

2차원 벡터 필드의 효율적인 가시화 방법

정 일 흥[†]

요 약

본 논문에서는 2차원 벡터 필드의 탄젠트 곡선을 계산하는 효율적이고 정확한 방법을 제안한다. 탄젠트 곡선 상의 정확한 값을 구하지 못하고 단지 탄젠트 곡선의 근사치를 구하는 Runge-Kutta 같은 종래의 방법과는 달리 여기서 제안한 방법은 2D 삼각형에서 벡터 필드가 선형적으로 변한다는 가정 하에 탄젠트 곡선상의 정확한 값을 계산한다. 새로 제안한 방법은 벡터 필드가 2D 삼각형에서 선형적으로 변한다고 가정한다. 우선 이 방법은 2D에서 사각형 셀을 2개의 삼각형 셀로 분해하는 것을 요구한다. 임계점은 각 삼각형의 간단한 선형 시스템을 풀어서 간단하게 구할 수 있다. 이 방법은 이전 삼각형에서 계산된 탄젠트 곡선상의 점들을 기초로 다음 삼각형에서 탄젠트 곡선상의 연속적인 점들을 생성함으로써 출구 점을 구한다. 탄젠트 곡선상의 점들은 각 삼각형의 명시해에 의해서 계산되었기 때문에 새로운 방법은 2D 벡터 필드를 가시화하는데 정확한 위상을 마련한다.

An Efficient Visualization Method of Two-Dimensional Vector Fields

Il-Hong Jung[†]

ABSTRACT

This paper presents the development of certain highly efficient and accurate method for computing tangent curves for two-dimensional vector fields. Unlike convention methods, such as Runge-Kutta, for computing tangent curves which produce only approximations, the method developed herein produces exact values on the tangent curves based on piecewise linear variation over a triangle in 2D. This new method assumes that the vector field is piecewise linearly defined over a triangle in 2D. It is also required to decompose the rectangular cell into two triangular cells. The critical points can be easily found by solving a simple linear system for each triangle. This method is to find exit points by producing a sequence of points on the curve with the computation of each subsequent point based on the previous. Because points on the tangent curves are calculated by the explicit solution for each triangle, this new method provides correct topologies in visualizing 2D vector fields.

Key words: vector fields(벡터 필드), explicit solution(명시해), tangent curves(탄젠트 곡선), visualization(가시화)

1. 서 론

오늘날 벡터 필드의 시각적 표현 방법은 해양 연구, 대기 연구, 천체 연구로부터 기온 변화에 따른 금속의 속성변화를 연구하는데 까지 다양한 연구 분야에 적용할 수 있는 매우 중요한 연구과제이다. 벡

터 필드를 시각적으로 표시하기 위해 탄젠트 곡선의 정확한 계산 방법에 대한 연구가 매우 중요하다.

탄젠트 곡선은 벡터 필드의 이해를 돕는 유용한 도구로 사용되어지고 있다. 탄젠트 곡선은 벡터 필드의 위상(topology) [1-4]을 표현하는데 주로 사용된다. 탄젠트 곡선의 위상은 임계점(critical point)과 탄

※ 교신저자(Corresponding Author): 정일흥, 주소: 대전광역시 동구 용운동 96-3(300-716), 전화: 042)280-2548, FAX: 042)280-2889, E-mail: ijung@dju.kr

접수일: 2009년 5월 7일, 수정일: 2009년 6월 12일
완료일: 2009년 7월 22일

[†] 종신회원, 대전대학교 컴퓨터공학과 부교수

젠트 곡선으로 구성되어 있다. 위상적 표현의 장점은 벡터 필드의 임계점과 임계점들을 연결하는 탄젠트 곡선이 주어지면, 다른 탄젠트 곡선의 형태와 어느 정도 벡터 필드 전체의 구조를 추론할 수 있다[1-4].

일반적으로 탄젠트 곡선을 계산하기 위해서 Runge-Kutta 방법 또는 Euler 방법과 같은 수치 해석적 방법[5]을 이용하기 때문에 탄젠트 곡선 상의 정확한 값을 구하지 못하고 단지 탄젠트 곡선의 근사치를 구했다. 이로 인해 잘못된 탄젠트 곡선을 계산하는 오류를 범하는 경우가 생긴다. 본 논문에서 제안하는 탄젠트 곡선을 계산하는 방법은 탄젠트 곡선을 정의하는 상미분 방정식의 명시해(explicit solution) [6-8]를 구하기 때문에 탄젠트 곡선 상의 정확한 값을 계산할 수 있다. 본 논문에서는 탄젠트 곡선을 정의하는 상미분 방정식의 명시해를 데카르트 좌표계와 무게중심 좌표계[9]에서 구하였다.

본 논문의 구성으로 2장에서는 탄젠트 곡선을 정의하는 상미분 방정식의 명시해(explicit solution)를 구하기 위해 필요한 수학적 배경에 대해 설명하고 3장에서는 2차원 벡터 필드에 대한 상미분 방정식을 풀어 구한 명시해에 대해 서술하며 4장에서는 제안한 방법과 기존의 수치 해석적 방법과의 비교 분석 및 성능을 검토한다. 끝으로 5장에서는 결론 및 향후의 연구 과제를 제시한다.

2. 수학적 배경

2.1 데카르트 좌표계에서 탄젠트 곡선

본 논문의 주안점은 2차원(삼각형)의 벡터 필드에 대한 탄젠트 곡선의 계산이다. 본 논문에서 제안하는 방법의 기초가 되는 중요한 개념은 2D에서 사각형 셀을 2개의 삼각형들의 집합으로 분해하는 것과 각 삼각형 내에서 벡터 필드가 선형적인 변화를 한다고 하는 가정이다[8,10,11].

이러한 가정 하에서 탄젠트 곡선을 정의하는 방정식은 상수 계수를 갖는 선형 상미분 방정식이다. 벡터 필드가 다음과 같이 주어지면

$$V(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B,$$

여기서 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 이다.

삼각형에서의 탄젠트 곡선 $P(t)$ 는

$$P(t) = V(P(t)) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + B \quad (1)$$

이고 초기 값은 $P(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ 이다. 일반적으로 상미분 방정식은 무수한 해가 존재하나 초기 값을 갖는 상미분 방정식은 특별한 해가 존재한다[7].

만약에 우리가 그림 1에서 보여주는 것같이 각 삼각형의 좌표 값을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 그리고 각 꼭지점에서의 벡터 값을 (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , (u_3, v_3) 라고 가정하면, 삼각형에 대한 2×2 행렬 A 와 2×1 행렬 B 는 삼각형의 꼭지점들과 그 점들에서의 벡터 필드의 값으로부터 구해진다.

2.2 무게중심 좌표계에서 탄젠트 곡선

먼저 무게중심 좌표계(Barycentric coordinate)의 정의에 대해 알아보자. 꼭지점 P_i , P_j , P_k 와 네 번째 점 $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 을 가진 삼각형에서 P 에 대한 무게중심 좌표 b_i , b_j , b_k 는 다음과 같이 정의된다[9].

$$P = b_i P_i + b_j P_j + b_k P_k, \quad (2)$$

$$b_i + b_j + b_k = 1.$$

무게중심좌표는 Cramer의 법칙을 적용하여 다음과 같이 구할 수 있다[9].

$$b_i = \frac{\text{area}(T_{pj k})}{\text{area}(T_{ijk})}, \quad b_j = \frac{\text{area}(T_{ip k})}{\text{area}(T_{ijk})}, \quad b_k = \frac{\text{area}(T_{ij p})}{\text{area}(T_{ijk})},$$

여기서 T_{ijk} 는 꼭지점 P_i , P_j , P_k 을 가진 삼각형이다.

또한 무게중심 좌표는 행렬식(determinants)을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$b_i = \frac{\begin{vmatrix} x - x_k & x_j - x_k \\ y - y_k & y_j - y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i - x_k & x_j - x_k \\ y_i - y_k & y_j - y_k \end{vmatrix}}, \quad b_j = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & x_j - x_i \\ y - y_i & y_j - y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{vmatrix}}, \quad b_k = \frac{\begin{vmatrix} x - x_i & x_j - x_j \\ y - y_i & y_j - y_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_k - x_i & x_j - x_j \\ y_k - y_i & y_j - y_j \end{vmatrix}}$$

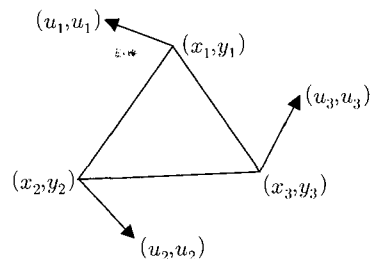


그림 1. 삼각형에 대한 관례적 표기

무계중심좌표 b_i, b_j, b_k 는 단지 x, y 의 선형결합이기 때문에 식(2)은 다음과 같이 변경할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P_i b_i(x,y) + P_j b_j(x,y) + P_k b_k(x,y) = \begin{bmatrix} P_i & P_j & P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i(x,y) \\ b_j(x,y) \\ b_k(x,y) \end{bmatrix}$$

무계중심좌표로 구성되는 열벡터를 다음과 같이 정의하자.

$$b(x,y) = \begin{bmatrix} b_i(x,y) \\ b_j(x,y) \\ b_k(x,y) \end{bmatrix}$$

각 꼭지점에서의 벡터 값의 무계중심좌표들로 구성되는 3×3 행렬은 다음과 같이 표시된다.

$$V = [b(V_i + P_i) - b(P_i) \quad b(V_j + P_j) - b(P_j) \quad b(V_k + P_k) - b(P_k)]$$

삼각형에서 선형으로 변하는 벡터 필드는 무계중심좌표로 다음과 같이 표현된다.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} P_i & P_j & P_k \end{bmatrix} Vb(x,y)$$

여기서 3×3 행렬 V 는 추가로 0의 고유값을 가진 A 와 같은 고유값(eigenvalue) 갖는다.

데카르트 좌표계에서 정의된 탄젠트 곡선 $P(t)$ 는 무계 중심 좌표계에서는 다음과 같이 표시된다.

$$p(t) = b(P(t)) = \begin{bmatrix} b_i(t) \\ b_j(t) \\ b_k(t) \end{bmatrix}$$

무계중심 좌표계의 삼각형에서 탄젠트 곡선 $p(t)$ 는

$$p'(t) = Vp(t) \tag{3}$$

이고 초기 값은 $p(0) = b(P_0) = p_0$ 이다.

3. 선형으로 변하는 2D 벡터필드의 명시해

이 장에서는 탄젠트 곡선을 정의하는 상미분방정식을 데카르트 좌표계와 무계중심좌표계에서의 일반적인 해에 대해 서술하고 고유값에 따라 5가지 경우로 분류하고 그에 대해 명시해를 제시한다.

3.1 데카르트 좌표계에서 삼각형에 대한 명시해

탄젠트 곡선을 정의하는 상미분 방정식 (1)의 일반적인 해는 다음의 형태를 가진다.

$$P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = E_1 \phi_1(t) + E_2 \phi_2(t) + C$$

여기서 함수 ϕ_1, ϕ_2 와 계수 E_1, E_2 는 행렬 A 의 고유값(eigenvalue)[12]에 따라 결정된다. 2차원 벡터 필드에서 이러한 고유값에 따라 탄젠트 곡선의 궤적을 5가지로 분류한다. 5가지 경우에 대한 분류와 그에 따른 명시해는 다음과 같이 구하였다.

Case 1) 제로가 아닌 두 개의 실근

$$(0 \neq r_1 \neq r_2 \neq 0)$$

$$P(t) = E_1 e^{tr_1} + E_2 e^{tr_2} + P_c$$

$$E_1 = \left(\frac{A - r_2 I}{r_1 - r_2} \right) (P_0 - P_c),$$

$$E_2 = \left(\frac{A - r_1 I}{r_2 - r_1} \right) (P_0 - P_c),$$

$$AP_c + B = 0.$$

Case 2) 제로가 아닌 한 개의 실근과 한 개가 제로인 실근 ($0 = r_1, r_2 \neq 0$)

$$P(t) = E_1 t + E_2 (e^{tr_2} - 1) + P_0$$

$$E_1 = \left(I - \frac{A}{r_2} \right) B,$$

$$E_2 = \frac{A}{r_2} \left(P_0 + \frac{B}{r_2} \right).$$

Case 3) 두 개가 제로인 중근 ($r_1 = 0 = r_2$)

$$P(t) = E_1 t + E_2 t^2 + P_0$$

$$E_1 = AP_0 + B,$$

$$E_2 = \frac{AB}{2}.$$

Case 4) 제로가 아닌 두 개의 중근 ($r_1 = r_2 \neq 0$)

$$P(t) = E_1 e^{tr_1} + E_2 t e^{tr_1} + P_c$$

$$E_1 = P_0 - P_c,$$

$$E_2 = (A - r_1 I)(P_0 - P_c),$$

$$AP_c + B = 0.$$

Case 5) 두 개의 허근 ($\mu + \lambda i, \mu - \lambda i, \lambda \neq 0$)

$$P(t) = E_1 e^{\mu t} \cos(\lambda t) + E_2 e^{\mu t} \sin(\lambda t) + P_c$$

$$E_1 = P_0 - P_c,$$

$$E_2 = \frac{(A - \mu I)}{\lambda} (P_0 - P_c),$$

$$AP_c + B = 0.$$

3.2 무계중심 좌표계에서 삼각형에 대한 명시해

데카르트 좌표계와 비슷하게 무계중심 좌표계에서 탄젠트 곡선을 정의하는 상미분 방정식 (2)의 일반적인 해는 다음의 형태를 가진다.

$$p(t) = e_1\phi_1(t) + e_2\phi_2(t) + c$$

여기서 함수 ϕ_1, ϕ_2 와 계수 e_1, e_2 는 행렬 A 의 고유값(eigenvalue)[12]에 따라 결정된다. 데카르트 좌표계와 비슷하게 무계중심 좌표계에서도 이러한 고유값에 따라 탄젠트 곡선의 궤적을 5가지로 분류한다. 무계중심 좌표계에서 5가지 경우에 대한 분류와 그에 따른 명시해는 다음과 같이 구하였다.

Case 1) 제로가 아닌 두 개의 실근

$$(0 \neq r_1 \neq r_2 \neq 0)$$

$$p(t) = e_1 e^{tr_1} + e_2 e^{tr_2} + p_c$$

$$e_1 = \frac{V}{r_1} \left(\frac{V - r_2 I}{r_1 - r_2} \right) p_0,$$

$$e_2 = \frac{V}{r_2} \left(\frac{V - r_1 I}{r_2 - r_1} \right) p_0,$$

$$Vp_c = 0.$$

Case 2) 제로가 아닌 한 개의 실근과 한 개가 제로인 실근 ($0 = r_1, r_2 \neq 0$)

$$p(t) = e_1 t + e_2 (e^{tr_2} - 1) + p_0$$

$$e_1 = \left(I - \frac{V}{r_2} \right) p_0,$$

$$e_2 = \frac{V^2}{r_2} p_0.$$

Case 3) 두 개가 제로인 중근 ($r_1 = 0 = r_2$)

$$p(t) = e_1 t + e_2 t^2 + p_0$$

$$e_1 = Vp_0,$$

$$e_2 = \frac{V^2}{2} p_0.$$

Case 4) 제로가 아닌 두 개의 중근 ($r_1 = r_2 \neq 0$)

$$p(t) = e_1 e^{tr_1} + e_2 t e^{tr_1} + p_c$$

$$e_1 = \frac{V}{r_1} \left(2I - \frac{V}{r_1} \right) p_0,$$

$$e_2 = V \left(\frac{V}{r_1} - I \right) p_0,$$

$$Vp_c = 0.$$

Case 5) 두 개의 허근 ($\mu + \lambda i, \mu - \lambda i, \lambda \neq 0$)

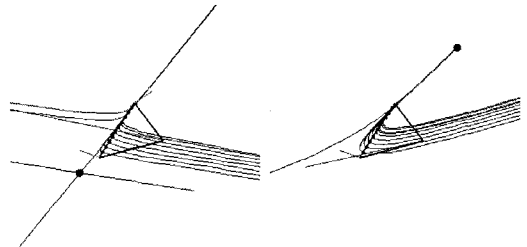
$$p(t) = e_1 e^{\mu t} \cos(\lambda t) + e_2 e^{\mu t} \sin(\lambda t) + p_c$$

$$e_1 = \left(\frac{V(2\mu I - V)}{\mu^2 + \lambda^2} \right) p_0,$$

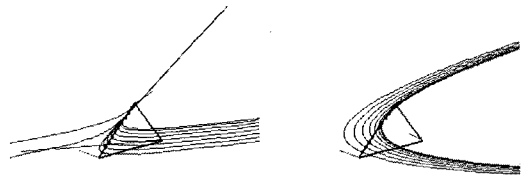
$$e_2 = \left(\frac{V(\mu V - (\mu^2 - \lambda^2)I)}{\lambda(\mu^2 + \lambda^2)} \right) p_0,$$

$$VP_c = 0.$$

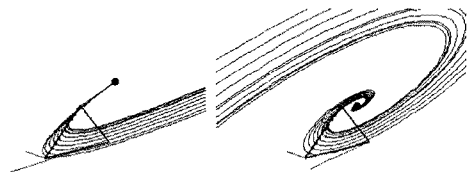
그림 2는 위의 다섯 가지 경우의 탄젠트 곡선의 궤적을 보여준다. 그림 2의 각 이미지의 탄젠트 곡선은 한 모서리에서 초기 값을 사용하여 계산된 것이다. 여기서는 초기 값의 위치는 모서리를 똑 같이 열개로 나눈 점들이다. 이 초기 점들에서 시작해서 일정한 양만큼 양의 방향 및 음의 방향으로 탄젠트 곡선 상의 점들을 계산한다. 파란 선은 탄젠트 곡선을 나타내고, 빨간 선은 삼각형의 각 정점에서의 벡터



(a) Case 1 ($r_1 > 0, r_2 < 0$) (b) Case 1 ($r_1 \neq r_2 < 0$)



(c) Case 2 ($r_1 = 0, r_2 < 0$) (d) Case 3 ($r_1 = r_2 = 0$)



(e) Case 4 ($r_1 = r_2 < 0$) (f) Case 5 ($\mu < 0, \lambda \neq 0$)

그림 2. 5가지 경우에서 탄젠트 곡선의 예

값을 나타낸다. 빨간 점은 임계점(Critical Point)을 표시한다.

4. 성능 평가

본 논문에서 제안한 방법을 검증하기 위해서 테스트 함수를 구현하였다. 또한 종래의 방법인 4th Runge-Kutta 방법과 Euler 방법을 구현하여 본 논문에서 제안한 방법과 비교를 하였다. 그림 3에서 사용된 2D 테스트 함수는 다음과 같다[13].

$$u = -0.103209 + 0.051511x - 0.323699y + 0.037546xy - 0.233875x^2 + 0.611528y^2$$

$$v = 0.1433656 + 0.687847x - 0.144779y - 0.213010xy - 1.029676x^2 + 0.246278y^2$$

그림 3에서 보여주는 것과 같이 데카르트 좌표계와 무게중심 좌표계에서 구현된 제안한 방법과 종래의 방법으로 구현된 탄젠트 곡선을 비교해보면 본 논문에서 제안한 방법이 정확하다는 것이 검증된 것이다.

그림 3에서 보는 것 같이 증분 크기를 충분히 작게 하면 본 논문에서 제안한 방법과 종래의 수치 해석적 방법 사이에 육안으로 볼 수 있는 차이점을 발견할 수 없다. 본 논문에서 제안한 방법은 다양하게 증분 크기를 변경해도 육안으로 차이점을 발견할 수 없

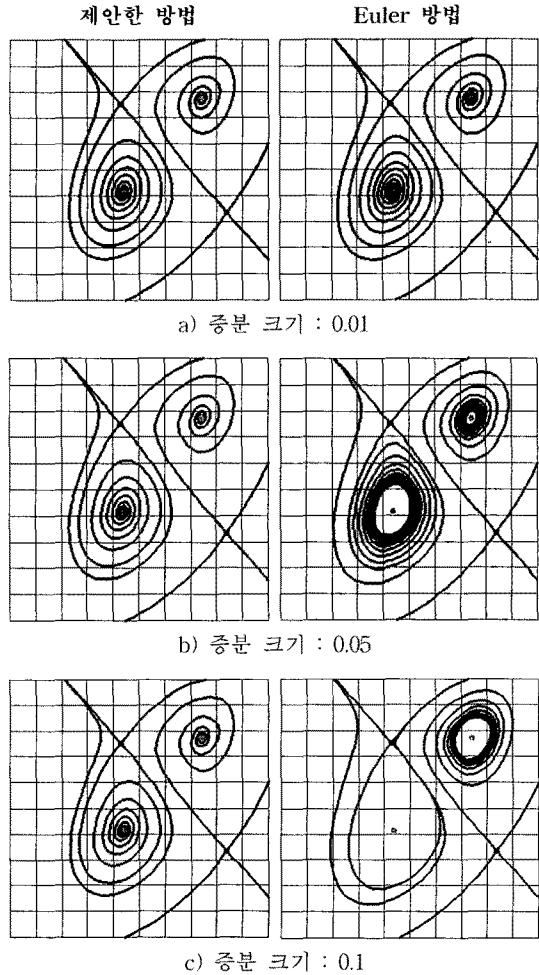


그림 4. 다양한 증분 크기에서 두 방법의 비교

나 종래의 방법은 증분 크기가 변하면 오류를 발생시킬 수 있다. 이 오류를 인해 정확한 탄젠트 곡선이 아닌 다른 탄젠트 곡선을 만들어 낸다. 그림 4에서 이 차이점을 보여주고 있다.

5. 결론

탄젠트 곡선을 계산하기 위해 본 논문에서 제안한 방법은 탄젠트 곡선을 정의하는 상미분 방정식을 풀어 명시해(explicit solution)를 제시한 반면 종래의 방법은 수치 해석적 방법인 Runge-Kutta 방법 또는 Euler 방법[1-4,11]을 사용하여 탄젠트 곡선의 근사치를 구했다. 따라서 본 논문에서 제시한 방법은 종래의 방법에서 범할 수 있는 수리적 오류를 줄일 수

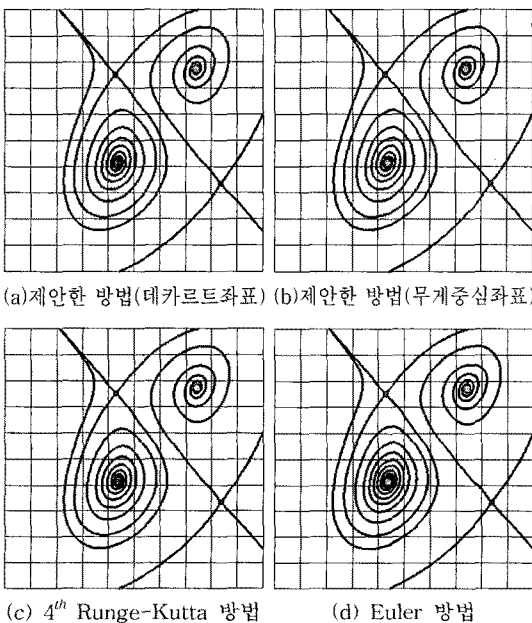


그림 3. 종래의 방법과 비교한 제안한 방법의 검증

있고 탄젠트 곡선을 계산하는데 정확성이 보장된다. 따라서 2차원 벡터 필드를 가시화하는 효율적인 방법으로 사용될 수 있다.

향후 연구 과제로는 3차원 벡터 필드에서 탄젠트 곡선을 정의하는 상미분 방정식을 풀어 명시해(explicit solution)를 마련하는 연구가 진행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] A. Globus, C. Levit, and T. Lasinski, "A tool for Visualizing the Topology of Three-dimensional Vector Fields," *Proc. Visualization '91*, IEEE Computer Society, pp. 33-40, 1991.

[2] J. L. Helman and L. Hesselink, "Representation and Display of Vector Field Topology in Fluid Data Sets," *IEEE Computer*, Vol.22, No.8, pp. 27-36, Aug. 1989.

[3] J. L. Helman and L. Hesselink, "Surface Presentation of Two- and Three-Dimensional Fluid Flow Topology," *Proc. Visualization '90*, IEEE Computer Society, pp. 6-13, 1990.

[4] J. L. Helman and L. Hesselink, "Visualizing Vector Field Topology in Fluid Flows," *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol.11, pp. 36-46, May 1991.

[5] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[5] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, 1973.

[6] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, MIT Press, 1973.

[7] S. Birkhoff and G. Rota, *Ordinary Differential Equations*, fourth edition, Wiley, New York, 1989.

[8] G.M. Nielson, I. -J. Jung, N. Srinivasan, J. Sung and J. -B. Yoon, "Tools for Computing Tangent Curves and Topological Graphs for Visualizing Piecewise Linearly Varying Vector

Fields over Triangulated Domains," *in: Scientific Visualization: Overview, Methodologies and Techniques*, G. Nielson, H. Hagen and H. Muller, editors, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, pp. 527-562, 1997.

[9] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Third Edition, 1992.

[10] G. M. Nielson, "Visualization in Scientific and Engineering Computation," *IEEE Computer*, Vol.24, No.9, pp. 58-66, 1991.

[11] G. M. Nielson and A. Kaufman, "Visualization Graduates," *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol.14, No. 5, pp. 17-18, Sep. 1994.

[12] S. -K. Ueng, C. Sikorski, and K.-L Ma, "Efficient Streamline, Stremribbon, and Streamtube Constructions on Unstructured Grids," *IEEE Transactions of Visualization and Computer Graphics*, Vol.2, No.2, pp. 100-108, Jun. 1996.

[13] D. Kenwright and D. Lane, "Optimization of Time-Dependent Particle Tracing using Tetrahedral Decomposition," *Proc. Visualization '95*, IEEE Computer Society, pp. 321-328, 1995.



정 일 흥

1979년 3월~1986년 2월 성균관대학교 산업공학과 공학사
 1990년 8월~1993년 12월 애리조나 주립대학교 컴퓨터공학과 공학석사
 1994년 1월~1998년 5월 애리조나 주립대학교 컴퓨터공학과 공학박사

1998년 9월~현재 대전대학교 컴퓨터공학과 부교수
 관심분야 : 컴퓨터 그래픽스, 멀티미디어, 가상현실, 애니메이션, 디지털 콘텐츠, 영상처리, 과학적 가시화 방법