, 2) 실제수리, 3) 최종검사 및 출고로 구분된다. 이렇게 다단계로 구성된 정비시간의 확률분포를 정확하게 추정하고 있는 논문은 없다. 선행연구를 살펴보면 대부분 정비시간 전

체를 단순 지수분포로 가정하여 정비단계를 고려하지 않고 하나의 확률현상으로 묶어 추정하고 있다.

단계형 확률현상은 군의 정비절차에서 뿐만 아니라 우리주변에서 쉽게 발견할 수 있다. 예를 들어 환자가 병원진료를 받는 절차를 생각해 보자. 환자는 병원에 도착하여 접수를 하고 진료를 받기 위해 대기한다. 진료가 끝나면 수납창구에서 진료비를 지불하고 병원을 떠난다. 만약 이러한 다단계 진료과정을 확률모형으로 구성하는데 단순 지수분포를 적용한다면 상당히 왜곡된 결과를 초래할 것이다. 또한 어떤 상품의 제조공정을 생각해 볼 수 있다. 제조공정이 다단계로 이루어져 있는데 전 과정에 소요되는 시간의 확률분포를 지수분포로 가정한다면 현실을 제대로 반영하지 못할 것이다. 군의 예를 들면 포병 및 기갑 무기체계의 사격시간을 생각해 볼 수 있다. 무기체계의 사격은 사격지휘접수, 탄약장전, 사격의 다단계로 이루어진다. 이와 같은 단계형 확률과정은 지수분포로 설명할 수 없을 것이다.

이렇게 단계적으로 발생하는 확률과정에 적합한 확률분포로 단계형 분포(Phase-type distribution)가 있다. PH분포는 Neuts[14]에 의해 제안된 이후 현재까지 지속적으로 연구되고 있는 분포이다[10]. PH분포는 단계를 가지고 있는 확률현상을 잘 설명해 주는 분포이다. PH분포를 활용한 연구로 Phase 수명분포를 갖는 제품의 보증서비스에 대한 연구가 있다[1]. 이 연구에서는 장비의 상태를 최상, 중간, 최악, 고장으로 구분하여 장비의 수명을 PH분포로 가정한 후 이를 이용하여 보증서비스 정책을 결정하는 모형을 제시하였다. 또한 국방분야에서도 PH분포의 적용가능성이 언급되었는데 단계별로 이루어지는 전투모형에의 적용이 사례로 제시되었다[4].

PH분포를 갖는 확률변수를 포함한 확률현상은 대기행렬 모형으로 구성될 수 있으며 대부분 유사출생사멸과정(Quasi-Birth and Death)으로 표현될 수 있다. 이러한 유사출생사멸과정의 대기행렬 모형에서 안정상태확률을 구하는 해법은 여러 가지가 있으나 최근 Matrix Geometric Method(MGM)

의 적용에 대한 연구가 활발하게 이루어지고 있다 [9, 15]. MGM은 리틀의 법칙을 대기행렬시스템에 적용하여 안정상태확률을 구하는 방법으로 수식자체에서 확률적 현상을 관찰할 수 있는 방법론이다. 이에 관한 연구로 Haverkort[12]는 MGM과 Spectral Expansion 기법을 비교분석하였고 El-Rays[11]는 PH분포를 갖는 다양한 현상에 대한 모형을 제시하였다. Akar[8]는 M/G/1 형태의 마코프체인을 MGM으로 풀이하는 알고리즘을 개발하였다.

본 연구의 목적은 다음과 같다. 첫째, 정비부대의 적정 예비장비수를 결정하는데 PH분포를 적용하여 대기행렬모형을 구성함으로써 현실에 부합되는 적정 예비장비수를 구한다. 이 과정에서 지수분포 가정 시의 결과를 비교분석하여 지수분포 가정 시의 오류를 제시한다. 둘째, 이에 대한 풀이방법도 기존 연구에서 사용하지 않은 MGM을 사용하여 풀이과정을 단순화하였다.

## 2. 적용개념

### 2.1 육군 정비대충장비의 개념

정비대충장비(M/F : Maintenance Float)라 함은 정비지원시설에서 즉각적인 수리가 불가능하거나, 정비기간 동안 정비대상 장비를 장기간 운용치 못함으로써 임무수행에 지장을 초래하는 것을 방지하기 위하여 정비대치품목을 정비지원부대에서 저장토록 정수한 완성장비 또는 장비 구성품을 말한다[3]. 정비대충장비는 장비의 운용가능도에 미치는 영향이 크므로 적정량을 보유하여야 한다.

정비대충장비는 운영유지 대충장비와 순환정비 대충장비로 구분된다. 운영유지 대충장비는 고장장비에 대한 대충장비로서 임무수행상의 긴요도, 장비 인가량, 현 보유량 및 보급, 정비능력을 고려하여 선정한다. 고장장비와 대충장비는 1 : 1로 교환 불출하고 정비대충장비로 교환된 고장장비는 정비 후 대충장비로 확보된다. 순환정비 대충장비는 계획 순환정비시에 운영부대의 전투력 유지를 위하여 순

환정비대상 장비와 교환되는 대충장비이다.

### 2.2 육군 정비체계

군의 정비체계는 크게 부대정비, 야전정비, 창정비로 구분된다. 부대정비는 사용자 및 부대정비병에 의해 실시되며 손질, 주유, 조정 및 부대에 할당된 수리부속의 교체 등 제한적인 정비활동이 이루어진다. 야전정비는 야전정비부대에서 실시되며 통상 사용 불가능한 장비 및 수리부속품의 수리와 제한된 분해수리가 이루어진다. 창정비는 정비창에서 실시되며 고도의 전문기술요원에 의해 순환정비 및 재생작업을 실시한다.

부대정비단계에서는 정비활동이 매우 단순하기 때문에 정비시간에 대한 확률분포를 추정할 때 단계형으로 추정할 필요는 없다. 그러나 야전정비와 창정비에서는 고장장비에 대한 수리가 여러 단계로 이루어지기 때문에 이에 적합한 확률분포를 적용할 필요가 있다. 군의 야전정비부대에서 실시되는 정비절차는 <표 1>과 같다.

고장장비가 도착하게 되면 먼저 고장부위를 찾기 위한 최초검사가 실시된다. 최초검사에 의해 고장부위를 확인한 후 정비작업지시가 이루어지며 이에 따라 고장부위를 수리하기 위한 수리부속을 획득하게 된다. 이때 수리부속이 정비부대에 재고로 남아있다면 즉시 수리가 되겠지만 만약 없다면 상급부대 및 업체로부터 획득하는데 시간이 소요되어 장비는 불가동상태를 유지하게 될 수밖에 없

<표 1> 야전정비부대 정비절차

구분	단계	세부구성
1	최초검사 및 수리부속 획득	고장장비 도착
		최초검사
		정비작업지시
		수리부속 획득
2	실제정비	실제정비
3	최종검사 및 출고	최종검사
		서류완결 및 재고 저장

다. 수리부속이 확보되면 실제정비가 이루어지고 정비 후에는 최종검사와 성능시험 그리고 행정절차를 실시하게 된다. 이렇게 다단계로 이루어진 정비활동 시간의 분포를 하나로 묶어 추정하는 것은 현실을 올바르게 반영한 결과라고 볼 수 없다. 왜냐하면 각 단계의 고유한 분포의 특성이 사라지기 때문이다. 또한 잘못된 확률분포의 추정은 이를 활용하는 의사결정모델의 결과를 현실에 적합하지 않은 방향으로 이끌 수 있다. 이렇게 다단계로 이루어진 활동에 대한 확률분포를 추정할 때 각각의 단계별로 확률분포를 추정할 수 있지만 PH분포의 성질을 활용하면 좀 더 쉽게 구하고자 하는 확률현상의 결과를 도출할 수 있다.

### 2.3 PH분포

2.2절에서 설명된 정비부대에서 행해지는 단계별 정비활동은 PH분포로 표현할 수 있다. PH분포는 지수분포가 설명할 수 없는 단계형 확률현상을 표현할 수 있을 뿐만 아니라 지수분포와 마찬가지로 마코프성질을 그대로 적용할 수 있다. 연속시간 마코프과정에서 고객의 도착과정이 포아송과정이라도 서비스시간이 지수분포를 따르지 않으면 고객수과정은 마코프성질을 따른다고 볼 수 없다. 왜냐하면 마코프성질은 고개도착과정과 서비스시간의 무기억성(Memoryless)을 전제로 성립될 수 있기 때문이다. 마코프성질이 성립되지 않는 대기행렬모형은 일반적인 Kolmogorov 방정식을 사용하여 해를 구할 수 없다[7].

이러한 경우 서비스시간을 지수분포의 중합 또는 혼합형태로 표현하여 마코프성질을 그대로 이용할 수 있는데 이 때 사용할 수 있는 것이 PH분포이다. 서론에서 설명한 바와 같이 고장장비의 수리는 여러 단계를 거치므로 서비스 시간이 구분되어 있다고 볼 수 있다. 이러한 경우 각 단계별 서비스 시간이 다음 단계의 서비스 시간에 영향을 미치게 되므로 지수분포가 아닌 PH분포를 이용하여 모형을 구성하는 것이 타당하다고 하겠다.

단계형 확률변수는 하나의 흡수상태와 초기상태 확률을 갖는 연속시간 마코프체인이 있을 때 출발해서 흡수될 때 까지의 시간으로 정의할 수 있다 [13]. 단계형 확률변수의 마코프과정상의 상태는  $\{0, 1, \dots, m\}$ 으로 표현할 수 있다. 여기서 '0'은 흡수상태를 나타내고 1~m까지는 흡수될 때까지의 일시상태를 나타낸다. 예를 들어 서비스가 2단계로 되어 있다면 1단계의 상태는 '1'이 되고 2단계의 상태는 '2'가 된다. 서비스가 끝난 상태는 '0'이 되는 것이다. 초기확률벡터는  $(\tau_0, \tau)$ 로 표현되는데 여기서  $\tau$ 는 크기 n의 열벡터로 초기확률을 의미하며  $\tau_0$ 는 흡수상태에 있을 확률이다. 2단계로 구성된 서비스시간을 예로 들면 고객이 도착했을 때 반드시 1단계 서비스를 받고 2단계로 진행되므로  $\tau$ 는 [1, 0]이 된다.

또한 전이율행렬(Infinitesimal Generator) Q는 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

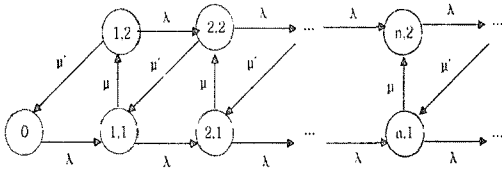
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & T \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 T는  $m \times m$  행렬로 일시상태간의 전이율행렬이고 t는 크기 m의 열벡터로 각 일시상태에서 흡수상태로의 전이율행렬이다. 전이율행렬의 성질은 Latouche(1999)를 참조할 수 있다.

$P_{ij}(x)$ 를 시점 '0'에서 j상태에 있다가 시점 'x'에 j상태에 있을 확률로 정의하면 Matrix exponential 정의에 의해  $P(x) = \exp(Qx)$ 로 계산할 수 있는데 식 (2)와 같다.

$$P(x) = \exp(Qx) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 - \exp(Tx) & \exp(Tx) \end{bmatrix} \quad (2)$$

PH분포를 이용하여 고객도착은 지수분포를 따르고 서비스 시간은 PH분포를 따르는 시스템을 모형화 할 수 있다. 서비스 시간이 2단계로 이루어져 있다고 가정한다면 <그림 1>과 같은 상태전이도표를 갖는 M/PH/1 대기행렬 모형이 될 것이다.



<그림 1> M/PH/1 상태전이도표

상태공간은  $S = \{n, m \mid n: \text{고객수}, m: \text{서비스단계}\}$ 로 정의된다. 즉 1명의 고객이 도착하여 서비스 단계 1에 있으면 상태  $S = \{1, 1\}$ 이 되는 것이다. 상태  $\{0\}$ 은 한명의 고객도 도착하지 않은 상태를 의미한다. 여기서 고객수와 서비스 단계를 구분하기 위해 고객수는 level로 서비스단계는 phase로 분류할 수 있다[13]. 위 모형은 고객 도착은 도착률  $\lambda$ 로 도착하고 1단계 평균서비스율은  $\mu$ 를, 2단계 서비스율은  $\mu'$ 를 갖는 모형이다.

<그림 1>의 상태전이도표에 대한 전이율행렬 Q는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q = \begin{matrix} & 0 & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) & (3,1) & (3,2) & \dots \\ \begin{matrix} 0 \\ (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \\ (3,1) \\ (3,2) \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} -\lambda & \lambda & & & & & & & \dots \\ & q_1^* & \mu & \lambda & & & & & \dots \\ u' & & q_2^* & \lambda & & & & & \dots \\ & & & q_1^* & \mu & \lambda & & & \dots \\ & & u' & & q_2^* & \lambda & & & \dots \\ & & & & & q_1^* & \mu & & \dots \\ & & & & u' & & q_2^* & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} \end{matrix} \quad (3)$$

여기서  $q_1^* = -\lambda - \mu$  이고,  $q_2^* = -\lambda - u'$ 이다. Q를 달리 표현하면 식 (4)와 같다.

$$Q = \begin{pmatrix} B_1 & B_0 & 0 & 0 & \dots \\ B_2 & A_1 & A_0 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & \dots \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4)$$

식 (4)에서 보는 바와 같이 Q의 각 원소는 scalar가 아닌 matrix 형태이고 또한 전이가 인접상태

로만 이루어지고 있음을 볼 수 있다. 이러한 확률과정을 QBD(Quasi-Birth and Death Process)라고 한다. QBD의 안정상태확률을 구하는 방법 중의 하나가 MGM이다(Neuts(1981) 참조).

### 3. 적정 예비품수 결정 모형

#### 3.1 가정 사항

모형구성에 필요한 가정 사항은 다음과 같다.

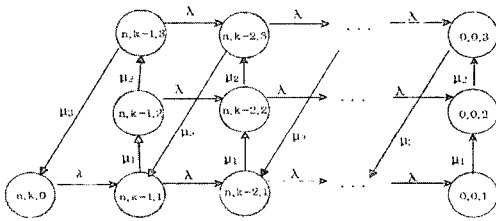
- 1) 장비의 고장은 포아송 도착과정으로 가정하고 도착률은  $\lambda$ 이다. 고장장비가 발생하여 가동장비의 수가 변하면 고장률이 달라질 수 있다. 그러나 본 연구에서는 정비지원대수가 대량인 야전 정비부대의 정비절차를 모형화 하였으므로  $\lambda$ 가 일정한 것으로 가정하였다.
- 2) 고장장비는 즉시 예비품으로 교체된다.
- 3) 서비스를 실시하는 서버의 개수는 1개이다. 야전정비부대는 검사팀, 동력팀, 전자팀, 기관팀 등 무기체계 구성품의 특성별로 구성되어 있다. 따라서 각 팀별로 특정 구성품을 정비하므로 1개의 서버를 가정하였다.
- 4) 고장장비의 수리과정은 다음의 3단계로 구성된다. 1) 최초검사 및 수리부속 확보 단계, 2) 실제 정비단계, 3) 정비 후 최종검사 및 출고 단계로 구분된다.
- 5) 각 단계의 소요시간은 지수분포로 가정한다.
- 6) 수리된 장비는 예비품으로 정비소에 재고로 확보된다.

PH분포를 적용하기 위해서 단계를 분류하는 과정은 모형의 적합성을 판단하는 중요한 요소가 된다. 단계를 분류하는데 필요한 전제조건은 각 단계에서 실시되는 업무내용이 중첩되지 않고 명확히 구분되어야 한다는 것이다. 각 단계별로 순차적으로 진행되는 3단계 수리과정은 1단계 종료 후 2단계로 이동하고 2단계 종료 후 3단계로 이동하여야 한다. 만약 수리과정의 각 단계에서 실시되는 업무

내용이 중첩된다면 확률모형의 각 상태(State)에 머무는 지체시간을 정의할 수 없으므로 안정상태 확률을 구할 수 없게 된다. 본 연구에서 가정한 3 단계는 상호 중첩되지 않는 업무들이다. 1단계인 최초검사 및 수리부속 확보가 종료되어야 2단계인 실제정비로 진행되며 실제정비가 끝나야 최종검사 및 출고가 이루어지기 때문이다. 이를 통해 볼 때 본 연구의 3단계 분류는 적절하다고 할 수 있다.

3.2 모형구성

적정 예비장비수를 결정하기 위해 구성한 대기행렬모형의 상태전이도표는 <그림 2>와 같다.



<그림 2> 가동장비 상태전이도표

상태공간은 다음과 같이 정의된다.

$$S = \{(n, k, m) \mid n : \text{운영장비수}, k : \text{예비장비수}, m : \text{정비단계}\}$$

위 상태 S를 level과 phase로 나눌 수 있는데 level은 (n, k)이고 phase는 m이다. 왜냐하면 각각의 level (n, k)마다 m개의 phase가 있으므로 이와 같이 분류할 수 있다. 예를 들면 상태 (n, k, 0)은 level (0)이며 상태 (n, k-1, 1), (n, k-1, 2), (n, k-1, 3)은 level(1)로 분류할 수 있다. level과 phase는 3.3절 안정상태를 구하는 과정에서 이용된다.

(n, k, 0) 상태는 입고된 고장장비가 하나도 없는 상태로 n개의 운영장비가 정상적으로 가동하고 있어 k개의 예비장비도 고장장비와 대체되지 않았다. 고장장비가 하나 도착하면 즉시 예비장비로 대체되므로 운영장비의 숫자는 n개로 동일하며 예비장

비수만 k-1개로 변한다. 또한 고장장비에 대해 수리가 시작되는데 가정에서 수리가 3단계로 이루어진다고 하였으므로 수리과정의 1단계를 실시하게 되어 상태가 (n, k-1, 1)로 전이된다. 수리 2단계와 3단계를 마치면 수리완료된 장비가 예비장비로 전환되므로 (n, k, 0)상태로 복귀한다.

만약 예비장비수보다 수리를 대기하고 있는 장비수가 많아지면 더 이상 고장장비를 대체할 예비장비가 없기 때문에 이 때 부터는 운용장비수가 작아져 (n-1, 0, m)의 상태로 전환된다. 위 모형에 대한 전이율행렬 Q를 나타내면 식 (5)와 같다.

		0	1	2	3	1	2	3	...	1	2	3
(n,k,0)	0	$-\lambda$	$\lambda$						...			
(n,k-1,1)	1		$q_1^* \mu_1$		$\lambda$				...			
(n,k-1,2)	2			$q_2^* \mu_2$		$\lambda$			...			
(n,k-1,3)	3				$q_3^* \mu_3$		$\lambda$		...			
Q = (n,k-2,1)	1					$q_1^* \mu_1$			...			
(n,k-2,2)	2						$q_2^* \mu_2$		...			
(n,k-2,3)	3							$q_3^* \mu_3$	...			
⋮												
(0,0,1)	1								...	$q_1^* \mu_1$		
(0,0,2)	2								...		$q_2^* \mu_2$	
(0,0,3)	3								...			$q_3^* \mu_3$

Q의 원소 중 동일한 행렬집합을 다시 묶으면 식 (4)와 동일한 형태가 됨을 알 수 있다. 식 (4)에서와 같이 level(2)의 원소부터 규칙적인 형태를 하고 있어 이를 QBD로 볼 수 있고 각 state에 대한 안정상태확률을 MGM으로 구할 수 있겠다.

3.3 안정상태확률

3.2절에서 형성한 대기행렬모형에 대한 각 상태의 안정상태확률을 구하는 해법은 MGM을 사용하였다[13]. 본 연구에서 구성한 모형은 수리시간 분포가 지수분포의 중합인 Erlang 분포를 보이고 있어 MGM을 사용하지 않고 일반적인 Balance Equation으로 안정상태확률을 구할 수도 있다. 그러나 일반분포를

모형화 했을 때의 계산에도 본 모형을 적용할 수 있도록 MGM을 사용하였다.

식 (5)의 전이율 행렬 Q를 보면 level(2)부터 전이율이 동일하다는 것을 관찰할 수 있다. Taboo 확률과정이론에 의해 level(0)과 level(1)을 taboo area로 설정한다면 행렬 Q를 두 부분으로 나눌 수 있다.

Taboo 확률과정이론은 대개행렬모형에서 상태를 Taboo 지역과 Taboo외 지역으로 구분하여 이 두 지역간의 전이관계를 이용, 안정상태확률을 구하는 이론이다. Taboo 확률과정으로 안정상태확률을 구하는 절차 및 이에 대한 증명은 Latouche[13]을 참조할 수 있다.

Taboo 확률과정이론을 통하여 다음 식 (6)과 같은 안정상태확률간의 관계를 유도할 수 있다. 여기서 R은 평균체류시간으로 해석된다.

$$\pi_{n+1} = \pi_1 R^n, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

식 (6)에서 안정상태확률이 행렬기하분포(Matrix Geometric Distribution)를 이루는 것을 알 수 있다.

Q 원소들의 규칙성을 이용하여 R을 구하기 위해 다음과 같이 두 개의 행렬 G와 U를 정의한다.

$$\begin{aligned} G_{ij} &= P[\tau < \infty \text{ and } X(\tau) \\ &= (n-1, j) | X(0) = (n, i)] \end{aligned} \quad (7)$$

G의 의미는 한 단계 낮은 level로 전이할 확률이다.

U를 현재 수준에서 그대로 머무를 전이율 행렬이라고 정의하면  $A_0, A_1, G$ 를 이용하여 다음 식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = A_1 + A_0 G \quad (8)$$

식 (8)을 해석해 보면 현 수준에 머무를 확률에 대한 전이율은  $A_1$ 의 전이율로 현 상태에 머물 확률에  $A_0$ 의 전이율로 한 단계 위 level로 전이했다가 다시 한 단계 아래로 전이하여 제자리로 복귀할 확률을 더한 값이 된다는 의미이다.

U를 이용하여 다시 G를 표현하면 다음과 같다.

$$G = (-U)^{-1} A_2 \quad (9)$$

또한 R이 한 단계 위로 전이하여 체류하는 평균 시간이므로 다음과 같이 표현가능하다.

$$R = A_0 (-U)^{-1} \quad (10)$$

R값을 구하면 식 (6)에 의해  $\pi_2$  이후 확률을 구할 수 있다. R값은 R, U, G의 관계식에 의해 구할 수 있는데 본 연구에서는 Linear Progression Algorithm을 적용하여 G값을 구하고 U와 R값을 순차적으로 구하였다[13]. G값을 구하는 Linear Progression Algorithm은 다음과 같다.

$$G_1 = (-A_1)^{-1} A_2$$

repeat

$$U = A_1 + A_0 G_1$$

$$G_2 = (-U)^{-1} A_2$$

until  $|G_2 - G_1| \leq \epsilon$

완전해를 얻기 위해서는  $\pi_0$ 와  $\pi_1$ 을 구해야 한다. 이것은  $\pi Q = 0$ 과  $\pi 1 = 1$ 을 이용하면 된다. 이것을 이용하여 얻을 수 있는 관계식은 다음과 같다.

$$\pi_0 B_1 + \pi_1 B_2 = 0$$

$$\pi_0 B_0 + \pi_1 (A_1 + R A_2) = 0$$

$$\pi_0 1 + \pi_1 (I - R)^{-1} 1 = 1$$

### 3.4. 적정 예비장비수 선정 절차

지금까지 설명한 Phase-type 수리시간을 고려한 적정예비장비수 선정절차를 정리하면 다음과 같다.

- (1) 수리단계를 구분하여 PH분포에 적용할 수리시간 분포를 결정한다.
- (2) 상태공간을 정의하고 모형을 구성한다.

- (3) 전이를 행렬을 구성한다.
- (4) 안정상태확률을 구한다.
  - 가. linear algorithm으로 G값을 구한다.
  - 나. G값을 이용하여 U, R값을 구한다.
  - 다.  $\pi_0, \pi_1$  값을 구한다.
  - 라.  $\pi_1$ 를 이용하여 나머지  $\pi_n$  값을 구한다.
- (5) 안정상태확률로부터 성과측정값을 구한다.
- (6) 성과측정값 기준을 만족하는 예비장비수를 구할 때 까지 예비장비수를 늘려가면서(2)~(5)단계를 반복한다.

<표 3> 수리시간자료 분석결과

구분	PH분포 가정			지수분포 가정
	최초검사	실제수리	최종검사	수리시간 전체
C-S 통계량	5.33	7.58	2.87	36.7
p 값	0.022	0.057	0.092	< 0.005
서비스율 (회/일)	0.514	0.305	0.494	0.138

## 4. 모형 적용 및 결과분석

### 4.1 자료 수집 및 분석

본 연구에서는 육군의 ○○항공기 정비대대의 ○○항공기 엔진에 대한 적정 정비대충장비수를 구하는 문제에 PH분포와 MGM을 적용하였다. 항공기는 고가의 장비이기 때문에 완성장비를 정비대충장비로 선정하지 않고 주요 구성품을 정비대충장비로 선정하고 있다. 본 연구에서는 항공기 구성품 중 엔진의 적정 정비대충장비수를 구하는데 모형을 적용한다. 항공기 구성품 중 엔진을 선택한 이유는 항공기 구성품중에서 가장 핵심적인 역할을 하며 엔진 자체의 가동률은 항공기의 가동률과 직접 연계가 되기 때문이다. ○○항공기 정비대대는 총 103대의 ○○헬기에 대해 정비지원을 하고 있다. 이 정비대대는 전시를 대비하여 예비엔진을 ○○대 보유하고 있으나 운용유지를 위한 예비엔진은 없는 실정이다. <표 2>는 엔진 고장자료 분석결과이다. 고장자료는 2007년 한 해 동안 엔진 고장으로 입고된 항공기에 대한 자료와 예방정비간 엔진정비를 실시한 실적을 이용하였다.

고장간격에 대한 지수분포가정을 검정하기 위하

여 Chi-square 검정을 SPSS 12.0에서 실시하였다. Chi-square 검정통계량은 3.47이고 이에 대한 p값이 0.140이다. 유의수준 0.1에서 귀무가설이 채택되므로 고장간격에 대한 지수분포 가정을 충족한다. 고장자료 분석결과 평균고장률( $\lambda$ )은 0.132(회/일)이다. <표 3>은 수리시간자료 분석결과이다.

수리시간에 대한 자료분석은 PH분포와 지수분포 가정으로 나누어 실시하였다. 먼저 PH분포 가정에서는 수리시간을 3단계로 나누어 각각을 지수분포로 가정하여 적합도를 검정하였고 지수분포 가정에서는 수리시간 전체에 대한 지수분포 적합도를 검정하였다. 적합도 검정결과 PH분포 가정하의 각 단계의 분포는 유의수준 0.01에서 모두 귀무가설을 채택하여 지수분포 가정을 충족하는 것으로 나타났다. 그러나 수리시간 전체에 대한 지수분포 적합도 검정결과는 p값이 0.005보다 작은 것으로 나타나 지수분포 가정을 충족하지 못하였다.

평균서비스율은 최초검사 및 수리부속 획득단계, 실제수리단계, 최종검사 및 출고 단계가 각각 0.514, 0.305, 0.494로 나타났고 전체 수리시간에 대한 평균서비스율은 0.138로 나타났다.

### 4.2 모형 성과측정값

대기행렬 모형에서 구할 수 있는 성과측정값은 여러 가지가 있다. 본 연구에서는 장비가 100% 작동할 확률(Pr[W]), 정비대충장비 부족 확률(Pr[S]), 평균 가동장비수(E[N]), 평균 불가동장비수(E[F]),

<표 2> 고장자료 분석결과 (2007년)

구분	Chi-square 통계량	p-value	평균고장률
결과	3.47	0.486	0.132



운용가용도( $A_o$ )를 측정하였다. 각 측정값의 계산식은 다음과 같다.

1) 장비가 100% 가동할 확률

$$\Pr[W] = \sum_{k=0}^j \sum_{m=1}^3 \pi_{T,k,m}$$

$T$ : 보유장비수,  $j$ : 정비대충장비수

2) 정비대충장비 부족 확률

$$\Pr[S] = 1 - \sum_{n=0}^i \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^3 \pi_{n,k,m}$$

$i$ : 가동장비수,  $j$ : 정비대충장비수

3) 평균 가동장비수

$$E[M] = \sum_{n=0}^i \sum_{k=0}^j \sum_{m=1}^3 (i \times \pi_{n,k,m})$$

4) 평균 불가동장비수

$$E[F] = T - \sum_{n=0}^i \sum_{k=0}^j \sum_{m=1}^3 (i \times \pi_{n,k,m})$$

5) 운용가용도

$$A_o = \frac{E[M]}{T}$$

#### 4.3 안정상태확률 및 성과측정 결과

모형에 대한 안정상태확률은 행렬계산이 용이한 MATLAB 7.0을 이용하여 계산하였다. 정비대충장비수를 0대에서 5대까지 증가시키면서 3.3절의 알고리즘을 통해 각각의 안정상태확률을 구하였다. <표 4>는 정비대충장비가 0대 일 때의 예를 보여주고 있는데 정비단계별 안정상태확률과 이를 합한 가동장비별 안정상태확률을 확인할 수 있다. 예를 들어 예비엔진이 0대일 때 운용엔진 중 1대가 고장이 나서 정비대대에서 수리 후 최종검사를 받고 있는 상태( $S = (102, 0, 3)$ )에 있을 확률은 0.0692이다.

#### 4.4 적정 정비대충장비수 선정 결과

<표 5>는 정비대충장비수에 따른 각 성과측정값을 보여주고 있다. 지수분포와의 비교를 위하여

<표 4> 안정상태확률(예비장비수: 0개)

상태(n, k)	안정상태 확률			합계
103, 0		0.2356		0.2356
	n, k, 1	n, k, 2	n, k, 3	
102, 0	0.0600	0.1019	0.0629	0.2248
101, 0	0.0226	0.0824	0.0677	0.1727
100, 0	0.0124	0.0567	0.0531	0.1222
99, 0	0.0080	0.0382	0.0378	0.0840
98, 0	0.0054	0.0257	0.0260	0.0571
97, 0	0.0037	0.0174	0.0177	0.0388
96, 0	0.0025	0.0118	0.0120	0.0263
95, 0	0.0017	0.0079	0.0081	0.0177
94, 0	0.0011	0.0054	0.0055	0.0121
93, 0	0.0008	0.0037	0.0037	0.0082
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0, 0	0	0	0	0
	합계			1

〈표 5〉 정비대충장비수량별 성과측정값 비교

구분		예비장비수					
M/F 수		0대	1대	2대	3대	4대	5대
Pr[W]	PH 분포	0.2356	0.4603	0.6331	0.7553	0.8393	0.8964
	지수분포	0.2521	0.4541	0.6209	0.6753	0.7283	0.7783
Pr[S]	PH 분포	1.0000	0.7644	0.5396	0.3669	0.2447	0.1607
	지수분포	1.0000	0.7479	0.5459	0.3791	0.3247	0.2717
E[N]	PH 분포	99.87	101.39	101.93	102.30	102.54	102.70
	지수분포	96.55	98.88	101.02	101.04	101.72	101.99
E[F]	PH 분포	3.1292	1.6058	1.0668	0.7005	0.4565	0.2964
	지수분포	6.4500	5.7300	1.9751	1.5996	1.2786	1.0150
Ao	PH 분포	0.9700	0.9840	0.9901	0.9932	0.9961	0.9974
	지수분포	0.9371	0.9600	0.9745	0.9843	0.9887	0.9903

지수분포가정하의 각 성과측정값도 구하였다. <표 5>에서 보는 바와 같이 PH분포 가정 시와 지수분포 가정 시의 성과측정값은 차이가 있음을 확인할 수 있다.

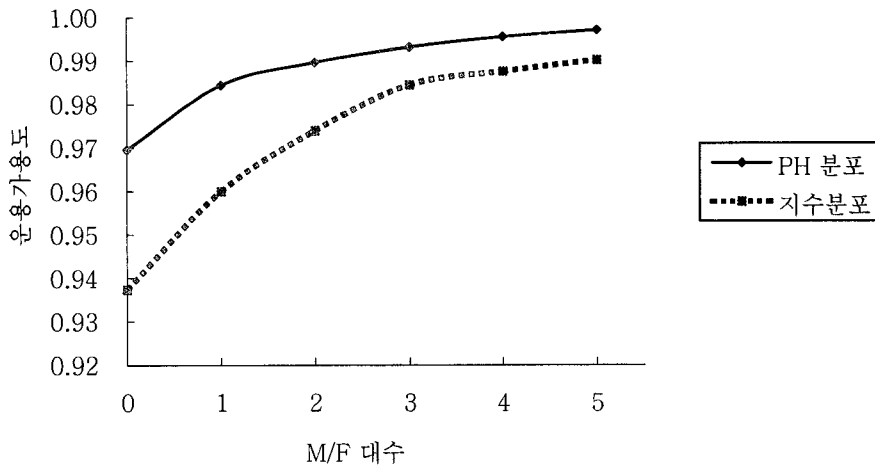
본 연구에서는 엔진의 운용가용도를 적정 정비대충장비수를 결정하기 위한 성과측정값으로 활용하였다. 완성장비를 정비대충장비로 운용하는 경우에도 적정수를 결정하는 기준으로 통상 완성장비의 목표 운용가용도를 사용한다. 그러므로 구성품의 운용가용도는 완성장비의 운용가용도에 직접적인 영향을 미치므로 이를 기준으로 하는 것이 적절하다고 할 수 있다. 또한 완성장비가 아니므로 구성품의 운용가용도는 상당히 높은 수준을 그 목표로 설정해야 완성장비의 운용가용도 목표를 충족시킬 수 있을 것이다.

대충장비가 없는 현재 상태에서는 PH분포 가정 시 운용가용도는 0.9700이다. 정비대충장비수를 늘리면 운용가용도는 계속 증가함을 알 수 있다. 운용가용도 목표치를 0.99로 선정했을 경우 적정 정비대충장비는 2대이다.

전체 수리시간을 지수분포로 가정했을 경우의 운용가용도는 정비대충장비가 없는 현재의 경우 0.9371로서 PH분포 가정 시 보다 낮은 확률을 나타내고 있다. 또한 운용가용도 목표치 0.99를 만족하기 위해서는 5대의 예비엔진이 필요함을 알 수 있다. 단계별 수리시간을 고려한 PH분포 가정 시의 결과와 차이가 남을 알 수 있다. <표 6>은 지수분포에 대한 PH분포의 차이를 각 성과측정값별 백분율로 보여주고 있다. 엔진은 고가의 장비이므

〈표 6〉 지수분포에 대한 PH분포의 차이 비교(백분율(%))

구분		예비장비수					
M/F 수		0대	1대	2대	3대	4대	5대
Pr[W]		-7.02	1.36	1.93	10.60	13.23	13.18
Pr[S]		0.00	2.16	-1.16	-3.33	-32.72	-69.09
E[N]		3.33	4.07	0.89	0.88	0.80	0.70
E[F]		-106.12	-256.83	-85.14	-128.34	-180.08	-240.91
Ao		3.33	2.48	1.58	0.88	0.80	0.70



〈그림 3〉 M/F 대수별 운용가용도

로 근소한 차이가 의사결정과 예산운용에 있어 큰 차이를 가져올 수 있다.

〈그림 3〉은 정비대충장비대수별 PH분포와 지수분포 가정 시의 운용가용도 변화를 보여주고 있다. 〈그림 3〉을 통해 PH분포 가정 시와 지수분포 가정 시의 운용가용도가 차이가 나고 있음을 볼 수 있다. 특히 정비대충장비가 작을 때 차이가 많이 나고 있는데 정비대충장비가 0대일 때와 1대일 때의 엔진 운용가용도 차이는 각각 0.0383, 0.024로 지수분포 가정시가 낮게 나타났다.

본 연구에서 PH분포를 적용한 이유는 군의 정비과정을 좀 더 현실적으로 반영하기 위함이다. 따라서 지수분포 보다는 PH분포를 적용하여 선정할 적정 정비대충장비수가 현실에 적합한 결과라 할 수 있다. 〈그림 3〉에서 볼 수 있듯이 정비과정 전체를 지수분포로 가정하면 엔진 운용가용도가 PH분포 가정 시 보다 낮게 나타난다. 따라서 실제로 필요한 정비대충장비수보다 많은 수를 선정하게 된다. 그러므로 적정 정비대충장비수를 선정할 때는 PH분포를 사용하여야 한다.

## 5. 결 론

본 연구는 Phase-type 수리시간을 갖는 장비의

적정 예비장비수를 결정하는 절차에 대해 연구하였다. 본 연구의 의의는 첫째, 단계적으로 이루어지는 수리과정을 PH분포를 이용하여 모형화 함으로써 더욱 현실적으로 수리과정을 모형화 할 수 있었다. 이 과정에서 지수분포 가정시와의 차이를 설명함으로써 지수분포 가정시 발생할 수 있는 오류를 설명하였다. 둘째, 대기행렬모형의 안정상태확률을 구하는 과정에서 MGM을 사용함으로써 복잡한 모형을 쉽게 풀 수 있었다. 본 연구에서 안정상태확률을 계산하기 위해 도출한 전이율행렬의 크기는  $307 \times 307$ 로서 일반적인 해법으로는 풀기가 쉽지 않은 대규모의 행렬이었다. 그러나 행렬기하분포를 이용한 MGM을 사용함으로써 쉽게 풀이할 수 있었다.

연구의 한계점으로는 수리과정의 각 단계별 소요시간에 대한 분포를 지수분포로 가정하여 일반분포로의 확장이 미흡하였다. 따라서 향후에는 수리과정의 각 단계별 소요시간이 일반분포일 때를 모형화 하고 풀이하는 연구가 필요할 것이다.

또한 서비스율이 일정한 것이 아니라 시간에 따라 가변적인 경우를 고려하여 좀 더 현실적인 모형을 구성할 필요가 있겠다. 가변 서비스율을 따르는 대기행렬모형에 대한 기존연구를 바탕으로 이를 예비장비수 선정 모형에 적용한다면 정비현실에

적합한 결과를 도출할 수 있을 것이다. 본 연구에서 제시한 절차는 군이나 민간에서 적정 예비장비 수 결정문제에 적극 활용할 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌

- [1] 김호균, B. Madhu Rao, 배창욱, 김승철, "PH 수명분포를 갖는 보증제품의 수리-교체 전략", 『Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers』, Vol.31, No.4(2005), pp.341-348.
- [2] 손휘민, 윤봉규, "운용가용도를 고려한 최적 여유장비 수준연구", 『로지스틱스 연구』, 제16권, 제2호(2008), pp.105-120.
- [3] 육군본부, 『야전교범 42-2 야전정비근무』, 육군본부, 2006.
- [4] 윤봉규, "단계형 확률과정과 국방분야 응용 사례", 『국방과학기술』, 제1권, 제1호(2008), pp.13-25.
- [5] 윤봉규, 차건호, "Capacity Pooling을 활용한 육군항공 통신장비의 적정예비품수 결정에 관한 연구", 『로지스틱스 연구』, 제16권, 제1호(2008), pp.97-113.
- [6] 이상진, 김성원, "한국형 헬기의 목표 운용가용도 달성을 위한 정비대충장비 최적 재고수준 결정", 『경영과학』, 제24권, 제2호(2007), pp.81-93.
- [7] 이호우, 『대기행렬이론』, 3판, 시그마프레스, 2006.
- [8] Akar, N., Oguz, N.C., Sohraby, K., "Matrix-geometric solution of M/G/1-type markov chains : a unifying generalized state-space approach," *IEEE Journal*, Vol.16, Issue 5 (1998), pp.626-639.
- [9] Asmussen S., "Matrix-analytic models and their analysis," *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol.27(2000), pp.193-226.
- [10] Breuer, L., Baum, D., *An Introduction to Queueing Theory and Matrix Analytic Method*, Springer, 2006
- [11] El-Rayes, Amani., Kwiatkowska, M., Norman, G., "Solving infinite stochastic process algebra models through matrix-analytic methods," *7th Process and Performance Modelling Workshop(1999)*, pp.41-62.
- [12] Haverkort, B.R., "Steady-state analysis of infinite stochastic Petri nets : comparing the spectral expansion and the matrix-analytic method, *Petri nets and Performance Models (1997)*, *Proceedings of the Seventh International Workshop*, pp.36-45.
- [13] Latouche, G., Ramaswami, V., *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, SIAM, Philadelphia, 1999.
- [14] Neuts, F. Marcel, *Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [15] Neuts, F. Marcel, *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1989.