韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2009. 11. 제 48권, 제 4호, 387-398.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2009, Vol. 48, No. 4, 387-398.

테크놀로지를 활용한 사인함수의 덧셈정리 증명
- 수학영재아를 중심으로 한 사례연구-

이 헌 수 (전남대학교)
박 종 률 (전남대학교)
정 인 철 (고려대학교)

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

최근 각 나라마다 영재교육의 중요성을 강조하면서 영재교육에 대한 국가적 관심이 고조되고 있다. 선진국들은 우수한 인재를 육성하여 국가경쟁력을 강화하기 위하여 다양한 정책 방안을 마련하려고 노력하고 있다. 미국은 1988년 제정한 연방정부의 '영재교육법(Gifted and Talented Students Act)'을 2001년 재승인하여 각 주별로 전체 학생의 1~15%를 대상으로 영재교육 실시하고 있고, 영국은 2001년 '영재교육법'을 제정하여 2002년 국립영재교육원(NAGTY) 설립하였고 2005년 영재교육에 대한 정부비전을 제시하고 전체 학생의 5~10%를 대상으로 영재교육을 실시하고 있는 등 각 나라마다 영재교육에 대한 관심과 투자가 증가하고 있는 추세이다. 최근 우리나라에서도 영재교육의 질 제고와 내실화를 추진할 목적으로 '제2차 영재교육진흥종합계획('08~'12)'을 발표하였다(교육인적자원부, 2007). 이 계획안에 따르면 영재교육을 전체 학생의 1%까지 확대하고, 2012년까지 권역별로 4~5개의 영재학교를 확대·운영할 계획으로 앞으로 더욱 더 영재교육이 강화될 추세이다.

한편, 기술 문명의 급속한 발달은 칠판과 분필, 자와 컴퍼스를 활용한 고전적인 수업환경을 계산기, 컴퓨터, 컴퓨터 소프트웨어 등과 같은 테크놀로지를 활용한 수업환경으로 변화를 가져왔고, 컴퓨터의 탁월한 기능과 능력은 교수·학습의 방법 측면에서 현저하게 변화시키고, 수학적 내용도 긍정적인 변화를 가져왔다. 최근 교수·학습과정에서 그래픽 계산기, Cabri3D, 스프레드시트 또는 GSP 등 다양한 테크놀로지를 학교 수학 학습에 도입하여 이산수학, 함수의 개념, 함수와 그래프, 통계, 기하 등의 교육에 접목시키려는 시도와 연구가 계속 이루어지고 있다. 교수·학습과정에서 테크놀로지의 활용은 이론수업 후 확인하는 과정(한동승·조지연, 2003), 학생들이 증명학습 과정에서 겪는 어려움의 완화(신유경 외, 2008), 증명을 테크놀로지를 이용하여 시각화 자료와 특수한 자료를 통해 학생들에게 경험적 인식을 주어 경험적 정당화를 시키기 위해(정인철 외, 2007) 테크놀로지를 활용하였다. 이러한 테크놀로지를 활용한 교수·학습 방법에 대한 수업은 대부분의 일선 학교 현장에서 이루어지고 있고 연구 또한 일반 학생을 대상으로 한 연구가 주를 이루고 있다. 따라서, 영재 학생을 대상으로 한 테크놀로지를 활용한 교수·학습 방법 및 이와 관련된 연구가 요구된다.

본 연구는 수학영재학생들이 GSP를 활용한 사인함수의 덧셈정리의 증명에 대한 교수·학습 과정에서 주어진 문제의 시각화를 통한 추론과 대수화 과정을 통하여 증명 문제의 논리적 해결 과정에서 GSP가 학생들에게 미치는 영향에 대하여 탐구하는 것을 목적으로 한다.

2. 연구 문제

수학영재학생의 사인함수의 덧셈정리의 증명과정에서

---

* 접수일(2009년 9월 2일), 수정일(1차 : 2009년 10월 28일), 게재확정일(2009년 11월 10일)
* ZDM분류 : G63, I23, U73
* MSC2000분류 : 97C80, 97U70
* 주제어 : 수학영재교육, 테크놀로지를 활용한 수학교육, 사인함수의 덧셈정리 증명

탐구형 소프트웨어인 GSP를 이용하여 시각화를 통한 수학적 추론, 대수화와 논리적 전개 과정에서 다음과 같은 문제를 연구하고자 한다.

(1) GSP를 활용한 시각화가 기하학적 원리와 개념의 이해를 어떻게 돕는가?

(2) 증명과정에서 시각화한 내용을 어떻게 대수화하고 논리적으로 전개하는가?

3. 연구의 제한점

본 연구는 대학 부설 과학영재교육원 중등 수학반 학생을 대상으로 삼각함수의 덧셈공식을 증명하기 위하여 GSP를 이용하여 주어진 도형을 시각화하고, 시각화한 내용으로 삼각비의 개념을 이해하고, 이를 기호화 및 대수화하여 삼각함수의 덧셈공식을 논리적으로 증명하는 과정으로 연구를 제한하려고 한다. 연구 결과는 중소도시 소재의 대학 부설 과학영재교육원의 소수의 영재반 학생을 대상으로 한 사례연구이므로 영재아들의 이질성으로 인하여 대도시나 다수의 영재아들에게 일반화하기에는 한계가 존재할 수 있다.

II. 이론적 배경

1. 수학영재교육

우리 나라의 영재교육은 학생들의 다양한 능력과 적성을 계발하고 특별히 현대 지식기반사회가 필요로 하는 창의적 생산성을 갖춘 인재를 양성하기 위한 목적으로 영재교육을 실시하고 있다. 이러한 목적을 달성하기 위하여 영재교육과정에서 다양한 교수·학습 방법이 요구되고 있다. 김홍원(박성익 외, 2003)은 영재교육과정에서 개방적 사고와 발견의 중요성을 강조하고, 발견의 경험을 갖게 하기 위하여 연역적 사고보다 귀납적 사고를 강조하고 토론, 실험, 실습 등을 통해 발견 및 탐구 과정을 유도하여야 한다고 하였다. 그리고 학생이 자기주도적인 학습 능력과 태도를 최대로 함양하기 위하여 영재교육은 가급적 학생의 참여도를 높일 수 있는 교수·학습 방법을 자주 활용해야 한다고 하였다. 또한, 박성익(박성익 외2003)은 영재들은 창의적 사고와 논리적 사고의 학습, 자기주도적 학습, 발견식·탐구식 학습 등의 학습활동을 선호한다고 하였다. 교수·학습방법에서 수업 방식에 따른 학생의 참여 정도는 강의, 토론, 시연, 소집단 토의, 동료교수, 협동 학습, 현장 답사, 학습 센터, 게임 학습, 전자 매체 학습, 시뮬레이션/역할 연기, 프로젝트, 멘토쉽, 독립 연구 등의 순으로 학생의 참여도가 높다 (Renzulii & Reis, 1997).

이러한 연구들을 토대로 볼 때, 영재교육에서 테크놀로지를 활용한 교수·학습 방법은 영재학생들에게 학습에 능동적으로 참여할 수 있는 기회를 제공하고, 교사의 일방적 강의 방식이 아닌 영재학생들의 자기주도적인 발견식·탐구식 학습을 가능하게 하여 학습의 효과를 높일 수 있는 교수·학습 방법이라고 할 수 있다.

2. 테크놀로지를 이용한 증명 학습

1980년대 이후 컴퓨터와 소프트웨어 등 테크놀로지의 비약적인 발전과 보급으로 인하여 수학교육에서 테크놀로지가 교수·학습의 한 방법으로 널리 활용되고 있다. 특히, 컴퓨터는 그래픽 애니메이션, 시뮬레이션, 신속하고 정확한 계산 기능 등 다른 교육 매체가 제공하지 못하는 교수·학습 환경을 제공함으로 인해 수학 교수·학습과정의 변화에 큰 영향을 주고 있다. 테크놀로지의 그래픽과 관련된 기능은 추상화된 수학적 대상을 구체적으로 시각화된 형태로 표현할 수 있을 뿐만 아니라, 테크놀로지를 이용한 실험 학습을 통해 학생 중심의 자기주도적인 학습을 위한 중요한 도구로 활용되고 있다. 컴퓨터의 발달과 다양한 수학 소프트웨어의 개발로 인하여 테크놀로지를 학교 수학 학습에 도입하려는 시도 및 관련 연구들은 테크놀로지가 교수방법, 학습방법뿐만 아니라 수학교육과정까지 변화시킬 수 있음을 시사하였으며, 더 나아가 교육제도까지 변화시킬 수 있는 가능성을 보여주었다(김부윤·이지성, 2008).

NCTM은 1989년에 「학교 수학의 교육과정 과 평가의 기준(The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)」을 통해 계산기와 컴퓨터를 수학 학습 지도를 위한 가치 있는 도구로 받아들여야 한다고 발표하였고(NCTM, 1989), 2000년에는 이전에 발표된 일련의 규준집의 정신을 계승하면서 수정·보완하여「학교

수학의 원리와 규준(Principles and Standards for School Mathematics)」을 공표하였다(NCTM, 2000). 「학교 수학의 원리와 규준」에는 학교 수학의 6가지의 원리와 10가지의 규준이 제시하였는데 그 중 테크놀로지의 원리(The Technology Principle)에서 테크놀로지는 수학을 가르치고 배우는데 필수적인 요소로 테크놀로지는 가르쳐야 할 수학 내용에 영향을 주고, 학생들의 수학 학습 능력을 높여주어야 한다고 주장하였다.

여러 학자들의 연구에 의하면 테크놀로지를 이용한 증명 학습의 긍정적인 견해로 Schoenfeld(1988)는 테크놀로지 도구를 이용하여 학생들이 연역적 실험과 경험적 실험 사이에 연결을 만들 수 있고, 경험적으로 가설을 실험하여 자신이 행한 것을 발견하고 증명한 것에 대해서 사고할 수 있게 된다고 하였고, 신동선・류희찬(1999)는 컴퓨터를 이용한 시각화는 수학적 지식의 의미를 눈으로 확인시킬 수 있어 수학적 개념을 보다 근본적으로 이해시킬 수 있고, 역동적인 기하 소프트웨어의 사용이 학생들에게 연역적인 증명의 필요성을 인식하는데 긍정적인 역할을 할 수 있다고 하였다. Marrades & Gutie'rrez (2000)는 GSP의 사용은 증명 과제에 대한 시각적 표현을 가능하게 하여 학생들의 귀납적 탐구활동을 용이하게 하고, 또한 학생들의 추론에 대한 즉각적인 피드백을 제공함으로써 학생들의 증명학습을 도울 수 있다고 하였다. 또 다른 견해로, Scher(1996)는 소프트웨어의 사용이 학생들에게 직접적으로 형식적인 연역적 증명과정을 제시하지는 못하지만, 수학적 아이디어에 대한 추측과 확인의 기회를 제공하여 학생들의 증명학습을 돕는데 기여할 수 있다고 하였다.

반면에 테크놀로지 사용에 대한 부정적인 견해로 역동적인 기하 소프트웨어의 사용이 오히려 연역적 증명의 역할이나 필요성을 약화시키는 결과를 초래할 수 있다고 주장하였고(신유경・강윤수・정인철, 2008; Chanzan, 1993), 단순한 계산도 사고를 하지 않고 바로 계산기를 사용하려는 경향이 짙어지면서 사고를 필요로 하는 문제를 학생들이 쉽게 포기하는 경우가 많고, 계산기는 분수를 표시하지 못하기 때문에 학생들에게 분수의 개념 형성에 부정적인 영향을 주고 있다고 지적하였다(Zheng 1998).

테크놀로지를 이용한 수학 교수학습 과정에서 테크놀로지의 사용을 강조하면서도 현실적인 교육과정 및 제도에서 테크놀로지의 사용에 대한 지원과 효과적인 탐구학습을 위해서는 충분한 시간의 확보가 필요하지만 교육과정 및 제도와 시간의 미비로 인하여 현실 교육과정에서 테크놀로지의 사용이 제한되고 있다(전영국・주미, 1998; Johnson, 1997). 그러나, 영재교육과정에서는 현행 학교 교육과정보다 교육과정, 제도 및 시간 등 여러 가지 교육환경의 제약이 적기 때문에 영재교육에서 테크놀로지가 훨씬 더 유용하게 사용될 수 있다.

3. 사인함수의 덧셈 정리의 증명

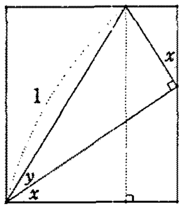
사인 함수의 덧셈 정리는 고등학교 '미분과 적분' 단원에 처음 나오는데 각 x, y 에 대하여

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

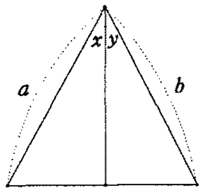
를 사인함수의 덧셈 정리라고 한다. 이러한 사인 함수의 덧셈 정리의 증명 방법은 다양하게 존재한다. 사인 함수의 덧셈 정리에 대한 증명 방법은 사용한 도형을 중심으로, 두 삼각형에서 x, y를 생각하여 두 삼각형을 접하거나 겹쳐 놓아 증명하는 방법(<그림 1>), x, y를 한 삼각형에서 생각하여 증명하는 방법(<그림 2>, <그림 3>), 원에 내접하는 다각형에서 x, y를 생각하여 증명하는 방법(<그림 4>, <그림 5>) 등이 있다.

두 삼각형에서 두 각을 접하거나 겹쳐놓아 증명하는 방법에는 삼각비를 이용하여 증명하는 방법, 일차변환을 이용하여 증명하는 방법, 벡터를 이용하여 증명하는 방법으로, 두 각을 한 삼각형에서 증명하는 방법에는 주어진 한 삼각형의 내부에서 사인의 덧셈 정리에 포함된 두 각을 생각하여 두 각을 한 꼭지점에서 생각하는 경우와 두 개의 꼭지점에서 각각의 각을 생각하는 경우로 나누어 증명하는 방법으로, 원에 내접하는 다각형에서 두 각을 생각하여 증명하는 방법에는 삼각형이 원에 내접하는 경우와 사각형이 원에 내접하는 경우로 나누어 증명할 수 있다(한인기 외, 2005; Nelson, 1993; Nelson, 2000).

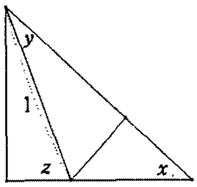
본 연구에서 사인 함수의 덧셈 정리를 증명하는데 주어진 한 삼각형의 내부에서 사인의 덧셈 정리에 포함된 두 각을 두 개의 꼭지점에서 각각의 각을 생각해서 삼각비를 이용하여 증명하는 방법(<그림 3>)을 선택하였다.



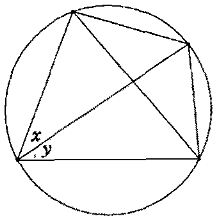
<그림 1>
두 삼각형으로 증명



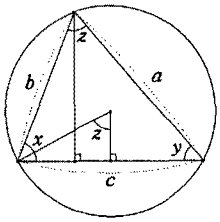
<그림 2>
한 삼각형으로 증명



<그림 3>
한 삼각형으로 증명



<그림 4>
내접 사각형으로 증명



<그림 5>
내접 삼각형으로 증명

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 참여자

수학영재학생의 사인 함수의 덧셈정리의 증명 학습에서 GSP를 활용한 시각화, 추론, 대수화와 논리적 증명 과정을 연구하기 위하여 대학부설 과학영재교육원 중등 심화수학 과정에 있는 중학교 2학년 학생 8명을 대상으로 하였다. 심화과정에 있는 학생들은 기초과정과 심화과정에서 GSP를 활용한 도형의 작도와 변환 등에 대해 6시간의 수업을 받아 GSP의 사용에 대해 어느 정도 익숙한 학생들이다.

2. 연구 방법

본 연구는 소규모의 수학 영재 학생을 대상으로 수학적 증명과정에서 테크놀로지를 활용하여 시각화를 통한 수학적 추론, 대수화와 논리적 전개를 파악하는 과정을 분석한 연구로서 정성적 사례연구 방법을 사용한다.

가. 관찰

1) 참여 관찰

테크놀로지를 활용한 모든 수업 과정을 고정된 디지털 비디오카메라를 이용하여 전체적으로 녹화하였고, 또 다른 디지털 비디오카메라를 이용하여 학생들의 개인별 수업 상황을 집중적으로 녹화하였다. 연구자는 수업중 학생들 간의 의사소통 및 연구자와 학생들 간의 의사소통은 디지털 녹음기를 이용하여 녹음하였다. 연구자는 학생들의 탐구 학습시 학생들이 GSP의 작도 과정에서 도움을 요청하는 경우에만 개입하였고, 개입하는 경우에 가급적 객관적인 입장을 유지하려고 노력하였다.

2) 비디오 관찰

테크놀로지를 이용하여 주어진 과제를 해결하는 과정에서 전체적으로 나타나는 학생들의 행동 및 반응을 분석하기 위하여 고정용 디지털 비디오 카메라에 녹화된 자료를 관찰하였다. 그리고 학생들이 주어진 과제를 GSP를 활용하여 시각화하는 과정과 시각화한 자료를 어떻게 활용하는가에 대해 심층적으로 분석하기 위하여 이동형 디지털 비디오 카메라에 녹화된 자료를 관찰하였다.

나. 인터뷰

학생들은 주어진 과제에 대해 GSP를 이용한 시각화, 시각화한 자료를 활용한 추론, 대수화 과정을 통해 증명을 학생 활동지에 기록하였다. 연구자는 탐구 과정과 활동지 기록 등을 관찰하면서 정확히 파악할 수 없는 그림이나 식, 서술된 내용과 학생들의 탐구학습에 대한 이해나 흥미 등을 정확하게 파악하기 위하여 개별적인 인터뷰를 실시하였고 때에 따라서는 집단적인 인터뷰를 실시하였다.

다. 산출물 분석

학생들의 산출물은 GSP를 이용한 시각화 자료와 학생들이 탐구 학습시 기록한 학생 활동지로 구분할 수 있

다. GSP를 이용한 시각화 자료는 학생들이 주어진 문제를 어떻게 시각화하는가에 대한 학습자의 성취를 정확하게 파악하기 어려웠기 때문에 발견할 수 있는 특성이 매우 한정적이었다. 학생 활동지에서는 시각화 자료에서 정확히 파악할 수 없는 대수화 과정과 증명에서 나타난 특징 등을 분석하였다.

3. 연구 절차

가. 교재 개발

연구 주제와 관련된 국내·외 문헌(한인기, 2005; Nelsen, 1993; Nelsen, 2000)을 통하여 수학교육 전문가와의 협의를 통하여 연구 주제와 관련된 내용을 선정하여 연구 주제에 맞게 교재를 개발하였다. 교재의 내용은 먼저 GSP를 이용하여 직각삼각형에서 세 변의 길이의 비를 탐구하여 삼각비를 이해하게 하고, 이를 활용하여 사인 함수의 덧셈정리를 증명하도록 교재를 구성하였다.

나. 수업의 진행

개발한 교재를 이용하여 본 연구자가 직접 수업을 진행하였다. 본 연구자는 수업시 학생에게 주어진 문제에 대해 GSP를 활용하여 시각화하고, 시각화를 통해 나타난 도형의 규칙성을 탐구하여 추론, 대수화 및 논리적 증명하도록 하였다. GSP를 활용한 추론, 대수화 및 논리적 증명 과정에서 학생들의 질문시 가급적 학생 스스로 탐구하여 답을 찾도록 유도하였다.

다. 자료수집

본 연구의 자료는 수업의 전 과정을 고정된 디지털 비디오카메라를 이용하여 녹화하였고, 때에 따라서는 학생 개인별 수업 상황을 디지털 비디오카메라를 이용하여 녹화하였다. 수업시 학생들 간의 의사소통 및 교사와 학생들 간의 의사소통은 디지털 녹음기를 이용하여 녹음하였으며 학생들이 수업 활동 중 GSP를 이용하여 구한 자료나 학생 활동지 등 모든 산출물을 수집하였다. 디지털 비디오카메라와 디지털 녹음기를 사용하여 전체 수업 과정의 자료를 수집하기 전에 학생들에게 연구의 목적 외에는 다른 목적으로 사용하지 않을 것임을 설명한 후 학생들의 동의를 얻어 자료를 수집하였다.

라. 자료분석

GSP를 활용하여 주어진 과제를 해결하는 과정에서 학생들의 행동 및 반응, 시각화를 통한 추론, 대수화 및 논리적 증명 과정 등을 분석하기 위하여 녹화자료 및 인터뷰, 산출물의 내용을 분석하는 정성적 접근법을 사용하였다. 녹화자료 및 녹음 자료 그리고 인터뷰 자료는 모두 전사하였으며 그 내용을 바탕으로 의미를 찾아내는 현상학적 접근 방법(Patton, 2002)으로 분석하였다.

마. 연구 현장의 구성

연구 현장은 GSP의 조작에 익숙하지 못한 학생이 쉽게 따라할 수 있도록 LCD 프로젝트를 컴퓨터에 연결하여 컴퓨터 모니터에 나타난 화면을 강의실 전면에 있는 스크린에 나타나도록 구성하였다. 그리고, 학생들의 모든 수업 과정 및 수업시 학생들의 행동 등의 자료를 수집하기 위하여 강의실 뒤편에 한 대의 디지털 비디오 카메라를 고정하여 설치하였고, 개개인의 GSP의 조작이나 수업 상황 등을 정밀히 관찰하기 위하여 연구보조자가 또 다른 이동식 디지털 비디오카메라로 학생들의 실험 장면을 집중적으로 촬영하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. GSP를 활용한 시각화가 기하학적 원리와 개념의 이해를 어떻게 돕는가?

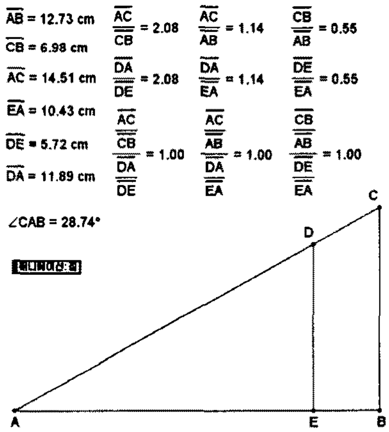
가. GSP를 활용한 시각화는 기하학적 원리를 직관적으로 이해하는데 도움을 준다.

직각삼각형에서 각이 일정할 때 세 변의 길이가 변함에 따라 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는 어떻게 변하는지 관찰하기 위하여 GSP를 이용하여 <그림 6>과 같이 직각삼각형 ABC와 AED를 작도하게 한 후, 탐구형 소프트웨어의 측정 메뉴를 사용하여 각 변의 길이와 길이의 비를 측정하여 대응하는 각 길이의 비에 대한 성질을 알아보고자 인터뷰를 한 내용을 보면 다음과 같다.

> 연구자 : 직각삼각형 ABC에서 높이 : 빗변, 밑변 : 빗변, 높이 : 밑변의 비는 얼마입니까?
> 학생A : 높이 : 빗변의 비는 0.5고요, 밑변 : 빗변의 비는 0.87이고, 높이 : 밑변의 비는 0.58이요.

연구자 : 그럼, △AED에서 높이 : 빗변, 밑변 : 빗변, 높이 : 밑변의 비는 얼마가 나오나요?
학생A : △ABC에서 구한 거랑 똑같이 나와요.
연구자 : △ABC와 △AED의 대응하는 두 변의 길이의 비가 일정한데 왜 그럴까요?
학생B : 두 삼각형은 닮은 삼각형이니까 대응하는 두 변의 길이가 일정해요.
연구자 : 두 삼각형이 닮은 삼각형이라는 사실을 어떻게 알 수 있나요?
학생B : 그냥 한 눈으로 봐도 알 수 있어요.
연구자 : 두 삼각형이 닮은 삼각형이라는 사실을 어떻게 알 수 있나요?
학생B : 두 삼각형의 각의 크기가 같은 것을 그냥 봐도 알 수 있잖아요.

테크놀로지를 이용하여 시각화한 자료를 통하여 학생들은 직관적으로 두 삼각형 △ABC와 △AED가 닮은 삼각형이라는 것을 쉽게 인식할 수 있었고, 또한 측정 메뉴를 통해 얻은 대응하는 두 변의 길이의 비가 일정함을 확인할 수 있었다. 이처럼 GSP를 활용한 시각화는 기하학적 원리를 직관적으로 이해하는데 도움을 주는 것을 확인할 수 있었다.



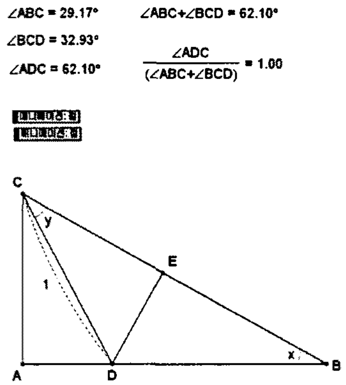
<그림 6> 두 직각 삼각형의 세 변의 길이의 비

나. GSP를 활용한 시각화는 기하학적 원리와 개념을 이해하고 다양한 사례를 검증하여 일반화하는데 도움을 준다.

직각삼각형 ABC와 AED에서 $\angle CAB$를 고정시키고 각 변의 길이가 변할 때 대응하는 각 변의 길이의 비가 어떻게 변하는지 알아보기 위하여 선분 $\overline{AB}$ 위의 한 점 E를 선분 $\overline{AB}$ 를 따라 좌우로 움직일 때 대응하는 각 변의 길이의 비가 어떻게 변하는지 관찰하게 하였다(<그림 6>). 다음은 관찰 결과에 대한 학생들의 인터뷰 내용이다.

연구자 : 직각삼각형 AED의 세 변의 길이가 변할 때 삼각형 AED와 삼각형 ABC의 대응하는 각 변의 길이의 비는 어떤가요?
학생A : 선분의 길이의 비가 같아요.
연구자 : 이 사실을 통해 무엇을 알 수 있나요?
학생C : 음. $\angle A$가 일정하면 삼각형 AED의 세 변의 길이가 변하더라도 길이의 비의 값은 일정하다는 것을 알 수 있어요.

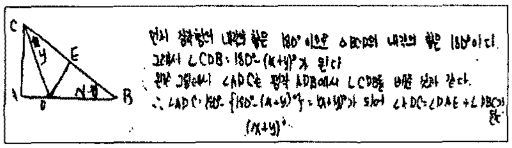
학생들은 예각 $\angle A$에 대하여 $\angle A$를 한 각으로 하는 직각삼각형 AED를 어떻게 만들더라도 변의 길이의 비의 값은 항상 일정함을 확인할 수 있었고, 이를 통하여 삼각비의 원리와 개념을 쉽게 이해할 수 있었다.



<그림 7> $\angle ADC = x + y$

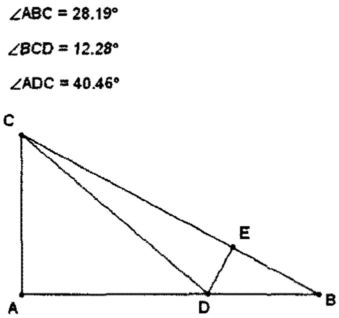
다음은 GSP를 활용한 시각화가 학생들에게 기하학적 원리와 개념을 쉽게 이해할 수 있게 하고 일반화하는데 도움을 주는 또 다른 사례이다. <그림 7>과 같이 두 각 x와 y가 주어 졌을 때 $\angle ADC$는 x와 y의 합과 같다는 것을 있음을 보이기 위하여 먼저 GSP의 측정 메뉴를 사용하여 x, y, $\angle ADC$를 구한 후 $\angle ADC$가 $x+y$임을 확인하게 하였다. 그 다음 x와 y의 값이 변할 때에도 항상 같은지를 알아보기 위하여 선분 $\overline{AB}$ 위의 한 점 D가 선분 $\overline{AB}$를 따라 좌우로 움직일 때와

$\overline{AC}$에서 C가 위 아래로 움직일 때 x, y, $\angle ADC$가 어떻게 변하는지 관찰하게 하였다. 그 결과, GSP를 활용한 시각화는 학생들에게 다양한 사례를 검증하여 일반화하는데 도움을 준다는 사실을 확인할 수 있었다(<그림 8>).



<그림 8> 학생 B의 시각화를 통한 일반화 사례

그러나, GSP를 활용한 시각화는 학생들에게 기하학적 원리나 개념을 직관적으로 이해하는데 도움을 주는 반면 GSP를 통한 수치화 과정에서는 약간의 혼란을 주는 경우도 발생하였다. <그림 9>에서 볼 수 있듯이 시각화한 자료를 수치적으로 표현했을 때 $\angle ABC + \angle BCD = 28.19° + 12.28° = 40.47°$로 $\angle ADC = 40.46°$와 같지 않아 $\angle ABC$와 $\angle BCD$의 합이 $\angle ADC$와 같지 않음을 알 수 있다. 이는 GSP의 측정 도구가 가지는 특성으로 소수점 셋째자리에서 반올림하여 나타난 값을 측정값으로 표기하기 때문에 나타나는 현상이다. 따라서, 학생들은 이러한 점에서 의구심이 생길 수도 있고 혼란을 겪을 수도 있다. 이렇게 발생되는 문제를 해결하기 위하여 <그림 7>과 같이 측정 메뉴를 통하여 $\angle ADC$과 $\angle ABC + \angle BCD$의 비율이 1임을 보임으로써 두 값이 같다는 것을 확인하게 하였다.



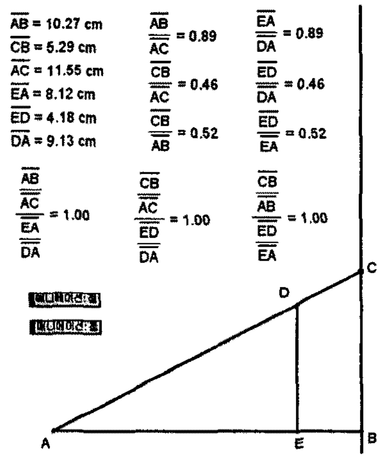
<그림 9> 학생 D의 시각화 자료의 수치상의 오류 사례

다음은 수치화 과정에서 측정값의 불일치에서 발생한 문제에 대한 학생과의 인터뷰 내용이다.

연구자 : 측정 메뉴로 측정한 결과 $\angle ABC$와 $\angle BCD$는 각각 얼마로 나오나요? 그리고 두 값을 더하면 얼마인가요?
학생D : $\angle ABC = 28.19°$고 $\angle BCD = 12.28°$요. 더하면 $40.47°$가 나와요.
연구자 : 두 값을 더한 값과 $\angle ADC$이 같나요?
학생D : 어.. 이상한데요. 전 두 값이 다르게 나오는데요... 왜 이러지?
연구자 : 그러면 측정 메뉴에서 $\angle ABC$와 $\angle BCD$를 더한 값을 $\angle ADC$의 값으로 나눠주면 어떻게 되나요?
학생D : 값이 1이 나와요.
연구자 : 이것으로 무엇을 알 수 있나요?
학생D : $\angle ADC$는 $\angle ABC$와 $\angle BCD$를 더한 것과 같아요.

다. GSP를 활용한 학습은 학생에게 능동적인 탐구활동을 조장하고 수학적인 개념의 확장이나 사고의 확산에 긍정적인 역할을 한다.

수학에서 개념의 확장이나 사고의 확산은 영재학생뿐만 아니라 일반학생에게도 중요하다. GSP를 활용한 수업에서 영재학생들은 다양한 호기심으로 수학적 개념을 능동적으로 확장해 감을 관찰할 수 있었다.



<그림 10> 학생 E의 각이 변할 때 삼각비 관찰 산출물

학생 B는 GSP를 이용한 삼각비의 탐구에서 $\angle CAB$를 예각으로 갖는 직각삼각형 AED에서 고정된 $\angle CAB$에 대하여 직각삼각형 AED를 어떻게 만들더라도 변의 길이의 비의 값은 항상 일정함을 확인한 후, $\angle CAB$가 변할 때 각각의 길이의 비를 관찰하기 위하여 점 B를 지나고 선분 $\overline{AB}$에 수직인 수선, 수선 위의 한 점 C와 $\overline{AC}$를 작도한 후 C가 수선을 따라 움직일 때 $\angle CAB$와 각각의 선분의 길이의 비에 대해 탐구하고 있는 것을 관찰할 수 있었다(<그림 10>). 학생 B의 경우, 삼각비의 개념을 자연스럽게 삼각함수로 확장하여 제한적이지마는 삼각함수의 개념을 이해할 수 있었다. 이와 같이 GSP를 활용한 학습은 영재 학생들에게 능동적인 탐구 활동의 조장하고 수학적인 개념이나 사고의 확장의 측면에서 긍정적인 역할을 한다는 것을 확인할 수 있었다.

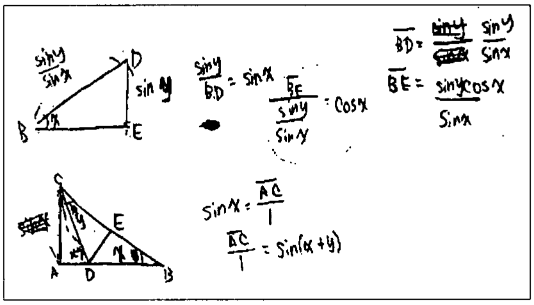
라. GSP를 조작하는데 충분히 숙달되지 않아 어려움을 느끼는 학생들에게는 GSP의 활용이 오히려 학습 방해하는 요소로 작용할 수 있다.

GSP의 사용에 익숙하지 않은 학생들에게는 GSP의 사용이 오히려 학습을 방해하는 요소로 작용하였다. GSP의 사용에 익숙하지 않은 학생들은 수업시간에 GSP를 이용하여 학습 내용을 탐구하거나 증명학습에 초점을 두기보다는 GSP로 주어진 도형을 작도하는데 더 많은 시간을 할애하는 것이 관찰되기도 하였다. 교수-학습과정에서 교사와 학생들의 교수-학습을 돕기 위한 목적으로 사용하고 있는 테크놀로지는 효과적인 교수-학습과정을 위한 도구로써 이용되어야 하며 테크놀로지 자체가 교수-학습의 목적이 되어서는 안된다. GSP가 학습 목적이 되는 교수학적 현상을 막기 위해서는 무엇보다도 교사는 학생들에게 소프트웨어의 사용법을 익히기 위한 충분한 기회를 제공하여야 하며, 교사의 지속적이고 주의 깊은 관찰과 관심이 요구된다(한혜숙 · 신현성, 2008).

2. GSP로 시각화한 내용을 어떻게 대수화하고 증명에 이용하는가?

가. GSP로 시각화한 내용은 기호화하고 대수화하는데 긍정적인 역할을 한다.

영재 학생들은 주어진 수학적인 개념이나 성질 등을 GSP를 이용하여 탐구하는 과정에서 주어진 도형을 작도하고, 작도한 도형에서 각의 크기나 선분의 길이 등을 구하기 위하여 GSP의 측정 메뉴를 이용하여 측정하였다. 이렇게 측정된 값은 <그림 6>과 <그림 7>에서 보는 바와 같이 각의 크기나 선분의 길이 등이 컴퓨터 화면상에 기호화되고 대수화되어 나타난다. 학생들은 탐구했던 수학적 사실들을 일반화하기 위하여 컴퓨터 화면상에 나타난 도형과 기호를 자주 들여다보았고 컴퓨터 화면상에 나타난 기호를 이용하여 이를 표현함으로써 자연스럽게 기호가 눈에 익고 기호의 사용이 친숙해져서 도형의 성질 등을 기호화하거나 대수화하는데 GSP는 도움을 준다. 실제로, <그림 11>은 학생 B가 삼각비의 기본 개념을 이용하여 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$와 $\overline{BE}$를 구하기 위하여 GSP를 이용하여 컴퓨터 화면 작도한 도형을 활동지에 옮겨 그린 후 기호화하여 변의 길이를 구하는 과정을 보여주고 있다. 이와 같이 GSP에 의한 각각의 사례에 대한 도형과 기호의 시각화는 영재 학생들이 수학적 사실을 기호를 통하여 표현하고 대수화하는데 긍정적인 역할을 한다.

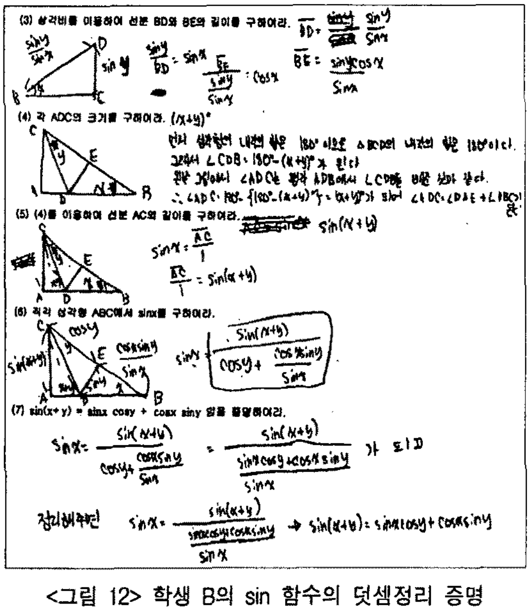


<그림 11> 학생 B의 시각화를 통한 기호화 사례

나. GSP로 시각화한 내용은 영재학생들의 증명학습에 도움을 준다.

영재학생들은 삼각비를 이용하여 sin 함수의 덧셈 정리를 증명하기 위하여 GSP를 이용하여 <그림 3>에서 나타난 것과 같은 도형을 작도하였고, 이 시각화된 도형을 이용하여 각 변의 길이나 각 등을 기호화하고 대수화하여 증명하였다(<그림 12>). 이 과정에서 학생들은

GSP를 사용하여 개념이 확립된 삼각비를 이용하여 각 변의 길이를 주어진 각에 대하여 sin 함수와 과 cos 함수로 표현하였고, 두 각의 합에 대한 sin 함수를 유도하여 sin 함수의 덧셈 정리를 증명하였다. 실제로, 개별적으로 집중 촬영한 비디오 녹화 화면을 살펴보면 학생들은 sin 함수의 덧셈 정리의 증명 과정에서 각 변의 길이에 대한 sin과 cos 함수의 관계식을 정리하기 위하여 컴퓨터 화면에 나타난 도형을 참고하기도 하고 조작하기도 하고 때에 따라서는 컴퓨터 모니터에 나타난 도형을 활동지에 옮겨 그린 후 삼각비에 성질을 이용하여 각 변의 길이를 표현하였고, 이를 이용하여 sin 함수의 덧셈 정리를 증명하였다. 이를 통하여 볼 때, 영재학생들을 대상으로 한 GSP를 활용한 증명학습은 영재학생들의 증명학습에 어느 정도 긍정적인 영향을 미친 것으로 판단된다.



<그림 12> 학생 B의 sin 함수의 덧셈정리 증명

V. 결 론

본 연구는 수학영재학생의 수학적 증명 과정에서 탐구형 소프트웨어인 GSP를 이용하여 시각화를 통한 수학적 추론, 대수화와 논리적 전개를 하는 과정에서 GSP를 활용한 시각화가 기하학적 원리와 개념의 이해를 어떻게 돕고, 증명과정에서 시각화한 내용을 어떻게 대수화하고 논리적으로 전개하는가를 탐구하고자 하였다. 이를 위하여, 대학교 과학영재교육원 심화과정에 있는 수학반 학생 8명을 대상으로 하여 사인함수의 덧셈정리의 증명에서 GSP를 활용한 증명학습이 증명 과정에 어떤 영향을 주는지를 탐구하였다. 이 과정에서 수집된 디지털 오디오 녹취물, 학생 활동을 촬영한 비디오 녹화자료와 학생활동지를 서로 연계하여 분석하였으며, 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, GSP를 활용한 시각화는 기하학적 원리와 개념을 직관적으로 이해하는데 도움을 주고, 다양한 사례를 검증하여 일반화하는데 도움을 준다.

테크놀로지를 이용하여 시각화한 자료를 통하여 학생들은 직관적으로 도형의 닮음에 대한 성질을 쉽게 인식할 수 있었고, 또한 측정 메뉴를 통해 대응하는 두 변의 길이의 비를 다양하게 측정함으로써 대응하는 두 변의 비가 일정함을 확인할 수 있었다. 이처럼 GSP를 활용한 시각화는 수학적 지식의 의미를 직접 확인시킬 수 있어 수학적 개념을 보다 근본적으로 이해시킬 수 있고(신동선 · 류희찬, 1999), 다양한 사례를 검증하여 일반화를 시도하는데 도움을 준다(신유경 외, 2008).

둘째, GSP를 활용한 학습은 학생에게 능동적인 탐구활동을 조장하고 수학적인 개념의 확장이나 사고의 확산에 긍정적인 역할을 한다.

GSP를 활용한 학습은 학생들에게 손으로 직접 도형을 작도할 때 보다 훨씬 더 신속하고 정확하게 도형을 제시해 줄뿐만 아니라 GSP의 끌기(dragging) 기능은 도형을 다양한 각도에서 접근할 수 있게 하고, 측정 및 계산 기능은 대상에 대한 다양한 양을 측정할 수 있고 측정한 내용은 대상이 바뀔 때마다 자동적으로 바뀌게 되어 사고의 방향을 좀 더 창조적으로 유도할 수 있다. 또한, 학생들은 수동적이 아니라 능동적인 자세로 테크놀로지를 활용하여 창조적 사고영역을 구축함으로써 앉아서 주어지는 수학을 습득하는 그런 방식이 아니라 학습자의 사고 영역에 따라 스스로 확장해 가면서 살아 숨쉬는 수학을 추구할 수 있게 된다(정인철 · 오세열, 2001).

셋째, GSP로 시각화한 내용은 기호화하고 대수화하는데 긍정적인 역할을 한다.

GSP를 이용하여 도형을 작도하고, 각과 선분을 측정한 값은 컴퓨터 화면상에 기호화되고 대수화되어 나타난다. 영재학생들은 시각화된 도형 및 측정 자료를 이용하여 수학적 사실들을 기호화하고 대수화하였다. 시각화된 자료는 영재학생들의 탐구과정에서 자연스럽게 기호가 눈에 익숙해져서 수학적 사실을 기호를 통하여 표현하고 대수화하는데 어느 정도 도움을 준다는 것을 확인할 수 있었다. 그러나, 테크놀로지를 이용하면 측정값을 원하는 각도기로 측정했을 때보다 정확한 값을 측정할 수 있으나 테크놀로지의 왜곡된 부분, 즉 <그림 5>에서 보는 바와 같이 측정 도구의 오차에 의해 수학 명제의 증명은 인해 수학의 본질을 훼손하고, 학생들은 컴퓨터에 대한 오류를 인지하지 못하므로 경험적 확신을 갖지 못하고 의구심을 갖게 될 수도 있다(우정호, 2000; 정인철 외, 2003).

넷째, GSP로 시각화한 내용은 영재학생들의 증명학습에 도움을 준다.

영재학생들은 sin 함수의 덧셈 정리를 증명하기 위하여 GSP를 이용하여 시각화한 도형을 이용하여 각 변의 길이나 각 등을 기호화하고 대수화하는 과정에서 컴퓨터 화면에 나타난 도형을 참고하거나 조작하기도 하고 때에 따라서는 컴퓨터 모니터에 나타난 도형을 활동지에 옮겨 그린 후 증명하였다. 비록, 소프트웨어의 사용은 학생들에게 직접적으로 형식적인 연역적 증명과정을 제시하지는 못하지만, 학생들의 수학적 아이디어에 대한 추측과 확인의 기회를 제공하여 학생들의 증명학습을 돕는데 기여한다(류희찬·조완영, 1999; Scher, 1996).

다섯째, GSP를 조작하는데 충분히 숙달되지 않아 어려움을 느끼는 학생들에게는 GSP의 활용이 오히려 학습 방해하는 요소로 작용할 수 있다.

GSP의 사용에 익숙하지 않은 학생들에게는 GSP의 사용이 오히려 학습을 방해하는 요소로 작용하였다. GSP의 사용에 익숙하지 않은 학생들은 수업시간에 GSP를 이용하여 학습 내용을 탐구하거나 증명학습에 초점을 두기보다는 GSP로 주어진 도형을 작도하는데 더 많은 시간을 할애하는 것이 관찰되기도 하였다. 컴퓨터는 수학 교육에서 매우 유용한 수단임에 틀림없지만, 인식론적 경각심 없이 사용하게 되면, 메타 인지 이동과 같은 왜곡된 교수·학습 현상을 불러일으킬 수 있음에 유의할 필요가 있다(이종영, 1999). GSP가 학습 목적이 되는 교수학적 현상을 막기 위해서는 무엇보다도 교사는 학생들에게 소프트웨어의 사용법을 익히기 위한 충분한 기회를 제공하여야 하며, 교사의 지속적이고 주의 깊은 관찰과 관심이 요구된다(한혜숙·신현성, 2008).

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 제2차 영재교육진흥종합계획 ('08~'12).

류희찬·조완영 (1999). 증명의 필요성 이해와 탐구형 기하 소프트웨어의 활용, 대한수학교육학회논문집 9(2), 서울: 대한수학교육학회.

박성익 외 (2003). 영재교육학원론, 서울: 교육과학사.

신동선·류희찬 (1999). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.

신유경·강윤수·정인철 (2008), GSP가 증명학습에 미치는 영향 : 사례연구, 한국학교수학회논문집 11(1), 공주: 한국학교수학회.

우정호 (2000). 수학학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교 출판부.

이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 기하 지도의 문제점과 교수학적 처방의 예, 대한수학교육학회지 <학교수학> 1(1), 서울: 대한수학교육학회.

전영국·주미 (1998). 기하문제해결에서의 GSP를 활용한 탐구학습 신장, 대한수학교육학회논문집 8(2), 서울: 대한수학교육학회.

정인철·김택수·황운구 (2007). 테크놀러지 활용수업에서 경험적 인식과 수학적 사고에 관한 연구-중학교 3학년 기하 단원을 중심으로, 한국학교수학회논문집 10(2), 공주: 한국학교수학회.

정인철·오세열 (2001). 수학교육에서의 테크날러지, 한국학교수학회논문집 4(1), 공주: 한국학교수학회.

한동숭·조지연 (2003). GSP를 활용한 기하교육 연구사례, 한국학교수학회논문집 6(1), 공주: 한국학교수학회.

한인기 (2005). 사인의 덧셈정리에 대한 다양한 증명방법 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> 19(3), 서울: 한국수학교육학회.

한혜숙·신현성 (2008). 증명학습에 대한 학생들의 성향

과 GSP를 활용한 증명학습, 한국학교수학회논문집 11(2), 공주: 한국학교수학회.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics* 24, pp.359-387.

Johnson, D. L. (1997). Intergrating technology in the classroom: The time has come, *Computers in the Schools* 13(1), pp.1-5.

Marrades, R. & Gutie'rrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics* 44, pp.87- 125.

NCTM (1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA: Author.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: Author.

Nelson, R. B. (1993). *Proofs without Words I: More exercises in visual thinking*, Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Nelson, R. B. (2000). *Proofs without Words II: More exercises in visual thinking*, Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods. Thousands Oaks*, CA: Sage Publications, Inc.

Renzulii, J. S. & Reis, S. M. (1997). *The schoolwide enrichment model: A how-to guide for educational excellence(2nd ed)*, Creative Learning Press.

Scher, D. (1996). Folded paper, dynamic geometry and proof: A three-tier approach to the conics, *The Mathematics Teacher* 89(3), pp.188-193.

Schoenfeld, A. H. (1988). *Mathematics, Technology and higher order thinking*, In Nickerson, R. S. & Zodhiates, P. P.(ed), Lawrence, Erlbaum Associates Publisher.

Zheng, T. (1998). Impacts of using calculator in learning mathematics, *The 3rd Asian Technology Coference on Mathematics (ATCM'98)*. Accessed (18, Jun, 2009) at Electronic proceedings of ATCM '98 on the World Wide Web: http://www.atcminc.com/mPublications/EP/EPATCM98/index.html.

A study on the proof of additive law of sine function using technology

- A case study focused on mathematics education for the gifted -

Lee, Heon soo
Graduate School, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea
E-mail : mathlee@chonnam.ac.kr

Park, Jong Youll
Dept. of Math. Education, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea
E-mail : parkjy@chonnam.ac.kr

Jung, Inchul
Dept. of Math. Education, Korea University, Seoul 136-701, Korea
E-mail : ijung@korea.ac.kr

In this paper, we investigated the influence of technology, which gave an impact on students through the process of teaching & learning for the proof of an additive law of sine function in the mathematics education for the gifted. We chose students who were taking a course in enrichment mathematics at Science Education Institute for the Gifted in Mokpo National University, and analyzed their processes of a mathematical inference or conjecture, an algebraic description and a proof by visualization using technology.

We found the following facts. That is, the visualization using technology is helpful to the gifted students in understanding principles and concepts of mathematics by intuition. Also, it is helpful to ones verifying various cases and generalizing principles. But, using technology can be a factor that disturbs learning of students who are clumsy with operating technology.

* ZDM classification : G63, I23, U73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C80, 97U70
* Key Words : mathematics education for the gifted, math. education using technology, proof of additive law of sine function