

논문 2009-46IE-4-7

## 구조적 불확실성을 갖는 비선형 시스템의 안정화 역최적제어

( Stabilization Inverse Optimal Control of Nonlinear Systems with Structural Uncertainty )

조도현\*, 이철\*\*, 이종용\*\*\*

(Do-Hyeoun Cho, Chul Lee, and Jong-Yong Lee)

## 요약

본 논문에서는 구조적 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 안정화 역 최적 제어를 고려하였다. 제어 Lyapunov 함수를 기초로, 대역적 접근적 안정도를 제안한다. 이로부터 역 최적 제어를 위한 최소의 제약조건을 유도한다. 이 결과를 이용하여 불확실성을 갖는 비선형시스템의 역 최적 제어기에 적용하였으며, 기존의 결과를 확장한 것이다. 본 연구에서 고려된 비선형 시스템은 가장 많이 표현되며, 제안된 방법의 효율성을 검증하기 위하여 시뮬레이션을 하였다.

## Abstract

In this paper, stabilization inverse optimal control for nonlinear systems with structural uncertainty is considered. Based on the control Lyapunov function, a theorem for the globally asymptotic stability is presented. From this a less conservative condition for the inverse optimal control is derived. The result is used to design an inverse optimal controller for a class of nonlinear systems, that improves and extends the existing results. The class of nonlinear system considered is also enlarger. The simulation results show the effectiveness of the method.

**Keywords :** Nonlinear Control, Control Lyapunov Function, Structural Uncertainty, Stability

## I. 서론

초기의 비선형 제어 이론은 대부분 안정도, 최적화 및 불확실성 문제에 대하여 Kokotovic 과 Arcak<sup>[1]</sup>에서 적극적으로 다루었다. 여기서 중심으로 논의 된 결과는 음의 궤환과 제어에 의존하는 제어 리아프노프 함수 (CLF : control Lyapunov function)의 개념이다. CLF는 Artstein<sup>[2]</sup> and Sontag<sup>[3]</sup>에 의해 도입되었으며, 안정도

이론에 중요한 역할을 한다.

결과적으로 많은 연구자들이 CLF 효과를 다루었으며 중요한 연구 결과를 만들었다<sup>[4-11]</sup>.

최적 제어는 안정도 여유와 강건성을 보증하는 설계 도구이기 때문에, 최적 안정화는 많은 연구자들의 주제가 되었다. Hamilton-Jacobi-Bellman 방정식을 쉽게 풀기 위한 직접적인 방법은 없다. 그러나 최적 결과를 달성하기 위한 강건성은 함수  $l(x) \geq 0$ 과  $R(x) \geq 0$ 의 선택과는 무관하다. 최적 안정화의 역(inverse) 문제를 풀기위한 설계 방법의 개발이 Freeman and Kokotovic<sup>[4, 11]</sup>에 의해 제안되었다.

본 논문에서는 구조적 불확실성을 가지는 비선형 시스템의 역 최적 제어를 고려한다. 본 연구에서는 CLF를 이용한 대역적 접근 안정도를 위한 정리를 유도한다. 이 증명을 통하여 역 최적 제어를 유도할 수 있는 최소 보존 조건(less conservative condition)이 유도된다. 제안된 기법의 효과를 모의실험을 통하여 검증한다.

\* 정회원, 인하공업대학 디지털전자과  
(Dept. of Digital Electronics, Inha Tech. Col.)

\*\* 정회원, 광운대학교 대학원  
(Graduate School, Kwang-woon University)

\*\*\* 정회원, 광운대학교 교양학부  
(Div. of General Education,  
Kwang-woon University)

※ 이 논문은 2008년도 광운대학교 교내 학술연구비 지원에 의해 연구되었음.

접수일자: 2009년10월27일, 수정완료일: 2009년12월7일

## II. 시스템 표현

불확실성을 갖는 비선형 시스템을 아래와 같이 고려하자.

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + g(x)u \quad (1)$$

여기서,  $x \in R^n, u \in R^m$ 는 시스템의 상태와 입력이다.  $f(0) = 0$ 인 사상  $f: R^n \rightarrow R^n$ 와  $g: R^n \rightarrow R^n \times R^m$ 는 매끄럽고 가정하며,  $\Delta f(0) = 0$ 인 사상  $\Delta f: R^n \rightarrow R^n$ 는 구조적 불확실성 특성을 가지며, 식(2)와 같이 표현된다.

$$\Delta f(x) = e(x)\delta(x) \quad (2)$$

여기서  $e: R^n \rightarrow R^{n \times m}$ 는 주어진 매끄러운 함수를 갖는 행렬이고,  $\delta: R^n \rightarrow R^m$ 는 미지의 벡터값(vector-valued) 함수이다. 그리고  $\delta(x)$ 는  $N(0) = 0$ 을 갖는 주어진 매끄러운 함수  $N: R^n \rightarrow R^+$ 로 제한된다고 가정하자. 즉, 다음과 같다.

$$\Gamma = \{ \delta(x) : \|\delta(x)\| \leq N(x) \} \quad (3)$$

여기서  $\|\cdot\|$ 는 유클리디안 놈을 나타낸다. 만약 모든  $x \in R^n$ 에 대하여,  $\delta(x)$ 가 식(3)을 만족한다면,  $\delta(x)$  또는  $\Delta f(x)$ 는 허용가능하다고 말한다.

$V: R^n \rightarrow R^+$ 를 연속함수라 하자.  $x \neq 0$ 인 모든  $x$ 에 대하여, 만약  $V(0) = 0$ 과  $V(x) > 0$ 이면,  $V$ 는 양의로 정의(positive definite) 되었다고 하며, 또한  $\|x\| \rightarrow \infty$ 일 때,  $V(x) \rightarrow \infty$ 이면,  $V$ 는 고유적(proper)이라 한다.

$f$ 에 대한  $V$ 의 Lie 도함수는  $L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ 으로 표현된다.

[정의 1] 각  $x \neq 0$ 에 대하여, 만약 식(4)를 만족하면, 매끄럽고, 고유하며 양의로 정의된 함수  $V: R^n \rightarrow R^+$ 는 식(1) 시스템의 CLF이다<sup>[7]</sup>.

$$\inf_u \{ L_f V(x) + L_g V(x)u \} < -\|L_e V(x)\|N(x) \quad (4)$$

$V(x)$ 가 식(1)의 CLF라는 조건은 식(5)을 의미한다.

$$L_g V(x) = 0, x \neq 0 \Rightarrow L_f V(x) < -\|L_e V(x)\|N(x) \quad (5)$$

[언급 1] 식(5)로부터,  $L_g V(x) = 0$ 을 만족하는 집합은 제어를 위한 중요한 것이다.  $L_g V(x) = 0$ 일 때, 어떤  $x$ 에 대하여, 만약  $L_f V(x) > 0$ 이기 때문에,  $V(x)$ 는 Lyapunov 함수가 아니고 물론 CLF도 아니다.

[정의 2] 만약 어떤  $x$ 에 대하여,  $x \neq 0$ 인  $\|x\| < \sigma$ 을 만족하는  $\sigma > 0$ 이 존재한다면,  $V(x)$ 는 식(1)의 시스템에 대한 작은 제어 특성(small control property)을 만족한다고 하며, 이때 부등식(5)를 만족하도록  $\|u\| < \epsilon$ 을 갖는 어떤  $u$ 가 존재한다.

[정의 3]  $k(0) = 0$ 을 갖는  $k: R^n \rightarrow R$ 인 함수라 하자. 만약 원점으로부터 떨어져 매끄러운뿐 아니라  $R^n$ 의 모든 점에서 연속이라하며,  $u(k) = k(x)$ 는  $R^n$ 상에서 가장 매끄럽다고(almost smooth) 한다<sup>[7]</sup>.

## III. 주요 결과

이 장에서는 본 연구의 주요 결과를 제시한다. 시스템 식(1)이 대역적 접근 안정화를 위한 충분조건과 가장 매끄러운 상태 궤환을 제시한다.

### 1. 대역적 안정화 제어기

[정리 1]  $V(x)$ 는 시스템 (1)의 CLF이고 작은 제어 특성을 만족한다고 가정하자. 이때 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$ 에 대하여 시스템 (1)이 대역적으로 접근적 안정하도록 가장 매끄러운 상태 궤환 제어가 존재한다.

(증명) 다음 식(6)과 같이 설정하자.

$$a(x) = L_f V(x), B(x) = L_g V(x), c(x) = L_e V(x) \quad (6)$$

식(5)에 의하여, 다음이 성립한다.

$$B(x) = 0, x \neq 0 \Rightarrow a(x) < -\|c(x)\|N(x) \quad (7)$$

식(8)과 같은  $R^2$ 의 개 부분집합(open subset)을 고려하자.

$$S = \{ (a, b) \in R^2 \mid b \neq 0 \text{ or } a < 0 \} \quad (8)$$

$q(b) = b$ 라 하자. 식(9)로 정의된 함수가  $S$ 상에서 매끄럽다<sup>[7]</sup>.

$$\phi(a, b) = \begin{cases} \frac{a + \sqrt{a^2 + bq(b)}}{b} & b \neq 0 \\ 0 & b = 0 \end{cases} \quad (9)$$

식(7)에 의해, 임의  $x \neq 0$  에 대하여  $(a(x) + \|c(x)\|N(x), \|B(x)\|^2) \in S$  이다. 상태 제환은 식(10)과 같이 정의된다.

$$u = k(x) = \begin{cases} -B^T(x) \frac{(a(x) + \|c(x)\|N(x) + \sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4})}{\|B(x)\|^2} & B(x) \neq 0 \\ 0 & B(x) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

임의  $x \neq 0$  에 대하여  $u = k(x)$  는  $S$  상에서 매끄럽다. 게다가 영이 아닌  $x$  에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= L_f V(x) + L_g V(x)u + L_{\Delta f} V(x) \\ &\leq a(x) + B(x)u + \|c(x)\|N(x) \\ &= -\sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4} < 0 \end{aligned}$$

그래서  $V$  는 일치하는 페루프 시스템의 궤적에 따라 감소한다. 마지막으로, 적은 제어 특성을  $V(x)$  가 만족한다면, 제어 함수  $u = k(x)$  는 원점에서 연속이라는 것을 증명하자.  $B(x) = 0$  때는 언제나  $k(x) = 0$  이므로,  $B(x) \neq 0$  인 경우만 고려하는 것으로 충분하다.

$V(x)$  가 적은 제어 특성을 만족한다는 것은 임의  $\epsilon > 0$  에 대하여  $x \neq 0$  와  $\|x\| < \sigma$  이 되도록 하는  $\sigma > 0$  이 있다. 이때 식(11)을 만족하는  $\|u\| < \epsilon$  갖는  $u$  가 존재한다.

$$a(x) + B(x)u < -\|c(x)\|N(x) \quad (11)$$

그리고  $V(x)$  는 양으로 한정된다. 따라서 영에서 최소이다.  $\nabla V(0) = 0$  이 성립한다. 기울기(gradient)가 연속이기 때문에,  $x$  가 충분히 적을 때, 식(12)가 성립한다.

$$\|B(x)\| < \epsilon \quad (12)$$

식(11)은 다음의 식(13)을 의미한다.

$$a(x) + \|c(x)\|N(x) < -B(x)u \leq \|B(x)\|\|u\| \leq \|B(x)\|\epsilon \quad (13)$$

두 번째 부등식은 Cauchy-Schwartz 정리에 의해 증명된다. 만약  $0 < \|x\| < \sigma$  이면 식(12)와 (13)에 의해,  $a(x) + \|c(x)\|N(x) > 0$  일 때, 식(14)가 성립한다.

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|k(x)\| \\ &\leq \frac{2(a(x) + \|c(x)\|N(x)) + \|B(x)\|^2}{\|B(x)\|} \\ &\leq 2\epsilon + \|B(x)\| \\ &< 3\epsilon \end{aligned} \quad (14)$$

$\sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4} \leq |a(x) + \|c(x)\|N(x)| + \|B(x)\|^2$  이기 때문에,  $a(x) + \|c(x)\|N(x) \leq 0$  이고  $0 < \|x\| < \sigma$  일 때, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|k(x)\| \\ &\leq \frac{(a(x) + \|c(x)\|N(x) + \sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4})}{\|B(x)\|} \\ &\leq \|B(x)\| < \epsilon \end{aligned}$$

그래서 임의  $\epsilon > 0$  에 대하여, 만약  $\|x\| < \sigma$  이면  $\|k(x)\| < 3\epsilon$  이 되도록 하는  $\sigma > 0$  이 있다. 즉, 이는 원점에서  $u = k(x)$  가 연속이라는 것을 말한다. 그래서 제어칙 식(10)은 거의 매끄러운 제어이고 페루프 시스템의 평형점  $x=0$  에서 대역적 점근적 안정을 시키다.  $\square$

[언급 2]  $b \neq 0$  때는 언제나  $q(0) = 0$  과  $bq(b) > 0$  가 되도록 임의 실수 매끄러운 함수  $q: R \rightarrow R$  에 의하여  $q(b) = b$  가 교체한다면, 정리 1의 나머지 상항을 증명하는 것은 어렵지 않다.

[언급 3]  $N(x) = 0$  일 때, 정리 1은 참고 문헌 [7]의 정리 1을 의미한다. 그래서 정리 1은 강건한 안정성에서 CLF의 확장이라고 할 수 있다.

다음의 결과는 시스템 (1)이 안정하도록 유계(bound) 제어를 갖는다.

[결과 1]  $V(x)$  가 시스템 (1)에 대하여 적은 제어 특성을 만족하는 CLF라 하자. 그때 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$  에 대하여, 시스템 (1)은 거의 매끄러운 유계 상태 피드백 제어에 의하여 대역적 점근적 안정이다.

$$u = k(x) = \begin{cases} -B^T(x) \frac{(a(x) + \|c(x)\|N(x) + \sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4})}{\|B(x)\|^2 (1 + \sqrt{1 + \|B(x)\|^2})} & B(x) \neq 0 \\ 0 & B(x) = 0 \end{cases}$$

(증명) 결과 1의 증명은 정리 1의 증명과 유사하다.  $\square$

## 2. 역 최적 제어기

이 장에서는 다음의 특성이 만족하도록 시스템 (1)에 대한 피드백 제어  $u(x)$ , 즉 역 최적 제어기에의 설계에 대하여 논의한다.

1. 페루프 시스템은 평형점  $x = 0$  에서 대역적 점근적 안정이다.

2. 입력  $u$  는 모든  $x$  에 대하여  $l(x) \geq 0$  와  $R(x) > 0$  대한 비용함수 식(16)을 최소화한다.

$$J(u, x, x_0) = \sup_{\delta x \in \Gamma} \int_0^{\infty} (l(x) + u^T R(x) u) dt \quad (16)$$

역제어기 접근에서, 안정화하는 제어기  $u = k(x)$  가 먼저 설계되고, 다음으로 피드백은  $u = k(x)$  가 식(16)을 최소화하도록  $l(x) \geq 0$  와  $R(x) > 0$  발견하는 것이다.

이 방법은  $l(x) \geq 0$  와  $R(x) > 0$  이 설계자에 의하여 연역적으로 선택된다기보다 안정화하는 피드백에 의하여 귀납적으로 결정되므로 역이라 한다.

임의  $\gamma > 0$  를 선택하면, 다음이 성립한다.

$$R^{-1}(x) = \begin{cases} 2\gamma + 2 \frac{\left( \frac{a(x) + \|c(x)\|N(x) + \sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4}}{\|B(x)\|^2} \right)}{2\gamma} & B(x) \neq 0 \\ B(x) = 0 & B(x) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

[정리 2]  $R(x)$ 는 식(17)에 의해 결정된 함수이고  $V(x)$  시스템 식(1)에 대한 CLF라 하자.

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1}(x) B^T(x) \quad (18)$$

제어칙 식(18)이 존재하고, 이때 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$  와 모든  $x_0 \in R^n$  에 대하여  $J(u^*, x, x_0) = V(x_0)$  이 되도록  $l(x) \geq 0$  가 존재한다.(이 정리는  $u^*$  가 식(16)에 최적이라는 것을 설명한다.)

(증명) 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$  에 대해, 시스템 식(1)의 궤적에 따라  $V(x)$  의 도함수와 식(18)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= L_f V(x) + B(x)u^* + L_{\Delta f} V(x) \\ &\leq a(x) + B(x)u^* + \|c(x)\|N(x) \end{aligned}$$

식(17)과 (18)로부터, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq -\sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4} - \gamma \|B(x)\|^2 \\ &< 0 ; B(x) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} \leq a(x) + \|c(x)\|N(x) < 0 ; B(x) = 0$$

그래서  $u^*$  는 평형점  $x = 0$  에서 시스템 식(1)의 대역적 점근적 안정을 이끈다.

$u_1 = \frac{1}{2} u^*$  이라 하자. 이때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= a(x) + L_{\Delta f} V(x) + B(x)u_1 \\ &\leq a(x) + \|c(x)\|N(x) + B(x)u_1 \\ &\leq \frac{1}{2} (a(x) + \|c(x)\|N(x)) \\ &\quad - \sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4} \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma \|B(x)\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

식(19)와 같이 선택하자.

$$l(x) = -a(x) - \|c(x)\|N(x) - B(x)u_1 \quad (19)$$

이때,

$$l(x) = -a(x) - \|c(x)\|N(x) - (B(x)R^{-1}(x)B^T(x)/4) \geq 0$$

이기 때문에  $l(x) \geq 0$  이다.

$\int_0^{\infty} (l(x) + u^T R(x) u) dt$  에  $u = v - (R^{-1}(x)B^T(x)/2)$  을 대입하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} (l(x) + u^T R(x) u) dt \\ &= \int_0^{\infty} \left( -a(x) - \|c(x)\|N(x) + \frac{1}{4} B(x)R^{-1}(x)B^T(x) \right. \\ &\quad \left. + u^T R(x) u \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \left( -a(x) - \|c(x)\|N(x) + \frac{1}{2} B(x)R^{-1}(x)B^T(x) \right. \\ &\quad \left. - B(x)v + v^T R(x) v \right) dt \\ &\leq -\int_0^{\infty} \frac{\delta V}{\delta x} (f + \Delta f + gu) dt + \int_0^{\infty} v^T R(x) v dt \\ &= V(x_0) - \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) + \int_0^{\infty} v^T R(x) v dt \end{aligned}$$

$v = 0$  로 설정하면, 다음이 성립한다.

$$u = u^* \tag{20}$$

식(20)은 모든 허용가능한  $\Delta f(x)$  와 모든  $x_0 \in R^n$  에 대하여 다음을 의미한다.

$$J(u^*, x, x_0) \leq V(x_0) \tag{21}$$

또한 다음과 같이 설정하자.

$$\delta_0(x) = \begin{cases} \frac{c^T(x)N(x)}{\|c(x)\|}, & c(x) \neq 0 \\ \left( \frac{N(x)}{\sqrt{m}} \dots \frac{N(x)}{\sqrt{m}} \right)^T c(x) = 0 \end{cases}$$

이때,  $\delta_0(x) \in \Gamma$  와

$$a(x) + B(x)u + c(x)\delta_0(x) = a(x) + B(x)u + \|c(x)\|N(x)$$

이다.

$u^* = -R^{-1}(x)B^T(x)/2$  가 시스템 식(1)을 대역적 점근 안정화를 이끌며, 모든  $x_0 \in R^n$  와  $\delta_0(x)$  에 대하여 제어칙 식(18)과 시스템 식(1)의 해  $x(t)$  에 따라  $\frac{dV}{dt}$  는 적분될 수 있다.

그래서 모든  $T \geq 0$  에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} V(x_0) &= V(x(T)) - \int_0^T \frac{dV}{dt} dt \\ &= V(x(T)) - \int_0^T (a(x) + c(x)\delta_0(x) + B(x)u^*) dt \\ &= V(x(T)) - \int_0^T (a(x) + \|c(x)\|N(x) + B(x)u^*) dt \end{aligned} \tag{22}$$

식(17), (18)과 (19)에 의하여,

$$l(x) + (u^*)^T R(x)u^* + a(x) + B(x)u^* + \|c(x)\|N(x) = 0$$

이 됨은 분명하다. 식(22)는

$$V(x_0) = V(x(T)) + \int_0^T (l(x) + (u^*)^T R(x)u^*) dt$$

를 표현 한다.

$T \rightarrow \infty$  에 따라  $V(x(T)) \rightarrow 0$  이기 때문에,

$$\int_0^\infty (l(x) + (u^*)^T R(x)u^*) dt = V(x_0)$$

이다.

그래서  $J(u^*, x, x_0) = V(x_0)$  이다. 이 등식과 부등식 (21)을 결합하면, 식(17)과 식(19)에 의하여 주어진  $R(x)$  와  $l(x)$  에 대하여 식(16)의 정확한 최적해는  $u^*$  이다.  $\square$

[언급 4] 때로는 시스템  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  에 대한 CLF 를 발견하는 것이 어렵다.

본 연구에서는  $f(x)$  가  $f(x) = f_1(x) + \Delta f_1(x)$  로 분해되며,  $f_1(x)$  는 쉽게 CLF를 얻는 특성을 갖는다고 가정한다.  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  의 CLF는 역최적 제어기에 대하여 정리 1과 정리 2를 만족한다.

#### IV. 예 제

III장에서 제안된 내용을 검증하기 위하여 이 장에서는 2개의 예를 가지고 설명한다.

예제 1 : 알고 있는 값  $\theta$  를 갖는 비선형 시스템을 아래와 같이 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \frac{\theta}{2}x_2^2 + \theta(-2x_2 + x_3)x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 + x_3 + u \end{aligned} \tag{23}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)^T$  로하고, 다음과 같이 선택하자.

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + \frac{\theta}{2}x_2^2 \\ -x_2 + x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Delta f(x) = \begin{pmatrix} \theta(-2x_2 + x_3)x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

다음과 같이 표시하자.

$$\begin{aligned} e(x) &= \begin{pmatrix} \theta x_3 - 2\theta x_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \Delta f(x) &= e(x)\delta(x)N(x) = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \end{aligned}$$

$V(x)$  를 양으로 한정되고 고유한 매끄러운 함수로 아래와 같이 설정하자.

$$V(x) = \frac{1}{2} \left( x_1 + x_2 + \frac{\theta x_2^2}{2} \right)^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{2}$$

이때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 a(x) &= L_f V(x) \\
 &= -x_2^2 - \left(x_1 + x_2 + \frac{\theta}{2} x_2^2\right)^2 \\
 &\quad + x_3(1 + \theta x_2) \left(x_1 + x_2 + \frac{\theta x_2^2}{2}\right) + x_3^2 \\
 B(x) &= L_g V(x) = x_3 \\
 c(x) &= L_e V(x) \\
 &= \left[ \theta x_3 \left(x_1 + x_2 + \frac{\theta x_2^2}{2}\right) - 2\theta x_3 \left(x_1 + x_2 + \frac{\theta x_2^2}{2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

이때,  $x_3 = 0$  이면,

$$a(x) = -(x_1 + x_2 + \frac{\theta}{2} x_2^2)^2 - x_2^2, \quad c(x) = 0$$

이다.

그래서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 B(x) = 0, x \neq 0 &\Rightarrow x_3 = 0, \\
 x \neq 0 &\Rightarrow a(x) = -(x_1 + x_2 + \frac{\theta}{2} x_2^2)^2 - x_2^2 < 0 = \|c(x)\|N(x)
 \end{aligned}$$

정리 2에 의하여, 제어기는 식(24)와 같다.

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{1}{2} R^{-1}(x) B^T(x) = \\
 &\begin{cases} -\gamma B^T(x) - B^T(x) \frac{\left( a(x) + \|c(x)\|N(x) + \sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4} \right)}{\|B(x)\|^2} & ; B(x) \neq 0 \\ -\gamma B^T(x) & ; B(x) = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{24}$$

$\theta$  에 대하여 임의의 제한 없이 시스템 식(23)과 제어칙여 초기 상태는  $x(0) = (5, 2, -3)^T, \theta = 1, \gamma = 0.5$ 로 하였다.

모의실험 결과는 그림 1, 2와 같다. 그림에서 보여주

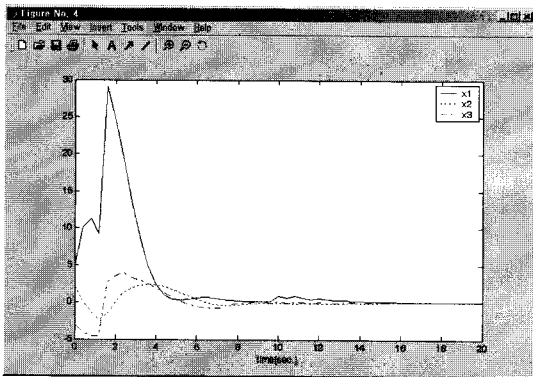


그림 1. 예제 1의 상태  
Fig. 1. The State of example 1.

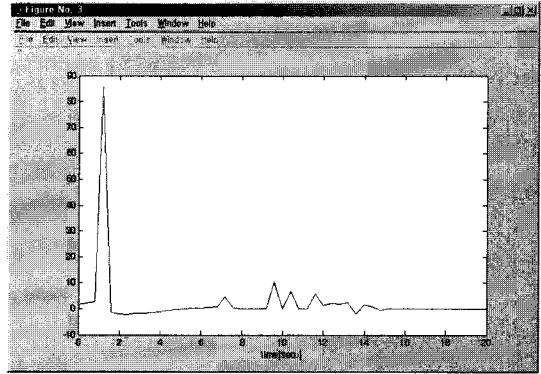


그림 2. 예제 1의 제어칙  
Fig. 2. The Control of example 1.

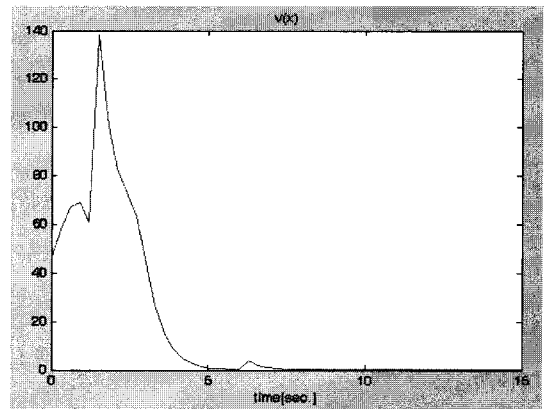


그림 3. 예제 1의 성능 지수  
Fig. 3. The performance index of example 1.

듯이 모든 상태가 영으로 수렴하고 있음을 보여 주고 있다.

그리고 이 경우의  $V(x)$  는 그림 3과 같다. 식(24)로 구성된 페루프 시스템은 평형점  $x=0$ 에서 대역적 점근안정이고  $J = V(x(0))$ 이다. 모의실험을 위해

예제 2 : 두 개의 입력을 갖는 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_3 \delta_1(x) - x_2 \delta_2(x) + x_1 u_1 + x_1 e^{x_1} u_2 \\
 \dot{x}_2 &= -2x_2 + \delta_1(x) + x_1 \delta_2(x) - x_3 u_1 + x_3 u_2 \\
 \dot{x}_3 &= -2x_3 - x_1 \delta_1(x) + \delta_2(x) + x_2 u_1 - x_2 u_2 \\
 \left\| \begin{pmatrix} \delta_1(x) \\ \delta_2(x) \end{pmatrix} \right\| &\leq \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \quad N(x) = x_2^2 + x_3^2
 \end{aligned} \tag{25}$$

아래와 같이 각각 표현하자.

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 e^{x_1} \\ -x_3 & x_3 \\ x_2 & -x_2 \end{pmatrix}, \quad e(x) = \begin{pmatrix} x_3 & -x_2 \\ 1 & x_1 \\ -x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

그리고  $V(x) = 0.5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$  로 고려하자. 그러

면 아래와 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}
 a(x) &= L_f V(x) = -2(x_2^2 + x_3^2) + x_1^3 \\
 c(x) &= L_e V(x) = (x_2 \quad x_3) \\
 B(x) &= L_g V(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1^2 e^{x_1} \\ & \end{pmatrix} \\
 \|B(x)\| &= \|L_g V(x)\| = x_1^2 \sqrt{1 + e^{2x_1}}
 \end{aligned}$$

즉,  $B(x) = 0, x \neq 0 \Rightarrow x_1 = 0, x \neq 0 \Rightarrow a(x) = -(x_2^2 + x_3^2)$  이  
 기에  $B(x) = 0, x \neq 0 \Rightarrow a(x) < -\|c(x)\|N(x)$  이 성립한  
 다. 정리 2에 의하여, 제어기는 식(26)와 같다.

$$\begin{cases}
 -\gamma B^T(x) - B^T(x) \frac{(a(x) + \|c(x)\|N(x) + \sqrt{(a(x) + \|c(x)\|N(x))^2 + \|B(x)\|^4})}{\|B(x)\|^2} & ; B(x) \neq 0 \\
 -\gamma B^T(x) & ; B(x) = 0
 \end{cases} \quad (26)$$

시스템 식(25)과 제어칙 식(26)로 구성된 페루프 시  
 스템은 평형점  $x = 0$ 에서 대역적 접근 안정이고  
 $J = V(x(0))$  이다.

모의실험을 위하여 초기 상태는  $x(0) = (-1, 3, 4)^T$ ,

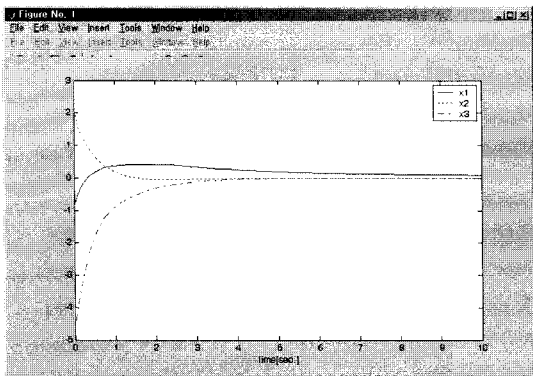


그림 4. 예제 2의 상태  
 Fig. 4. The State of example 2.

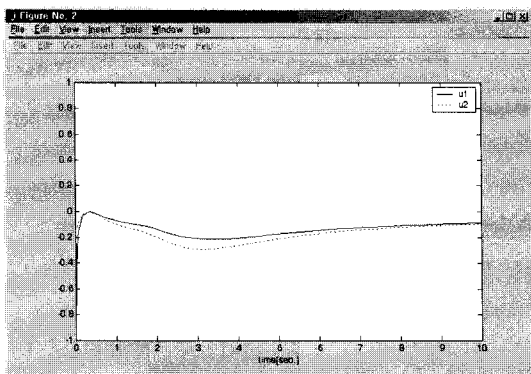


그림 5. 예제 2의 제어칙  
 Fig. 5. The Control of example 2.

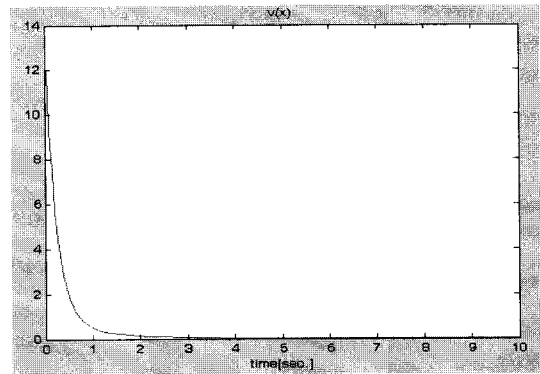


그림 6. 예제 2의 성능 지수  
 Fig. 6. The performance index of example 2.

$\delta_1(x) = x_2 \sin(x_1), \delta_2(x) = x_3 \cos(x_2), \gamma = 0.5$ 로 하  
 였다. 모의실험 결과는 그림 4, 5와 같다. 그림에서 보여  
 주듯이 모든 상태가 영으로 수렴하고 있음을 보여 주고  
 있다.

그리고 이 경우의  $V(x)$ 는 그림 6과 같다.

### V. 결 론

구조적 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 역 최  
 적 제어에 대하여 논의하였다. CLF 함수를 기초로 대  
 역적 접근 안정도에 대한 이론을 제시하였다. 또한 역  
 최적 제어에 대한 최소 보존 조건을 유도하였다. 이 방  
 법을 구조적 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 역 최적  
 제어를 설계하기 위하여 사용하였다. 시뮬레이션 결  
 과는 제안된 방법이 효과적임을 보여 주고 있다. 이 방  
 법으로 현재의 비선형 시스템 제어 기법을 개선하게 되  
 었다.

### 참 고 문 헌

- [1] Kokotovic, P., and Arcak, M.: "Constructive nonlinear control. A historical perspective", *Automatica*, 2001, 37,(5), pp.637-662
- [2] Artstein, Z.: "Stabilization with relaxed controls", *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 1983, 7, (11), pp.1163-1173
- [3] Sontag, E.D.: "A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability", *SIAM J. Control Optim.*, 1983, 21, (3), pp.462-471
- [4] Freeman, R.A., and Kokotovic, P.V.: "Inverse optimality in robust stabilization". *SIAM J. Control Optim.*, 1996, 34, (4), pp.1365-1391
- [5] Freeman, R.A., and Primbs, J.A.: "Control

- Lyapunov functions: new ideas from an old source". Proc. IEEE Decision and Control Conf., Kobe, Japan, 1996, pp.3926-3931
- [6] Mei, S.W., Shen, T.L., Sun, Y.Z., and Lu, Q.: "Passivation control of nonlinear systems with disturbances", Control Theory and Appl., 1999, 16, (6), pp.797-806
- [7] Sontag, E.D.: "A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization", Syst. Control Lett., 1989, 13, (2), pp.117-123
- [8] Lin, Y., and Sontag, E.D.: "A universal formula for stabilization with bounded control", Syst. Control Lett., 1991, 16, (5), pp.393-397
- [9] Isidori, A.: "Nonlinear control systems" (Springer Verlag, New-York, USA, 1995, 3rd edn.)
- [10] Sepulchre, R., Jankovic, M., and Kokotovic, P.V.: "Constructive nonlinear control" (Springer Verlag, London, 1996).
- [11] Freeman, R.A., and Kokotovic, P.V.: "Robust control of nonlinear systems" (Birkhauser, Boston, MA, 1996).

---

저 자 소 개

---

조도현(정회원)

인하공업대학 디지털전자과 교수  
대한전자공학회 논문지  
제46권 IE편 제2호 참조

이철(정회원)

광운대학교 대학원 제어계측공학과  
박사과정 수료  
(주)씨랩솔루션 대표  
대한전자공학회 논문지  
제46권 IE편 제2호 참조

이종용(정회원)

광운대학교 교양학부 교수  
대한전자공학회 논문지  
제46권 IE편 제2호 참조