

# DCC 모델링을 이용한 다변량-GARCH 모형의 분석 및 응용

최성미<sup>1</sup> · 홍선영<sup>2</sup> · 최문선<sup>3</sup> · 박진아<sup>4</sup> · 백지선<sup>5</sup> · 황선영<sup>6</sup>

<sup>1</sup>숙명여자대학교 통계학과, <sup>2</sup>숙명여자대학교 통계학과, <sup>3</sup>숙명여자대학교 통계학과

<sup>4</sup>숙명여자대학교 통계학과, <sup>5</sup>숙명여자대학교 통계학과, <sup>6</sup>숙명여자대학교 통계학과

(2009년 7월 접수, 2009년 8월 채택)

## 요약

금융 시계열 자료들 간의 상관계수는 자산의 배분, 위험관리 그리고 포트폴리오의 선택에 있어서 중요한 역할을 한다. 이러한 상관계수들을 모형화하기 위해 다변량-GARCH 모형을 다변량-GARCH 모형으로 확장시킨 MGARCH류 모형들에 대한 많은 연구들이 진행되고 있다. 특히, CCC 모형 (Bollerslev, 1990)과 DCC 모형 (Engle, 2002)은 다른 모형들에 비해 추정해야 할 모수의 수가 작다는 이점으로 인해 분석에 널리 쓰이고 있다. 본 논문에서는 국내 주가자료에 대해 CCC 모형과 DCC 모형을 적합시킨 후, 각 모형들에 대한 VaR(value at risk)와 사후검증(back-testing), 결합예측영역(joint prediction region) 등을 통하여 두 모형의 예측 능력을 비교해 보고자 한다.

주요용어: 다변량-GARCH, CCC(constant conditional correlation), DCC(dynamic conditional correlation).

## 1. 서론

금융 시계열 자료의 모형화에 있어서 가장 많은 관심을 기울이는 것은 변동성이다. 특히, 자산 수익률의 움직임에 예측하고자 할 때, 과거의 정보가 미래의 움직임에 영향을 주는 조건부 이분산성(conditional heteroskedasticity)에 대한 것은 간과할 수 없는 문제이다. Engle (1982)은 ARCH 모형을 통해 처음으로 이러한 특성을 계량경제 분석에 반영하였으며, 그 이후에 Bollerslev (1986)의 GARCH 모형과 여러 모형들이 연구되었다. 하지만 위의 모형들은 단변량 자료에 대한 모형으로 금융 시장 전체에서 여러 변동성들 간에 존재하는 상관관계(correlation)는 설명하지 못한다. 시계열 자료들 간의 상관계수는 자산의 배분, 위험관리 그리고 포트폴리오의 선택에 있어서 중요한 역할을 한다. MGARCH(multivariate GARCH) 모형은 단변량-GARCH 모형의 다변량 모형으로의 확장된 형태이며 Engle와 Kroner (1995)의 BEKK모형, Bollerslev 등 (1998)의 DVEC모형, Bollerslev (1990)의 CCC모형 그리고 Engle (2002)의 DCC모형 등이 있다. 현재 다변량 변동성 모형은 금융과 통계학에서 중요한 용도로 사용되고 있다. 여러 MGARCH 모형들 중에서도 CCC 모형과 DCC 모형은 다른 모형들에 비해 추정 대상인 모수의 수가 적으면서도 조건부 상관계수들을 모형화하여 추정 가능하다는 장점이 있다. 특히 DCC 모형의 경우에는 상관관계의 동태성(dynamics)까지 고려한 상관계수 행렬을 제시함으로써 시간에 따라 움직이는 변동성의 특성을 CCC 모형에 비해 더 잘 반영하고 있다.

본 논문에서는 MGARCH 모형의 일반적인 특징들과 함께 CCC 모형과 DCC 모형에 대해 알아보고 이 모형들을 국내 금융 시계열 자료에 적용하여 분석할 것이다. 또한 VaR(value at risk) 분석과 사후검정(back-testing), 결합예측영역(joint prediction region) 등을 통해서 두 개의 모형을 비교해 보고자 한다.

<sup>6</sup>교신저자: (140-742) 서울시 용산구 효창원길 52, 숙명여자대학교 통계학과, 교수. E-mail: shwang@sm.ac.kr

## 2. DCC 및 CCC 모형 소개

### 2.1. 다변량-GARCH(MGARCH)

본 절에서는 MGARCH 모형에 대한 기본 개념 및 용어, 수식을 Bauwens 등 (2006), Tsay (2005)를 참고하여 정리하였으며 자세한 내용은 송유진 등 (2008)을 참고하기 바란다.

$k$ 개의 자산에 대한  $t$ 시점에서의 수익률 벡터는  $r_t = (r_{1t}, \dots, r_{kt})^T$ 이고  $F_{t-1}$ 는  $t$ 시점 이전의 과거 정보라고 하자.  $k$ 차원의 벡터  $r_t$ 에 대한 다음과 같은 모형을 설정한다.

$$r_t = \mu_t + a_t.$$

위의 식에서  $\mu_t = E(r_t|F_{t-1})$ 는 과거의 정보  $F_{t-1}$ 이 주어졌을 때 수익률  $r_t$ 의 조건부 기댓값이며,  $a_t = (a_{1t}, \dots, a_{kt})^T$ 는  $t$ 시점에서의 충격(shock)으로서  $a_t = H_t^{1/2}u_t$ 를 만족한다.  $H_t$ 는 조건부 분산-공분산 행렬, 즉,  $H_t = \text{Cov}(a_t|F_{t-1}) = \text{Cov}(r_t|F_{t-1})$ 이고,  $k \times k$ 의 양정치(positive definite) 행렬로 변동성(volatility)을 나타낸다. 또한,  $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{kt})^T$ 는 평균이 0이고 분산-공분산행렬이  $I(k \times k$  단위행렬)인 랜덤벡터이다. 변동성을 나타내는 모형(volatility model)인 GARCH 모형에 대한 연구에서  $H_t$ 의 모형화는 매우 중요하게 여겨지며,  $H_t$ 는 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$H_t = D_t R_t D_t.$$

위의 식에서  $R_t$ 는 조건부 상관계수행렬(conditional correlation matrix)이며,  $D_t$ 는 수익률에 대한 조건부 표준 편차(conditional standard deviations)로 이루어진 대각행렬이다. MGARCH 모형은 분석에 추가되는 자산의 수에 따라 변동성 행렬의 크기와 추정해야 할 모수(parameters)의 수가 급격하게 늘어나는 문제점을 가지고 있다. 또한, 자산의 수익률에 대한 분산-공분산 행렬은 양정치(positive definite) 조건을 만족시켜야 한다. 이러한 제약 조건들 때문에 MGARCH 모형의 일반화는 결코 쉬운 문제가 아니다. MGARCH 모형 중 CCC 모형과 DCC 모형은 행렬  $D_t$ 의 조건부 분산과 행렬  $R_t$ 의 조건부 상관계수를 따로 추정함으로써 추정해야 할 모수의 수가 상대적으로 적은 모형들이다. 또한 적절한 조건들을 통해 양정치 조건들도 만족시킨다.

### 2.2. CCC 모형(Constant conditional correlation model)

다변량-GARCH 모형을 추정시 모수들의 수가 급격히 늘어나는 어려움을 극복하기 위해 Bollerslev (1990)은 조건부 상관계수들을 상수로 고정시켜 모수의 수를 줄인 CCC 모형을 제안하였다. CCC 모형에서는  $H_t$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$H_t = D_t R D_t = \left( \rho_{ij} \sqrt{h_{ii,t} h_{jj,t}} \right) \quad (2.1)$$

$$D_t = \text{diag} \left( h_{11,t}^{\frac{1}{2}}, \dots, h_{kk,t}^{\frac{1}{2}} \right),$$

여기서  $h_{ii,t}$ 는  $t$ 시점의 자산  $i$ 의 조건부 분산이며 이는 단변량-GARCH 모형을 이용하여 계산할 수 있다. 예를 들어 GARCH(1,1)을 따르는 간단한 CCC 모형을 고려하면  $D_t$  행렬의 각 대각원소들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h_{ii,t} = \omega_i + \alpha_i a_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{ii,t-1}, \quad i = 1, \dots, k$$

그리고  $R = (\rho_{ij})$ 는 모든  $i$ 에 대해서  $\rho_{ii} = 1$ 이 성립하는 대칭인 양정치 행렬이며 상수인 조건부 상관계수  $\rho_{ij}$ 를 가진다. 따라서 두 조건부 분산의 변화에 의해서만 공분산의 동태성(dynamics)이 결정되어진다.

### 2.3. DCC 모형(Dynamic conditional correlation model)

CCC 모형은 조건부 상관계수 행렬이 시간에 따라 변하지 않는다는 가정을 통해 추정의 어려움을 극복하였다는 장점을 가지지만, 이 가정은 실제 시계열 자료의 특성을 고려해 보면 실현되기는 어려워 보인다. 따라서 Engle (2002), Tse와 Tsui (2002)는 시간에 의존하는 조건부 상관계수 행렬을 만듦으로써 CCC 모형의 일반화된 형태를 제안하였다. 이 모형을 dynamic conditional correlation(DCC) 모형이라고 부른다. 본 논문에서는 Engle (2002)이 제안한 모형만을 소개하고자 한다. Engle이 제안한 DCC 모형은(또는 DCC(1,1)) 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t = \left( \rho_{ij} \sqrt{h_{ii,t} h_{jj,t}} \right) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{D}_t = \text{diag} \left( h_{11,t}^{\frac{1}{2}}, \dots, h_{kk,t}^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbf{R}_t = \text{diag} \left( q_{11,t}^{-\frac{1}{2}}, \dots, q_{kk,t}^{-\frac{1}{2}} \right) \mathbf{Q}_t \text{diag} \left( q_{11,t}^{-\frac{1}{2}}, \dots, q_{kk,t}^{-\frac{1}{2}} \right),$$

여기서 행렬  $\mathbf{D}_t$ 의  $h_{ii,t}$ 는 식 (2.1)과 같이 정의되며,  $k \times k$ 의 대칭 양정치 행렬인  $\mathbf{Q}_t = (q_{ij,t})$ 를 식 (2.3)과 같이 정의함으로써 조건부 상관계수 행렬  $\mathbf{R}_t$ 는 시간에 따라 계속 변화하는 형태를 갖게 된다.

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \alpha - \beta) \bar{\mathbf{Q}} + \alpha \mathbf{u}_{t-1} \mathbf{u}_{t-1}^T + \beta \mathbf{Q}_{t-1}, \quad (2.3)$$

여기서  $\bar{\mathbf{Q}}$ 는 표준화된 오차항  $\mathbf{u}_t = \mathbf{H}_t^{-1/2} \mathbf{a}_t$ 에 대한 비조건부 분산행렬이며,  $\alpha$ 와  $\beta$ 는  $\alpha + \beta < 1$ 을 만족하는 음이 아닌 값을 가지는 모수이다. 이변량인 경우( $k = 2$ )의 DCC 모형의 조건부 상관계수  $\rho_{12,t}$ 를 표현해보면 다음과 같다.

$$\rho_{12,t} = \frac{(1 - \alpha - \beta) \bar{q}_{12} + \alpha u_{1,t-1} u_{2,t-1} + \beta q_{12,t-1}}{\sqrt{\{(1 - \alpha - \beta) \bar{q}_{11} + \alpha u_{1,t-1}^2 + \beta q_{11,t-1}\} \{(1 - \alpha - \beta) \bar{q}_{22} + \alpha u_{2,t-1}^2 + \beta q_{22,t-1}\}}}. \quad (2.4)$$

식 (2.4)에서 분자 부분이 표준화된 오차항  $\mathbf{u}_t$ 에 대한 GARCH 모형과 비슷함을 알 수 있다. 즉, DCC 모형에서는  $h_{ii,t}$ 와는 별개로  $\mathbf{u}_t$ 에 대한 조건부 분산을 GARCH(1,1) 모형으로 추정하고 있으며, 이를  $\mathbf{u}_t$ (또는  $\mathbf{r}_t$ )의 조건부 상관계수를 계산하는데 이용하고 있다.

## 3. VaR(Value at Risk)

VaR는 이해하기 쉬우며 의미전달이 명확하기 때문에 계량경제에서 뿐만 아니라 위험관리론에서도 널리 활용되고 있다. 본 절에서의 VaR와 사후검증에 대한 기본개념 및 수식은 황선영과 박진아 (2005), 황선영 등 (2009)을 참고하여 정리하였다.

### 3.1. 정의

VaR은 ‘어떤 주어진 신뢰수준(confidence level) 및 확률분포 하에서 목표기간(target horizon)동안 정상적인 시장(normal market)을 전제로 할 때 발생 가능한 최대 손실’로 정의된다.  $L$ 기간 동안의 포트폴리오의 가치변동을  $\Delta V(L)$ 라고 할 때 신뢰수준  $100 \times (1 - \alpha)\%$ 에서의 VaR은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pr[\Delta V(L) > \text{VaR}] = 1 - \alpha.$$

### 3.2. VaR의 측정

목표기간 동안 포트폴리오에 대한 포지션에 따른 수익률의 분포가 평균이 0이고 표준편차가  $\sigma$ 인 정규분포를 따른다고 가정하면 목표기간 동안 신뢰수준  $100 \times (1 - \alpha)\%$  VaR은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\text{단변량-VaR} = -z_\alpha \cdot V_0 \cdot \sigma,$$

여기서  $z_\alpha$ 는 표준정규분포의  $100 \times (1 - \alpha)\%$  백분위수이다. 포트폴리오가  $k$ 개의 자산으로 이루어진 경우에는  $(t + 1)$ 시점에서의 포트폴리오 수익률을 가중치벡터  $\underline{w}$ 를 이용하여  $\underline{w}^T \underline{r}_{t+1}$ 로 나타낼 수 있으며, 또한  $(t + 1)$ 시점에서의 수익률  $\underline{r}_{t+1}$ 에 대하여  $\underline{r}_{t+1} \sim N(\underline{r}_t(\hat{1}), \mathbf{H}_t(\hat{1}))$ 와 같은 조건부 분포를 이용하여 목표기간 1일에 대한 VaR 값을 계산할 수 있다.  $\underline{r}_t(\hat{1})$ 은 수익률 벡터에 대한 1-시차 조건부 예측치이며  $\mathbf{H}_t(\hat{1})$ 은 수익률 벡터에 대한 1-시차 조건부 분산-공분산 행렬이다. 신뢰수준  $100 \times (1 - \alpha)\%$ 에서의 다변량-VaR은 다음식과 같이 계산된다.

$$\text{다변량-VaR} = \underline{w}^T \underline{r}_t(\hat{1}) - z_\alpha \sqrt{\underline{w}^T \mathbf{H}_t(\hat{1}) \underline{w}}$$

본 논문에서는  $\mathbf{H}_t(\hat{1})$ 의 값을 식 (2.1), (2.2), (2.3)으로부터 예측하여 VaR을 계산하고 있다.

### 3.3. 사후검증(Back-testing)

VaR 모형의 정확성을 검증하는 과정을 사후검증이라고 부르며 가장 간편하게 VaR의 정확성을 검증할 수 있는 방법은 실패율(failure rate)을 이용하는 것이다. 실패율 방법은 주어진 모형을 이용하여 예측한 VaR 값보다 실제 수익률이 더 작게 나오는 것을 모형의 실패라 보고 검증 기간 동안 그 횟수를 세어 실패율을 측정한다. 이 때 실패율이 VaR 값 계산시 설정한 신뢰수준과 비슷하게 나와야 위험을 예측하는데 있어서 정확한 모형이라고 평가한다. 만약 실패율이 신뢰수준보다 크면 VaR 모형이 자산의 손실을 과소예측하는 것이므로 위험관리 측면에서 모형의 유용성이 떨어진다고 볼 수 있다. 반대로, 실패율이 신뢰수준 보다 작으면 VaR 모형이 보수적으로 위험을 과대예측한다고 평가되며, 과대예측된 위험을 대비하여 금융기관들이 불필요한 안전조치들을 취하게 되기 때문에 이 경우 역시 바람직하지 않다.

## 4. 사례분석

이 장에서는 국내 주가와 환율 자료에 대해 CCC 모형과 DCC 모형( $k = 2$ )을 적합시키고, 두 모형을 비교해 보고자 한다. 비교를 위해 모형 적합 후에 VaR에 대한 사후검증과 결합예측영역을 계산하였으며, 분석에는 SAS/ETS와 R의 패키지 CCGARCH을 이용하였다.

### 4.1. 자료

분석에 사용된 자료는 국내 대기업 16개 주가 및 주가지수, 환율에 대한 총 20개의 수익률 자료이다. 2005년 1월 3일부터 2009년 6월 2일까지의 일별 자료를 로그 차분 후 100을 곱하여 얻어진 수익률(%)을 사용하였다. 16개의 기업은 각 분야별로 대표할 수 있는 기업으로 분석에 사용된 자료들은 표 4.1과 같다. 그림 4.1부터 4.4까지는 총 10개 분야의 자료들 가운데 4개 분야의 수익률에 대해 100개의 일별자료를 기준으로 moving window 기법(MW100)을 이용해 계산한 상관계수를 나타낸 그래프이다. 이것은 시간에 따른 상관계수의 변화를 볼 수 있어서 DCC 모형과 같은 동태적인 상관관계의 모형의 필요성을 인지하는데 이용할 수 있다. Moving window 기법으로 그려진 그래프 위에 시간축과 평행하게 실선으로 나타난 것은 두 수익률 사이의 비조건부 상관계수이다. 세계적 경제 위기가 발생한 최근

표 4.1. 자료 설명

분야	자료	분야	자료
주가지수	KOSPI, KOSDAQ	환율	원/달러, 원/엔
증권	대우증권, 현대증권	은행	우리금융, 신한지주
전자	삼성전자, LG전자	통신	SKT, KTF
중공업	한진중공업, 삼성중공업	건설	현대건설, GS건설
화학	S-OIL, 호남석유	식품	크라운제과, 롯데제과

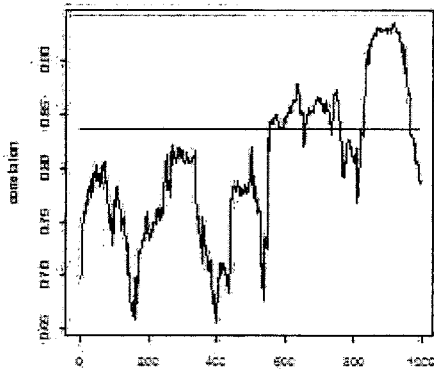


그림 4.1. MW100: KOSPI-KOSDAQ

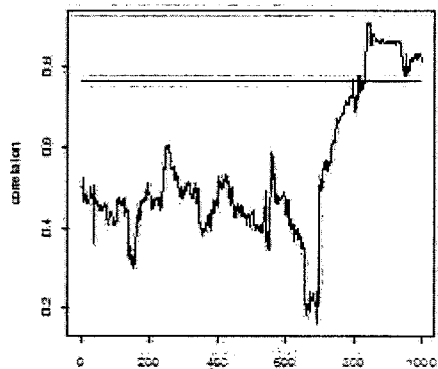


그림 4.2. MW100: 원/달러-원/엔

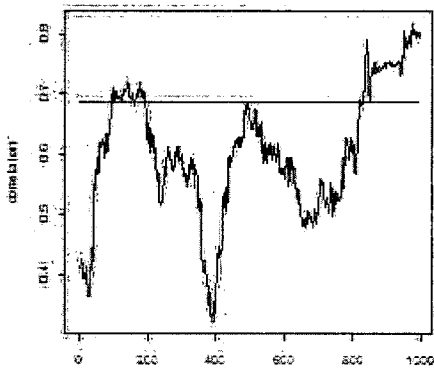


그림 4.3. MW100: 우리금융-신한지주

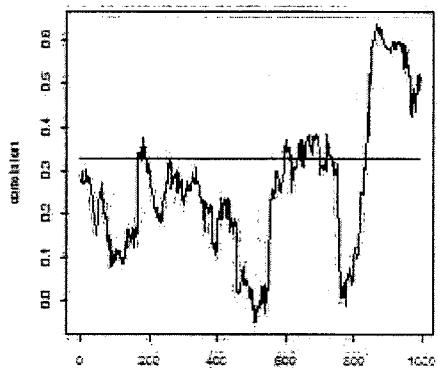


그림 4.4. MW100: S-OIL-호남석유

약 1년 동안의 두 수익률 사이의 상관정도가 매우 높아졌으며 상관계수들이 시간에 따라 빠르게 변하고 있음을 볼 수 있다. 또한 상관계수의 크기들을 고려한다면, 주가지수 자료에 비해 환율이나 은행권 자료의 상관계수가 그 변동폭이 매우 크다는 것을 알 수 있다. 따라서, 이 자료들은 시간의 변화에 따른 상관관계를 일정한 상수값으로 추정하는 CCC 모형보다는 DCC 모형과 같이 동태적 상관관계를 고려한 모형이 더 알맞을 것으로 예상된다.

표 4.2. CCC 모형과 DCC 모형 적합결과

CCC 모형				DCC 모형				
$\omega_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\rho_{ij}$	$\omega_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\alpha$	$\beta$
<b>KOSPI-KOSDAQ</b>								
0.07656	0.09435	0.86730	0.79477	0.03240	0.09642	0.89168	0.04976	0.91238
0.25054	0.26971	0.65959		0.18200	0.32600	0.65971		
<b>원/달러-원/엔</b>								
0.01910	0.09017	0.88426	0.55360	0.01090	0.11601	0.87692	0.02655	0.96630
0.00298	0.12183	0.87563		0.00555	0.10559	0.87363		
<b>대우증권-현대증권</b>								
0.27129	0.04901	0.92816	0.85449	0.15744	0.07643	0.91440	0.08610	0.85294
0.33037	0.04594	0.92998		0.37644	0.07947	0.89659		
<b>우리금융-신한지주</b>								
0.17753	0.09654	0.87714	0.60711	0.09669	0.10805	0.88346	0.02672	0.96576
0.05252	0.05900	0.93141		0.02345	0.06999	0.92921		
<b>삼성전자-LG전자</b>								
0.05092	0.04356	0.94271	0.48999	0.02420	0.04651	0.94834	0.02446	0.96952
0.06299	0.06304	0.92547		0.03803	0.06739	0.92755		
<b>SKT-KTF</b>								
0.08322	0.05213	0.91954	0.41128	0.08360	0.06330	0.90940	0.01874	0.94670
1.36362	0.14048	0.54944		1.14680	0.14600	0.59640		
<b>한진중공업-삼성중공업</b>								
0.30446	0.07898	0.88800	0.64939	0.12630	0.09040	0.89973	0.03233	0.95351
0.29864	0.07038	0.89757		0.18170	0.07931	0.90402		
<b>현대건설-GS건설</b>								
0.70807	0.06819	0.86411	0.58686	0.45753	0.08606	0.87341	0.02676	0.96468
0.25759	0.06003	0.91721		0.11784	0.06898	0.92318		
<b>S-OIL-호남석유</b>								
0.13266	0.12131	0.84890	0.27278	0.11848	0.12871	0.84790	0.01827	0.95404
0.33382	0.08225	0.88518		0.27111	0.08406	0.89132		
<b>크라온제과-롯데제과</b>								
1.29884	0.24682	0.62911	0.16463	1.26232	0.23833	0.63969	$1.47 \times 10^{-14}$	0.98572
0.28030	0.19043	0.79227		0.29784	0.20168	0.78135		

#### 4.2. MGARCH 모형의 적합

표 4.2는 각각의 수익률에 대해서 AR(1)-CCC 모형과 AR(1)-DCC 모형을 적합시킨 결과를 정리한 것이다. MGARCH 모형을 적합시킬 때 ARCH류의 수익률 자료의 경우 자기 상관성이 높기 때문에, 자기 상관을 제거하기 위해 AR(1)모형을 적합시킨 후 분석하였다. 본 논문에서는 변동성 모형에 대해 초점을 맞추고 있으므로 조건부 기댓값  $\mu_t$ 에 대한 적합 결과는 생략하였다. 모형의 적합에 대한 포트맨토 검정 결과 각각의 자료에 두 모형을 적용시키는 것에 무리가 없음을 확인할 수 있었다(결과는 생략한다.). 추정된 CCC 값( $\rho_{ij}$ )을 보면 대부분 두 수익률 간에 높은 상관관계를 갖고 있으며, [KOSPI-KOSDAQ]과 [대우증권-현대증권]의 경우 다른 자료들에 비해 상대적으로 더 높은 상관관계 값이 추정되었다. 그림 4.5부터 4.8까지는 DCC 모형과 CCC 모형에서의 추정된 조건부 상관계수(conditional correlation)을 보여주는 그래프이다. 시간에 따라 그 값이 변하고 있는 그래프는 DCC 모형에서 추정된 조건부 상관계수이며 시간축에 평행하게 표현되는 그래프는 CCC 모형으로 추정된 조건부 상관계수

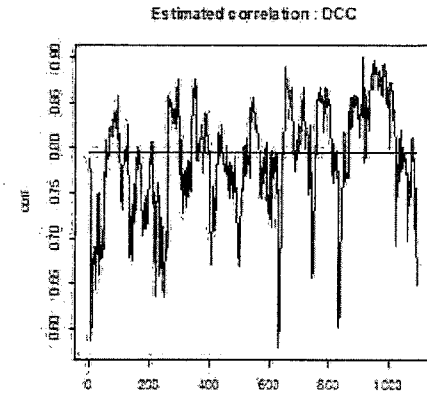


그림 4.5. DCC: KOSPI-KOSDAQ

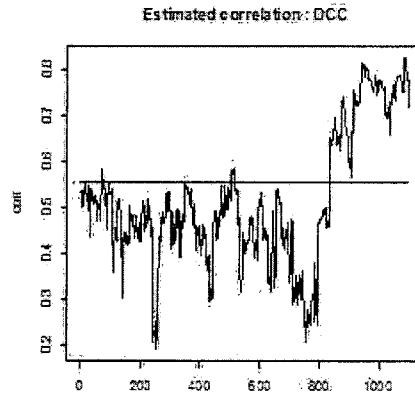


그림 4.6. DCC: 원/달러-원/엔

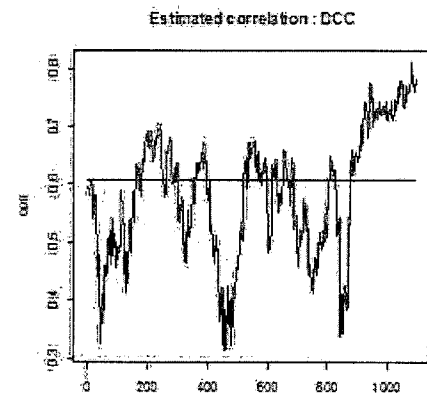


그림 4.7. DCC: 우리금융-신한지주

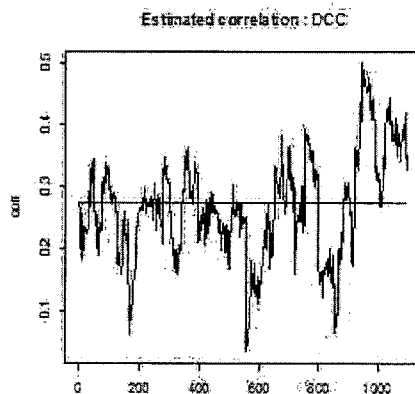


그림 4.8. DCC: S-OIL-호남석유

이다. 이 그래프들은 앞의 그림 4.1부터 4.4까지와 비슷함을 확인할 수 있다.

### 4.3. VaR의 추정과 사후검증

CCC 모형과 DCC 모형의 비교 방법으로 rolling window 기법을 사용하여 VaR 계산을 한 후 실패율 방법을 이용하여 사후검증을 하였다. 2005년 1월 3일부터 2008년 8월 11일까지의 데이터를 기준으로 95% 신뢰수준에서 VaR을 예측한 후 실제 수익률 값이 추정된 VaR 값보다 더 작은지의 여부로 실패율을 계산한다. 이러한 방식을 rolling window 기법을 통하여 2008년 8월 12일부터 2009년 6월 2일까지의 199개의 수익률에 대하여 검증하였다. 95%신뢰수준에서 계산한 것이므로 실패율이 5%에 가까울수록 각 모형에서 위험에 대한 예측이 잘 되었다고 판단할 수 있다. 표 4.3은 DCC 모형과 CCC 모형의 실패율을 계산하여 정리한 것이다. 두 모형의 실패율이 비슷하게 나왔으나 대부분의 경우 DCC 모형의 실패율이 5%에 더 가깝게 나오는 것을 확인할 수 있다. 특히, [원/달러-원/엔] 자료와 [우리금융-신한지주], [현대건설-GS건설]의 경우 실패율이 약 3%p 만큼이나 차이가 나면서 DCC 모형이 5%에 더 가깝게 추정함을 볼 수 있다. 따라서 자산에 대한 손실을 예측하는데 있어서 DCC 모형이 CCC 모형에 비해 좀 더 정확한 결과를 주는 것을 알 수 있다.

표 4.3. 95% VaR의 실패율

자료	CCC 모형 (실패율, %)	DCC 모형 (실패율, %)
KOSPI - KOSDAQ	10.55	9.04
원/달러-원/엔	9.05	6.03
대우증권-현대증권	8.58	8.08
우리금융-신한지주	10.60	7.57
삼성전자-LG전자	4.02	3.51
SKT-KTF	6.03	6.03
한진중공업-삼성중공업	10.55	9.04
현대건설-GS건설	11.61	8.08
S-OIL-호남석유	7.54	6.03
크라운제과-롯데제과	8.58	8.58

표 4.4. 결합예측영역 넓이

자료	CCC 모형	DCC 모형
KOSPI - KOSDAQ	22.2129	28.3505
원/달러-원/엔	16.6528	15.8841
대우증권-현대증권	132.1956	124.7967
우리금융-신한지주	183.3530	157.5272
삼성전자-LG전자	81.4665	80.8219
SKT-KTF	43.3200	44.6228
한진중공업-삼성중공업	95.8705	99.4906
현대건설-GS건설	148.8563	157.9131
S-OIL-호남석유	90.1848	89.1235
크라운제과-롯데제과	67.3701	68.2318

#### 4.4. 결합예측치 영역

시점  $n$ 까지의 자료가 주어졌을 때,  $l$ -시차 후의 수익률과 변동성의 예측값을 각각  $\hat{r}_n(l)$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_n(l)$ 이라고 정의할 때 1-시차 후의 수익률  $r_{n+1}$ 의 조건부 분포는 다음과 같다.

$$r_{n+1}|F_n \sim N(\hat{r}_n(1), \hat{\mathbf{H}}_n(1)).$$

이를 바탕으로 MGARCH 모형의 예측치에 대한 신뢰영역을 그리면 이변량( $k=2$ ) 정규밀도의 등고선인 타원으로 표현될 수 있다. 반면에 단변량의 경우 두 수익률에 대한 예측치의 신뢰구간을 한 그래프에 그리게 되면 직사각형으로 나타난다. 예측치의 신뢰구간에 대한 영역의 넓이가 좁을수록 모형이 더욱 정확하게 예측한다고 판단할 수 있다.

표 4.4는 DCC 모형과 CCC 모형을 적합시킨 후 1-시차 후의 수익률에 대한 95% 신뢰수준의 결합예측영역의 넓이를 정리한 것이다. 대부분의 경우 DCC 모형과 CCC 모형이 크게 차이하지 않으나 [대우증권-현대증권], [우리금융-신한지주] 자료에서는 DCC 모형의 예측영역 면적이 CCC 모형의 면적에 비해 많이 작으며 이와는 반대로 [KOSPI-KOSDAQ], [현대건설-GS건설]인 경우에는 CCC 모형의 면적이 오히려 DCC 모형의 면적보다 많이 작다. 즉, 결합예측영역 기준에서는 DCC 모형이 CCC 모형에 비해 더 좋은 결과를 주고 있다고 보기는 힘들다.

그림 4.9부터 4.12까지는 단변량-GARCH(1,1), CCC 모형과 DCC 모형의 결합예측영역을 함께 표시한 것이다. 직사각형이 단변량-GARCH(1,1)를 나타내며, 실선으로 표시되는 타원이 CCC 모형의 예측영역, 점선으로 표시되는 타원이 DCC의 예측영역이다. 단변량-GARCH 모형과 비교하여 MGARCH



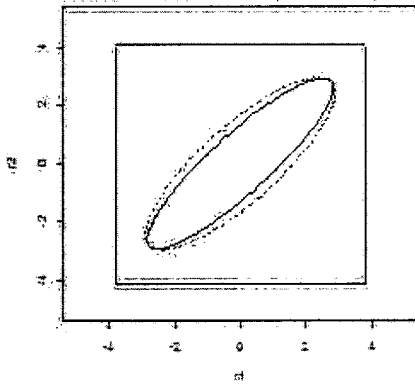


그림 4.9. 결합예측영역 : KOSPI-KOSDAQ

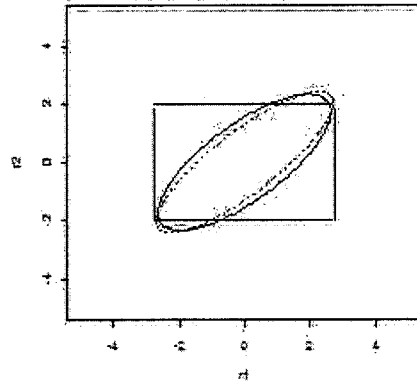


그림 4.10. 결합예측영역 : 원/달러-원/엔

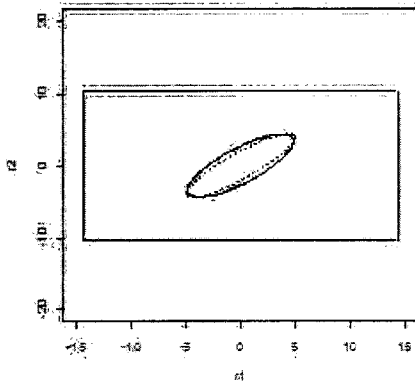


그림 4.11. 결합예측영역 : 우리금융-신한지주

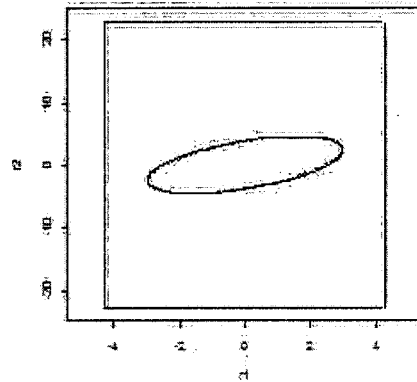


그림 4.12. 결합예측영역 : S-OIL-호남석유

모형이 훨씬 더 면적이 좁은 것을 확인할 수 있다. [원/달러-원/엔] 자료와 [우리금융-신한지주] 자료는 VaR의 사후검증과 결합예측치 영역 결과에서 모두 DCC 모형이 CCC 모형에 비해 아주 좋은 예측능력을 갖고 있음을 보여준다. 반면, [KOSPI-KOSDAQ] 자료는 VaR의 사후검증에서는 두 모형 간에 큰 차이가 없었으며 결합예측영역 결과에서는 CCC 모형이 DCC 모형보다 훨씬 더 좋은 결과를 보이고 있다. 이는 [원/달러-원/엔] 자료와 [우리금융-신한지주] 자료들은 다른 자료들에 비해 시간에 따른 상관계수 값들이 큰 폭으로 변동하며, [KOSPI-KOSDAQ] 자료는 상관계수의 변동 폭이 크지 않음과 관계되어 보인다. 즉, 상관계수가 시간에 따라 큰 변화를 보이는 자료들은 조건부 상관계수를 일정한 상수값으로 가정하는 CCC 모형보다는 식 (2.2)와 (2.3)에서 정의된 것과 같이 시간에 따른 상관계수의 변화를 모형화한 DCC 모형을 사용하였을 때 더 정확한 예측 결과를 얻을 수 있다고 보여진다.

## 5. 결론

본 논문에서는 수익률의 변동성을 모형화하는 동시에 공변동성(comovement)도 함께 고려하는 다변량-GARCH 모형을 소개하였다. 특히, 조건부 상관계수 행렬이 시간에 따라 일정하다는 가정을 통해 모수 추정의 어려움을 줄인 CCC 모형과 시간에 의존하여 변화하는 조건부 상관계수 행렬을 제안하는 DCC

모형을 중점적으로 살펴보았다. 또한, 이들 모형을 국내 20개의 국내 금융 시계열 자료에 적용시켜 봄으로써 두 모형의 예측 능력을 비교하였다. 비교 방법으로는 VaR의 사후검증과 결합예측영역의 크기를 기준으로 사용하였다. 단순히 1-시차 후의 예측을 하는데 있어서는 DCC 모형과 CCC 모형이 많이 차이나지 않으며 CCC 모형이 오히려 더 좋은 결과를 주는 경우도 있었다. 하지만 위험에 대한 예측을 하는데 있어서는 대부분의 경우 DCC 모형이 CCC 모형에 비해 더 우수한 예측 능력을 보여주었다. 또한 분석 대상인 자료의 상관계수 값이 큰 폭으로 변화하는 경우에는 CCC 모형보다는 DCC 모형을 사용하는 것이 더 정확한 예측 결과를 줄 수 있음을 확인할 수 있었다. CCC 모형과 DCC 모형 사이의 비교 분석을 하는 것 외에 상관계수행렬의 추정 방법에 따라 달라지는 다양한 DCC 모형들 간의 비교를 해보는 것도 추후 고려해 볼 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- 송유진, 최문선, 황선영 (2008). 차원축소를 통한 시계열의 변동성 분석 및 응용, <한국 통계학회 논문집>, **15**, 825-835.
- 황선영, 박진아 (2005). VaR(Value at Risk) for Korean financial time series, <한국 데이터정보과학회지>, **16**, 283-288.
- 황선영, 최문선, 도종두 (2009). 사후검증(Back-testing)을 통한 다변량-GARCH 모형의 평가: 사례분석, <응용 통계연구>, **22**, 261-270.
- Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: A survey, *Journal of Applied Econometrics*, **21**, 79-109.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model, *The Review of Economics and Statistics*, **72**, 498-505.
- Bollerslev, T., Engle, R. F. and Wooldridge, J. M. (1998). A capital asset pricing model with time-varying covariances, *Journal of Political Economy*, **96**, 116-131.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987-1007.
- Engle, R. F. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate GARCH models, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 339-350.
- Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH, *Econometric Theory*, **11**, 122-150.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, New York.
- Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C. (2002). A multivariate GARCH model with time-varying correlations, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 351-362.

# Analysis of Multivariate-GARCH via DCC Modelling

S. M. Choi<sup>1</sup> · S. Y. Hong<sup>2</sup> · M. S. Choi<sup>3</sup> · J. A. Park<sup>4</sup> · J. S. Baek<sup>5</sup> · S. Y. Hwang<sup>6</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

<sup>2</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

<sup>3</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

<sup>4</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

<sup>5</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

<sup>6</sup>Department of Statistics, Sookmyung Women's University

(Received July 2009; accepted August 2009)

---

## Abstract

Conditional correlation between financial time series plays an important role in risk management, asset allocation and portfolio selection and therefore diverse efforts for modeling conditional correlations in multivariate-GARCH processes have been made in last two decades. In particular, CCC (*cf.* Bollerslev, 1990) and DCC(dynamic conditional correlation, *cf.* Engle, 2002) models have been commonly used since they are relatively parsimonious in the number of parameters involved. This article is concerned with DCC modeling for multivariate GARCH processes in comparison with CCC specification. Various multivariate financial time series are analysed to illustrate possible advantages of DCC over CCC modeling.

**Keywords:** Multivariate-GARCH, CCC(constant conditional correlation), DCC(dynamic conditional correlation).

---

---

<sup>6</sup>Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, 52 Hyochangwon-gil, Yongsan-gu, Seoul 140-742, Korea. E-mail: shwang@sm.ac.kr