상태와 입력에 시변 시간지연을 가지는 불확실 이산시간 특이시스템의 지연종속 강인 안정화 및 비약성 제어

Delay-Dependent Robust Stabilization and Non-Fragile Control of Uncertain Discrete-Time Singular Systems with State and Input Time-Varying Delays

김 종 해*
(Jong-Hae Kim)

Abstract : This paper deals with the design problem of robust stabilization and non-fragile controller for discrete-time singular systems with parameter uncertainties and time-varying delays in state and input by delay-dependent Linear Matrix Inequality (LMI) approach. A new delay-dependent bounded real lemma for singular systems with time-varying delays is derived. Robust stabilization and robust non-fragile state feedback control laws are proposed, which guarantees that the resultant closed-loop system is regular, causal and stable in spite of time-varying delays, parameter uncertainties, and controller gain variations. A numerical example is given to show the validity of the design method.

Keywords : discrete-time singular systems, LMI, non-fragile control, robust stabilization, time-varying delay

I. 서론

기존의 상태공간 모델을 가지고는 해결하기 어려운 특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 성질들로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동이론, 제약적 기계시스템 등에 광범위하게 적용되어지기 때문에 최근 특이시스템에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 최근에는 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 연구들이 연속시간과 이산시간에서 각각 활발히 진행되고 있다. 시간지연에 대한 연구는 지연 종속적인(delay-dependent) 방법과 지연 독립적인(delay-independent) 방법이 있다. 일반적으로 지연 종속적인 해석방법이 지연 독립적인 방법보다 덜 보수적인(less conservative) 것으로 알려져 있다. Chen과 Lin[1] 및 Chen과 Chou[2]는 시간지연을 가지는 불확실 이산시간 특이시스템에 대하여 공칭 시스템이 정규성(regular), 코잘(causal) 및 안정하다는 가정하에 강인 안정성에 대한 결과를 제시하였다. Xu와 Lam[3]은 상태에 시불변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대하여 지연 독립적인 방법을 사용하여 강인 안정화와 강인 H_∞ 제어문제를 다루었다. 이러한 보수적인 접근법의 단점을 보완하기 위하여 Ma 등[4,5]은 상태에 시변 시간지연을 가지고 불확실 이산시간 특이시스템에 대한 강인 안정화 문제와 강인 H_∞ 제어문제를 시스템의 등가모델 변환(equivalent model transformation)에 의하여 지연 종속 선형행렬부등식 접근방법으로 제안하였다. 시간지연항의 보수성을 줄이기 위하여 시간지연이 작은 값을 가지는 경우에 모델 변환(model transformation) 기술이나 유계 교차항(bounding cross terms) 접근법 등을 사용하였다. 하지만 모델 변환 기술[4-7]은 시스템의 추가적인 동역학(additional dynamics)이 필요하고, 유계 접근법[8,9]은 선형행렬부등식 측면에서 제어기를 얻기 위한 특별한 제한이 필요하므로 다소 보수적일 수도 있다. 이러한 보수성과 단점을 보완하기 위하여 Zhang과 Han[10]은 새로운 유한 합 부등식(finite sum inequality)을 이용하여 지연 종속 강인 H_∞ 필터 설계기법을 제시하였다. Wang 등[11]은 Zhang과 Han[10]의 유한 합 부등식 접근법을 이용하여 상태에 시변 시간지연을 가지는 이산시간 불확실 특이시스템에 대한 강인 H_∞ 제어기 설계방법을 제시하였다. 하지만 그들이 다루는 시스템[10,11]은 상태의 시간지연만을 다루었고 또한 제어기의 약성을 고려하는 비약성 문제는 다루지 못하였다.

연속시간 시스템과 더불어 이산시간 시스템의 강인 안정화 문제는 최근까지도 많은 연구가 이루어지고 있다. 하지만 플랜트의 변수에 강인성을 가지도록 설계하거나 성능지수를 최적화하는 궤환 시스템은 정확한 제어기 설계가 가능하다라는 가정하에 이루어진다. 현장에서의 제어기 구현 문제는 A/D 또는 D/A 컨버터, 반올림 오차, 제한 워드 길이 등의 문제뿐만 아니라 제어기의 이득조정이 필요하므로 제어기의 약성에 대한 연구가 시작된 이래로 최근까지 많은 연구들[12-15]이 이루어지고 있다. 하지만 대부분의 결과가 연속시간에 대한 결과이고 이산시간 시스템에 대한 연구결과는 미비한 상황이다. 특히, 본 논문에서 다루고자 하는 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 강인 비약성 제어 문제에 대한 연구결과는 없는 실정이다.

따라서, 본 논문에서는 상태와 제어 입력에 시변 시간지연을 가지는 이산시간 특이시스템에 대한 강인 안정화를 유한 합 부등식 접근법을 사용하여 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 지연종속 선형행렬부등식 조건으로 제어기 존재조건과 설계방법을 제안한다. 뿐만 아니라 제어기가 약성을 가지는 경우에 대한 강인 비약성 제어기의 존재조건과 설계방법도 지연 종속 선형행렬부등식 기법으로 제시한다. 따라서, 모든 해는 한번에 구

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2008. 9. 1., 채택확정 : 2008. 10. 22.
김종해 : 선문대학교 전자공학부(kjhae@sunmoon.ac.kr)

해질 뿐 아니라 비약성 척도와 강인 안정화 및 강인 비약성 제어기도 같이 계산할 수 있다는 장점이 있다.

본 논문에서 사용하는 표기법을 정리하면 다음과 같다. $(\cdot)^T$, $(\cdot)^{-1}$, $\deg(\cdot)$, $\det(\cdot)$ 및 $rank(\cdot)$는 $(\cdot)$에 대한 전치(transpose), 역(inverse), 차수(degree), 행렬식(determinant) 및 계수(rank)를 가진다. 그리고, I, R^r 및 $R^{n\times m}$은 적절한 차원(dimensions)을 가지는 단위행렬, $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터 및 $n\times m$ 차원을 가지는 실수 행렬을 각각 의미한다. $*$와 $Diag\{\ \}$는 대칭행렬의 주 대각선 아래 놓이는 요소와 블록 대각행렬을 각각 의미한다.

II. 문제설정

시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이 시스템

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= (A+\Delta A(k))x(k)+(A_d+\Delta A_d(k))x(k-d(k)) \\ &\quad +(B+\Delta B(k))u(k)+(B_h+\Delta B_h(k))u(t-h(k)) \quad (1) \\ x(k) &= \phi(k),\ \ k=-\tau,-\tau+1,\cdots,0,\ \ \tau=\max(\bar{d},\bar{h}) \end{aligned}$$

을 다룬다. 여기서 $x(k)\in R^n$는 상태변수, $u(k)\in R^m$는 제어 입력 변수, $\phi(k)$는 주어진 초기조건, E는 $rank(E)=r\le n$을 만족하는 특이행렬이고, 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. 양의 정수 값을 가지는 시변 시간지연은

$$0<\underline{d}\le d(k)\le \bar{d}<\infty,\quad 0<\underline{h}\le h(k)\le \bar{h}<\infty \tag{2}$$

의 하한 값과 상한 값을 가진다고 정의한다. 여기서, $d(k)$의 값중에 $\underline{d}$와 $\bar{d}$의 값이 같으면 시불변 시간지연이 된다. 변수 불확실성은 노옴 유계(norm bound)를 가지는

$$\begin{aligned} &[\Delta A(t)\quad \Delta B(t)\quad \Delta A_d(t)\quad \Delta B_h(t)] \\ &= DF(k)[H_1\quad H_2\quad H_3\quad H_4] \end{aligned} \tag{3}$$

과 같고, D와 $H_i(i=1,2,3,4)$는 알고 있는 행렬이고, 모르는 행렬 $F(k)$는

$$F(k)^T F(k)\le I \tag{4}$$

와 같이 정의한다. 시스템 (1)에 대하여 설계할 강인 안정화 제어기는

$$u(k)=Gx(k) \tag{5}$$

로 정의한다. 또한, 설계할 강인 비약성 제어기의 형태가 식 (5)와 같을지라도 구현하는 제어기의 형태를 곱셈형 섭동(multiplicative uncertainty)을 가지는

$$u(k)=(I+\gamma\Phi(k))Gx(k)\equiv \widetilde{G}x(k) \tag{6}$$

으로 가정한다. 여기서, G는 제어기의 이득, γ는 양의 실수, $\gamma\Phi(k)G$는 제어기 이득의 변동을 나타낸다. 그리고 $\Phi(k)$는 유계를 가지는

$$\Phi(k)^T\Phi(k)\le I \tag{7}$$

과 같이 정의한다. 또한, γ는 제어기 이득의 변동에 대한 비약성 척도(the measure of non-fragility)를 나타낸다. 따라서, 본 논문의 첫 번째 목적은 시스템 (1)의 강인 안정성을 만족하는 제어기 (5)를 설계하는 것이고, 두 번째 목적은 곱셈형 섭동의 제어기 형태를 가지는 (6)에 대하여 시스템 (1)의 강인 안정성과 비약성을 보장하는 강인 비약성 제어기 설계방법과 존재조건을 제안하는 것이다. 시간지연을 가지는 불확실 이산시간 특이시스템의 강인 안정성과 비약성을 보장하는 제어기의 설계를 위하여 변수 불확실성이 없는 여기되지 않은 시스템(unforced system)

$$Ex(k+1)=Ax(k)+A_d x(k-d(k))+M_h x(k-h(k)) \tag{8}$$

을 먼저 고려한다. 여기서, 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다고 가정하자. 시간지연을 가지는 이산시간 특이시스템 (8)을 위한 정의와 수식전개를 위한 보조정리를 소개한다.

정의 1[10,11]: 특이시스템의 성질을 정의한다.

(i) $\deg(zE-A)$이 항등적으로 영(identically zero)이 아니면 (E,A)는 정규적이다.

(ii) $rank(E)=\deg(\det(zE-A))$이면 (E,A)는 코잘이다.

(iii) (E,A)가 정규적이고 코잘이면 시스템 (8)은 정규적이고 코잘이다.

(iv) 정규적이고 $\det(zE-A)=0$의 모든 근이 단위원내에 존재하면 안정하다.

보조정리 1[16]: 적절한 차원을 가지는 행렬 Γ, Ξ와 대칭행렬 Ω가 주어진다. 식 (4)를 만족하는 $F(k)$에 대하여 $\Omega+\Gamma F(k)\Xi+\Xi^T F(k)^T\Gamma^T<0$을 만족하기 위한 필요충분조건은 $\Omega+\varepsilon\Gamma\Gamma^T+\varepsilon^{-1}\Xi^T\Xi<0$을 만족하는 양의 상수 ε이 존재하는 것이다.

III. 강인 안정화 및 강인 비약성 제어

본 절에서는 먼저 여기되지 않은 공칭 시스템 (8)에 대한 유계 실수정리(bounded real lemma)를 먼저 제안하고 이를 바탕으로 시스템 (1)의 강인 안정화를 보장하는 제어기의 존재조건과 설계방법을 제시한다. 또한 제어기의 약성을 가지는 강인 비약성 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법도 제안한다. 기존의 논문에서 많이 사용하는 시스템 행렬의 분해를 하지 않고 볼록최적화가 가능한 지연종속 선형행렬부등식 접근 방법으로 존재조건을 제시한다. 수식전개를 위하여 몇 가지 변수들을

$$\begin{aligned} \varsigma(k) &= \left[x(k)^T\quad x(k-d(k))^T\quad x(k-h(k))^T\right]^T \\ y(l) &= x(l+1)-x(l) \end{aligned} \tag{9}$$

와 같이 정의하면 이산시간 특이시스템 (8)과 관련된 식은

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= [A\quad A_d\quad M_h]\varsigma(k)\equiv \Psi_1\varsigma(k) \\ Ey(k) &= [A-E\quad A_d\quad M_h]\varsigma(k)\equiv \Psi_2\varsigma(k) \end{aligned} \tag{10}$$

으로 정의된다.

보조정리 2: 적절한 차원을 가지는 행렬 N_1, N_2, N_3, N_4, 양의 정부호(positive-definite) 행렬 S_1, S_2와 식 (2)의 양의 정수인 시변 시간지연 $d(k)$와 $h(k)$에 대하여, 아래의

성질

$$-\sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y(j)^T E^T S_1 Ey(j) - \sum_{j=k-h(k)}^{k-1} y(j)^T E^T S_2 Ey(j)$$
$$= \varsigma(k)^T \{\Pi_1 + \Pi_2 + d(k) Y_1^T S_1^{-1} Y_1 + h(k) Y_2^T S_2^{-1} Y_2\} \varsigma(k) \quad (11)$$
$$\le \varsigma(k)^T \{\Pi_1 + \Pi_2 + \bar{d} Y_1^T S_1^{-1} Y_1 + \bar{h} Y_2^T S_2^{-1} Y_2\} \varsigma(k)$$

을 만족한다. 여기서, 변수들은

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} N_1^T E + E^T N_1 & -N_1^T E + E^T N_2 & 0 \\ * & -N_2^T E - E^T N_2 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} N_3^T E + E^T N_3 & 0 & -N_3^T E + E^T N_4 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -N_4^T E - E^T N_4 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = [N_1 \quad N_2 \quad 0], \; Y_2 = [N_3 \quad 0 \quad N_4]$$

으로 정의한다.

증명: 아래의 행렬

$$C_1 = \begin{bmatrix} S_1^{\frac{1}{2}} & S_1^{-\frac{1}{2}} Y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; C_2 = \begin{bmatrix} S_2^{\frac{1}{2}} & S_2^{-\frac{1}{2}} Y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

에서 $C_1^T C_1 \ge 0$ 과 $C_2^T C_2 \ge 0$ 로부터

$$\sum_{j=k-d(k)}^{k-1} \begin{bmatrix} Ey(j) \\ \varsigma(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_1 & Y_1 \\ Y_1^T & Y_1^T S_1^{-1} Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ey(j) \\ \varsigma(k) \end{bmatrix} \ge 0$$
$$\sum_{j=k-h(k)}^{k-1} \begin{bmatrix} Ey(j) \\ \varsigma(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_2 & Y_2 \\ Y_2^T & Y_2^T S_2^{-1} Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ey(j) \\ \varsigma(k) \end{bmatrix} \ge 0 \quad (13)$$

이 되고,

$$\sum_{j=k-d(k)}^{k-1} 2\varsigma(k)^T Y_1^T Ey(j) = 2\varsigma(k)^T Y_1^T [E \quad -E \quad 0] \varsigma(k)$$
$$\sum_{j=k-h(k)}^{k-1} 2\varsigma(k)^T Y_2^T Ey(j) = 2\varsigma(k)^T Y_2^T [E \quad 0 \quad -E] \varsigma(k) \quad (14)$$

의 관계로부터 식 (13)을 정리하면 식 (11)이 된다. ■

정리 1: 이산시간 지연 특이시스템 (8)에 대하여, 선형행렬 부등식

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ * & \Lambda_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P, S_1, S_2, W_1, W_2 와 행렬 Z, N_1, N_2, N_3, N_4 가 존재하면, 시변 시간지연을 가지는 이산시간 특이시스템 (8)은 정규성, 코잘 및 안정성을 만족한다. 여기서, Φ 는 $E^T \Phi = 0$ 를 만족하는 적절한 차원을 가지는 행렬이고, 변수는

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & Z\Phi^T A_d - N_1^T E + E^T N_2 & Z\Phi^T M_h - N_3^T E + E^T N_4 \\ * & -N_2^T E - E^T N_2 - W_1 & 0 \\ * & * & -N_4^T E - E^T N_4 - W_2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{11} = A^T \Phi Z^T + Z\Phi^T A + N_1^T E + E^T N_1 + N_3^T E + E^T N_3 - E^T PE + d^* W_1 + h^* W_2$$

$$d^* = \bar{d} - \underline{d} + 1, \; h^* = \bar{h} - \underline{h} + 1$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} A^T P & \bar{d}(A-E)^T S_1 & \bar{h}(A-E)^T S_2 & \bar{d} N_1^T & \bar{h} N_3^T \\ A_d^T P & \bar{d} A_d^T S_1 & \bar{h} A_d^T S_2 & \bar{d} N_2^T & 0 \\ M_h^T P & \bar{d} M_h^T S_1 & \bar{h} M_h^T S_2 & 0 & \bar{h} N_4^T \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_3 = Diag\{-P, -\bar{d} S_1, -\bar{h} S_2, -\bar{d} S_1, -\bar{h} S_2\}$$

와 같다.

증명: 안정성을 위하여 적절한 리아푸노프 함수를

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) + V_5(k) + V_6(k) + V_7(k) \quad (16)$$

과 같이 설정한다. 여기서, 각 함수들은

$$V_1(k) = x(k)^T E^T PEx(k)$$
$$V_2(k) = \sum_{\theta=-\bar{d}+1}^{0} \sum_{j=k-1+\theta}^{k-1} y(j)^T E^T S_1 Ey(j)$$
$$V_3(k) = \sum_{\theta=-\bar{h}+1}^{0} \sum_{j=k-1+\theta}^{k-1} y(j)^T E^T S_2 Ey(j)$$
$$V_4(k) = \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x(i)^T W_1 x(i)$$
$$V_5(k) = \sum_{i=k-h(k)}^{k-1} x(i)^T W_2 x(i)$$
$$V_6(k) = \sum_{j=-\bar{d}+2}^{-\underline{d}+1} \sum_{l=k+j-1}^{k-1} x(l)^T W_1 x(l)$$
$$V_7(k) = \sum_{j=-\bar{h}+2}^{-\underline{h}+1} \sum_{l=k+j-1}^{k-1} x(l)^T W_2 x(l)$$

와 같이 정의한다. 식 (16)에서 전방향 차분(forward difference)인 $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ 을 시스템 (8)에 대하여 각 함수에서 구하면

$$\Delta V_1(k) = V_1(k+1) - V_1(k) = \varsigma(k)^T \Psi_1^T P \Psi_1 \varsigma(k) - \varsigma(k)^T \Psi_3 \varsigma(k) \quad (17)$$

$$\Delta V_2(k) = V_2(k+1) - V_2(k)$$
$$= \bar{d} y(k)^T E^T S_1 Ey(k) - \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} y(j)^T E^T S_1 Ey(j)$$
$$\le \bar{d} y(k)^T E^T S_1 Ey(k) - \sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y(j)^T E^T S_1 Ey(j) \quad (18)$$
$$= \bar{d} \varsigma(k)^T \Psi_2^T S_1 \Psi_2 \varsigma(k) - \sum_{j=k-d(k)}^{k-1} y(j)^T E^T S_1 Ey(j)$$

$$\Delta V_3(k) = V_3(k+1) - V_3(k)$$
$$= \bar{h} y(k)^T E^T S_2 Ey(k) - \sum_{j=k-\bar{h}}^{k-1} y(j)^T E^T S_2 Ey(j)$$
$$\le \bar{h} y(k)^T E^T S_2 Ey(k) - \sum_{j=k-h(k)}^{k-1} y(j)^T E^T S_2 Ey(j) \quad (19)$$
$$= \bar{h} \varsigma(k)^T \Psi_2^T S_2 \Psi_2 \varsigma(k) - \sum_{j=k-h(k)}^{k-1} y(j)^T E^T S_2 Ey(j)$$

$$\begin{aligned}&\Delta V_4(k)+\Delta V_6(k)\\ &\le d^* x(k)^T W_1 x(k) - x(k-d(k))^T W_1 x(k-d(k)) = \varsigma(k)^T \Psi_4 \varsigma(k)\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\Delta V_5(k)+\Delta V_7(k)\\ &\le h^* x(k)^T W_2 x(k) - x(k-h(k))^T W_2 x(k-h(k)) = \varsigma(k)^T \Psi_5 \varsigma(k)\end{aligned} \tag{21}$$

과 같다. 식 (20)과 (21)의 전개는 참고문헌 [17]의 정리 2의 증명을 따르면 쉽게 유도된다. 여기서, 변수들은 다음과 같이 정의한다.

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} E^T PE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Psi_4 = \begin{bmatrix} d^* W_1 & 0 & 0 \\ 0 & -W_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_5 = \begin{bmatrix} h^* W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W_2 \end{bmatrix}$$

보조정리 2를 이용하여 식 (17)~(21)을 정리하면

$$\begin{aligned}\Delta V(k) \le \varsigma(k)^T \{&\Psi_1^T P \Psi_1 - \Psi_3 + \bar{d}\Psi_2^T S_1 \Psi_2 + \bar{h}\Psi_2^T S_2 \Psi_2 \\ &+ \Pi_1 + \Pi_2 + \bar{d} Y_1^T S_1^{-1} Y_1 + \bar{h} Y_2 S_2^{-1} Y_2 + \Psi_4 + \Psi_5\}\varsigma(k) < 0\end{aligned} \tag{22}$$

와 같고 $E^T \Phi = 0$ 이므로

$$2x(k+1)^T E^T \Phi Z^T x(k) = 0 \tag{23}$$

이다. 식 (22)와 (23)에서 슈어 여수정리를 이용하면 식 (15)를 얻는다. ■

정리 2: (강인 안정화) 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템 (1)과 제어기 (5)에 대하여, 선형 행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \overline{\Lambda}_1 & \overline{\Lambda}_2 & \overline{\Lambda}_3 & \overline{\Lambda}_4 & \bar{d}N_1^T & \bar{h}N_3^T & \overline{\Lambda}_5 \\ * & \overline{\Lambda}_6 & X^T A_d^T & Y^T B_h^T & 0 & 0 & \overline{\Lambda}_5 \\ * & * & \overline{\Lambda}_7 & 0 & \bar{d}N_2^T & 0 & 0 \\ * & * & * & \overline{\Lambda}_8 & 0 & \bar{h}N_4^T & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{d}S_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{h}S_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0 \tag{24}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P, S_1, S_2, W_1, W_2, 양의 실수 ε_1과 행렬 Z, N_1, N_2, N_3, N_4, X, Y가 존재하면 정규성, 코잘 및 강인 안정성을 보장하는 제어기 이득은

$$G = YX^{-1} \tag{25}$$

이다. 여기서, Φ는 $E\Phi = 0$를 만족하는 적절한 차원을 가지는 행렬이고 몇 가지 변수들은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\overline{\Lambda}_1 &= (A-E)X + X^T(A-E)^T + BY + Y^T B^T + N_1^T E^T + EN_1 \\ &\quad + N_3^T E^T + EN_3 + d^* W_1 + h^* W_2 + \varepsilon_1 DD^T \\ \overline{\Lambda}_2 &= (A-E)X + BY + EP + Z\Phi^T - X^T \\ \overline{\Lambda}_3 &= X^T A_d^T - N_1^T E^T + EN_2 \\ \overline{\Lambda}_4 &= Y^T B_h^T - N_3^T E^T + EN_4 \\ \overline{\Lambda}_5 &= \begin{bmatrix} X^T H_1^T + Y^T H_2^T & X^T H_3^T & Y^T H_4^T \end{bmatrix} \\ \overline{\Lambda}_6 &= -X - X^T + P + \bar{d}S_1 + \bar{h}S_2 \\ \overline{\Lambda}_7 &= -N_2^T E^T - EN_2 - W_1 + \varepsilon_1 DD^T \\ \overline{\Lambda}_8 &= -N_4^T E^T - EN_4 - W_2 + \varepsilon_1 DD^T\end{aligned}$$

증명: 시스템 (8)은

$$\overline{E}\bar{x}(k+1) = \overline{A}\bar{x}(k) + \overline{A}_d \bar{x}(k-d(k)) + \overline{M}_h \bar{x}(k-h(k)) \tag{26}$$

과 같이 표현하고, 변수들은

$$\overline{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ Ey(k) \end{bmatrix},\ \overline{A} == \begin{bmatrix} E & I \\ A-E & -I \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_d & 0 \end{bmatrix},\ \overline{M}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_h & 0 \end{bmatrix}$$

와 같다. 참고문헌 [11]의 정리 2의 증명과 유사하게 전개를 하면 정리 1의 결과에서, E, A, A_d, M_h, P, S_1, S_2, W_1, W_2, Z, N_1, N_2, N_3, N_4의 행렬이 $\overline{E}$, $\overline{A}$, $\overline{A}_d$, $\overline{M}_h$, $\overline{P}$, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$, $\overline{Z}$, $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$에 의해 대치되어지고 식 (15)를 만족하면 시스템 (26)이 정규성, 코잘 및 안정성을 만족한다. 여기서, 특히

$$\begin{gathered}\overline{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix},\ \overline{S}_1 = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix},\ \overline{S}_2 = \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix} \\ \overline{W}_1 = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix},\ \overline{W}_2 = \begin{bmatrix} W_2 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix},\ \overline{Z} = \begin{bmatrix} Z & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \overline{N}_1 = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix},\ \overline{N}_2 = \begin{bmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix},\ \overline{N}_3 = \begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix} \\ \overline{N}_4 = \begin{bmatrix} N_4 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix},\ \overline{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}\end{gathered} \tag{27}$$

과 같이 선택하여 식 (26)과 (27)의 변수로 대치한 식 (15)에 대입하고 슈어 여수정리와 $\alpha \to 0$이라고 두면 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 & \Theta_4 & \bar{d}N_1^T & \bar{h}N_3^T \\ * & \Theta_5 & X^T A_d & X^T M_h & 0 & 0 \\ * & * & \Theta_6 & 0 & \bar{d}N_2^T & 0 \\ * & * & * & \Theta_7 & 0 & \bar{h}N_4^T \\ * & * & * & * & -\bar{d}S_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{h}S_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{28}$$

을 얻는다. 여기서, 변수들은 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= (A-E)^T X + X^T (A-E) + N_1^T E + E^T N_1 \\ &\quad + N_3^T E + E^T N_3 + d^* W_1 + h^* W_2 \\ \Theta_2 &= (A-E)^T X + E^T P + Z\Phi^T - X^T \\ \Theta_3 &= X^T A_d - N_1^T E + E^T N_2,\ \Theta_4 = X^T M_h - N_3^T E + E^T N_4 \\ \Theta_5 &= -X - X^T + P + \bar{d}S_1 + \bar{h}S_2,\ \Theta_6 = -N_2^T E - E^T N_2 - W_1 \\ \Theta_7 &= -N_4^T E - E^T N_4 - W_2.\end{aligned}$$

시스템 (8)에서 $\det(zE-A-A_d z^{-d(k)}-M_h z^{-h(k)})=0$ 가 가지는 해는 $\det(zE^T-A^T-A_d^T z^{-d(k)}-M_h^T z^{-h(k)})=0$ 의 해와 동일하기 때문에, 시스템 (8)이 정규성, 코잘 및 안정성을 만족하기 위한 필요충분조건은

$$E^T\xi(k)=A^T\xi(k)+A_d^T\xi(k-d(k))+M_h^T\xi(k-h(k)) \tag{29}$$

가 정규성, 코잘 및 안정성을 만족하는 것이다. 따라서, 식 (28)에서 E, A, A_d, M_h 의 행렬에 E^T, A^T, A_d^T, M_h^T 를 대입하면 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \bar\Theta_1 & \bar\Theta_2 & \bar\Theta_3 & \bar\Theta_4 & \bar{d}N_1^T & \bar{h}N_3^T \\ * & \bar\Theta_5 & X^TA_d^T & X^TM_h^T & 0 & 0 \\ * & * & \bar\Theta_6 & 0 & \bar{d}N_2^T & 0 \\ * & * & * & \bar\Theta_7 & 0 & \bar{h}N_4^T \\ * & * & * & * & -\bar{d}S_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{h}S_2 \end{bmatrix}<0 \tag{30}$$

을 얻는다. 여기서, 변수들은 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
\bar\Theta_1 &= (A-E)X+X^T(A-E)^T+N_1^TE^T+EN_1 \\
&\quad +N_3^TE^T+EN_3+d^*W_1+h^*W_2 \\
\bar\Theta_2 &= (A-E)X+EP+Z\Phi^T-X^T \\
\bar\Theta_3 &= X^TA_d^T-N_1^TE^T+EN_2 \\
\bar\Theta_4 &= X^TM_h^T-N_3^TE^T+EN_4 \\
\bar\Theta_5 &= -X-X^T+P+\bar{d}S_1+\bar{h}S_2 \\
\bar\Theta_6 &= -N_2^TE^T-EN_2-W_1,\ \bar\Theta_7=-N_4^TE^T-EN_4-W_2
\end{aligned}$$

시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템 (1)의 강인 안정성을 위하여 식 (30)에 시스템 행렬 (1)의 값을

$$\begin{aligned}
&A \leftarrow A+BG+DF(k)(H_1+H_2G) \\
&A_d \leftarrow A_d+DF(k)H_3 \\
&M_h \leftarrow B_hG+DF(k)H_4G
\end{aligned} \tag{31}$$

과 같이 대입하고 $Y=GX$ 라 정의한 후에 보조정리 1과 슈어 여수정리를 이용하면, 강인 안정화 제어기가 존재할 선형행렬부등식 조건 (24)와 식 (25)의 제어기 이득을 얻을 수 있다. ■

정리 3: (강인 비약성 제어) 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템 (1)과 제어기 (6)에 대하여, 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \bar\Pi_1 & \bar\Pi_2 & \bar\Pi_3 & \bar\Pi_4 & \bar{d}N_1^T & \bar{h}N_3^T & \bar\Pi_5 & \bar\Pi_6 \\ * & \bar\Pi_7 & X^TA_d^T & Y^TB_h^T & 0 & 0 & 0 & \bar\Pi_8 \\ * & * & \bar\Pi_9 & 0 & \bar{d}N_2^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar\Pi_{10} & 0 & \bar{h}N_4^T & \bar\Pi_{11} & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{d}S_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{h}S_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \bar\Pi_{12} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix}<0 \tag{32}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P, S_1, S_2, W_1, W_2, 양의 실수 ε_1, ε_2, β 와 행렬 Z, N_1, N_2, N_3, N_4, X, Y 가 존재하면 정규성, 코잘 및 강인 안정성을 보장하는 강인 비약성 제어기 이득과 비약성 척도는

$$G=YX^{-1} \tag{33}$$

$$\gamma=\sqrt{\frac{\beta}{\varepsilon_2}} \tag{34}$$

로 표현된다. 여기서, 몇 가지 변수들은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
\bar\Pi_1 &= (A-E)X+X^T(A-E)^T+BY+Y^TB^T+N_1^TE^T+EN_1 \\
&\quad +N_3^TE^T+EN_3+d^*W_1+h^*W_2+\varepsilon_1DD^T+\beta BB^T \\
\bar\Pi_2 &= (A-E)X+BY+EP+Z\Phi^T-X^T \\
\bar\Pi_3 &= X^TA_d^T-N_1^TE^T+EN_2,\ \bar\Pi_4=Y^TB_h^T-N_3^TE^T+EN_4 \\
\bar\Pi_5 &= \begin{bmatrix} X^TH_1^T+Y^TH_2^T & X^TH_3^T & Y^TH_4^T \end{bmatrix} \\
\bar\Pi_6 &= \begin{bmatrix} Y^T & Y^T \end{bmatrix},\ \bar\Pi_7=-X-X^T+P+\bar{d}S_1+\bar{h}S_2 \\
\bar\Pi_8 &= \begin{bmatrix} Y^T & Y^T \end{bmatrix},\ \bar\Pi_9=-N_2^TE^T-EN_2-W_1+\varepsilon_1DD^T \\
\bar\Pi_{10} &= -N_4^TE^T-EN_4-W_2+\varepsilon_1DD^T+\beta B_hB_h^T \\
\bar\Pi_{11} &= \begin{bmatrix} \beta B_hH_2^T & 0 & \beta B_hH_4^T \end{bmatrix} \\
\bar\Pi_{12} &= \begin{bmatrix} -\varepsilon_1I+\beta H_2H_2^T & 0 & \beta H_2H_4^T \\ * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1I+\beta H_2H_2^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\beta=\varepsilon_2\gamma^2$, $Y=GX$.

증명: 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템 (1)에 대하여 제어기 이득의 변동에도 불구하고 강인 안정성과 강인 비약성을 보장하기 위하여 식 (30)에 시스템 행렬 (1)의 값을

$$\begin{aligned}
&A \leftarrow A+B\tilde{G}+DF(k)(H_1+H_2\tilde{G}) \\
&A_d \leftarrow A_d+DF(k)H_3 \\
&M_h \leftarrow B_h\tilde{G}+DF(k)H_4\tilde{G}
\end{aligned} \tag{35}$$

와 같이 대입하고 식 (7)을 만족하는 유계된 항에 대하여 보조정리 1과 슈어 여수정리를 이용하면, 강인 비약성 제어기가 존재할 선형행렬부등식 조건 (32)를 구할 수 있다. 또한 강인 비약성 제어기 이득은 $Y=GX$ 로부터 식 (33)과 같이 구해지고, 비약성 척도는 $\beta=\varepsilon_2\gamma^2$ 로부터 식 (34)와 같이 계산할 수 있다. ■

제안하는 강인 안정화 및 강인 비약성 제어기 설계방법은 $E=I$ 인 비특이 시스템에 대해서도 직접적으로 적용가능하므로 일반적인 알고리듬이다. 또한, 정리 2와 정리 3의 결과는 구하고자 하는 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식으로 표현되었기 때문에 볼록최적화가 가능하다. 예를 들어 정리 3에서 비약성 척도의 최대값을 구하고자 하면 'Maximize β subject to (32)'의 최적화문제로 변경할 수 있다. 또한, 기

존결과에서 사용하는 시스템 행렬의 분해 없이 직접 제어기를 구할 수 있으므로 제안하는 조건이 간단해진다는 장점이 있고 모델 변환을 하지 않으므로 구하는 해의 차수가 증가하지 않는다. 또한, 정리 3의 강인 비약성 제어기에서 $\gamma = 0$ 로 두면 강인 안정화를 보장하는 정리 2의 제어기 설계방법을 얻을 수 있다. 따라서, 제안하는 정리 3의 강인 비약성 제어기 설계 알고리듬은 일반적인 제어기 설계 기법이다.

VI. 수치 예제

제안한 제어기 설계 알고리듬의 타당성을 확인하기 위하여 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}x(k+1) &= \left\{\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.02\\0.01\end{bmatrix}F(k)\begin{bmatrix}0.01 & 0.01\end{bmatrix}\right\}x(k)\\
&+ \left\{\begin{bmatrix}0.1 & 0\\0.3 & 0.1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.02\\0.01\end{bmatrix}F(k)\begin{bmatrix}0.01 & 0.02\end{bmatrix}\right\}x(k-d(k))\\
&+ \left\{\begin{bmatrix}-2\\-5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.02\\0.01\end{bmatrix}F(k)0.01\right\}u(k)\\
&+ \left\{\begin{bmatrix}0.1\\0.2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.02\\0.01\end{bmatrix}F(k)0.01\right\}u(k-h(k))
\end{aligned} \tag{36}$$

을 고려한다. $E\Phi = 0$ 를 만족하는 행렬은 $\Phi = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 로 두고, 시변 시간지연을 $1 \le d(k) \le 2,\quad 0 \le h(k) \le 1$ 라고 잡으면 정리 3의 선형행렬부등식의 조건으로부터 시변 시간지연과 변수 불확실성에 대하여 강인 안정성과 비약성을 만족하는 제어기와 비약성 척도는

$$\begin{aligned} u(k) &= \begin{bmatrix}0.8508 & 0.6676\end{bmatrix}x(k)\\ \gamma &= 0.1323 \end{aligned} \tag{37}$$

이다. 여기서, 비약성 척도인 γ 의 의미는 제어기의 이득이 ±13.23% 이내의 범위에서 변화하더라도 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템의 강인 안정성과 강인 비약성을 보장한다는 것이다. 컴퓨터 모의실험을 위하여 $\phi(k) = \begin{bmatrix}e^{-k} & -1\end{bmatrix}^T$, $k \le 0$, $F(k) = \sin k$, $\Phi(k) = \cos k$ 로 잡으면 그림 1과 같이 상태와 제어입력의 궤적을 얻는다. 그림 1로부터 시변 시간지연, 변수 불확실성 및 제어기의 약성의 존재에도 불구하고 시간이 지남에 따라 상태가 영에 수렴하므로 제안한 알고리듬이 강인 안정성과 비약성을 만족함을 알 수 있다.

강인 비약성 제어기 설계방법의 타당성을 확인하기 위하여 $1 \le d(k) \le \bar{d}$, $0 \le h(k) \le 1$ 에 대하여 $\bar{d}$ 의 변화에 대한 제어기 이득과 비약성 척도의 값을 구해보면 표 1과 같다. 시간지연의 상한치인 $\bar{d}$ 의 값이 증가할수록 비약성 척도는 줄어든다. 해가 존재하는 $\bar{d}$ 의 최대값은 13 이다. 따라서, 동일한 조건에서 구한 정리 3의 강인 비약성 제어기는 정리 2에서 구한 강인 안정화 제어기보다 비약성 척도인 γ 의 여유(margin)를 가짐을 쉽게 알 수 있다.

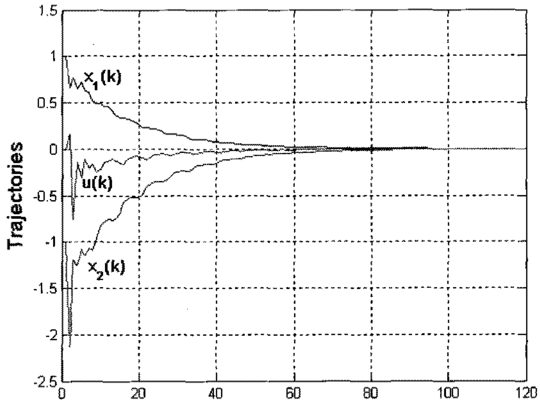

그림 1. 상태와 제어입력의 궤적.

Fig. 1. The trajectories of states and control input.

표 1. $\bar{d}$ 에 따른 비약성 척도와 제어기 이득.

Table 1. The measure of non-fragility and controller gain according to the value of $\bar{d}$.

$\bar{d}$	γ	G
1	0.1491	$[0.7851 \quad 0.6454]$
2	0.1323	$[0.8508 \quad 0.6676]$
3	0.1306	$[0.9121 \quad 0.6868]$
⋮	⋮	⋮
12	0.0303	$[1.0230 \quad 0.5823]$
13	0.0031	$[1.2068 \quad 0.5941]$
14		Infeasible

V. 결론

본 논문에서는 시변 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 이산시간 특이시스템의 강인 안정화 제어기 설계방법과 제어기의 약성을 가지는 경우의 강인 비약성 제어기 설계과정을 지연 종속적인 방법을 이용하여 제안하였다. 제어기의 존재조건과 제어기 설계방법을 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 기법으로 제시하였다. 제안한 강인 비약성 제어기는 시변 시간지연, 변수 불확실성 및 제어기의 이득 변동에도 불구하고 강인 안정성을 보장한다. 예제를 통하여 제안한 설계방법의 타당성을 확인하였다.

참고문헌

[1] S. J. Chen and J. L. Lin, “Robust stability of discrete time-delay uncertain singular systems,” *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 151, pp. 45-51, Jan. 2004.

[2] S. H. Chen and J. H. Chou, “Stability robustness of linear discrete singular time-delay systems with parameter uncertainties,” *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 150, pp. 296-302, May 2003.

[3] S. Xu, J. Lam, and C. Yang, “Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty,” *Dynamics Continuous, Discrete, Impulsive Syst. Series B:*

Applications & Algorithms, vol. 9, no. 4, pp. 539-554, 2002.

[4] S. Ma, Z. Cheng, and C. Zhang, "Delay-dependent robust stability and stabilization for uncertain discrete singular systems with time-varying delays," *IET Control Theory Appl.*, vol. 1, pp. 1086-1095, July 2007.

[5] S. Ma, C. Zhang, and Z. Cheng, "Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain discrete-time singular systems with time-delays," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 217, pp. 194-211, July 2008.

[6] K. Gu and S. I. Niculescu, "Additional dynamics in transformed time delay systems," *IEEE Trans. Automat. Control,* vol. 45, no. 3, pp. 572-575, March 2000.

[7] K. Gu and S. I. Niculescu, "Further remarks on additional dynamics in various model transformation of linear delay systems," *IEEE Trans. Automat. Control,* vol. 46, no. 3, pp. 497-500, March 2001.

[8] P. G. Park, Y. S. Moon, and W. H. Kwon, "A delay-dependent robust stability criterion for uncertain time-delay systems," *Proc. of American Control Conference*, pp. 1963-1964, June 1998.

[9] P. G. Park, "A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays," *IEEE Trans. Automat. Control,* vol. 44, no. 4, pp. 876-877, April 1999.

[10] X. M. Zhang and Q. L. Han, "Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems with time-varying delay based on a finite sum inequality," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 53, no. 12, pp. 1466-1470, Dec. 2006.

[11] H. Wang, A. Xue, R. Lu, and Y. Chen, "Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain discrete singular time-varying delay systems based on a finite sum inequality," *Proc.of the 26th Chinese Control Conference,* pp. 595-599, July 2007.

[12] L. H. Keel and S. P. Bhattacharya, "Robust, fragile, or optimal?," *IEEE Trans. Automat. Control,* vol. 42, pp. 1098-1105, Aug. 1997.

[13] W. M. Haddad and J. R. Corrado, "Robust resilient dynamic controllers for systems with parameter uncertainty and controller gain variations," *International Journal of Control*, vol. 73, no. 15, pp.1405-1423, 2000.

[14] G. H. Yang, J. L. Wang, and C. Lin, "H_∞ control for linear systems with additive controller gain variations," *International Journal of Control*, vol. 73, no. 16, pp.1500-1506, 2000.

[15] D. Yue and J. Lam, "Non-fragile guaranteed cost control for uncertain descriptor systems with time-varying state and input delays," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 26, pp.85-105, Jan. 2005.

[16] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," *Systems and Control Letters*, vol. 8, pp. 351-357, March 1987.

[17] S. Xu and T. Chen, "Robust H_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays via exponential output feedback controllers," *Systems and Control Letters*, vol. 51, pp. 171-183, March 2004.

김 종 해

1970년 1월 10일생. 1993년 경북대학교 전자공학과(공학사). 1995년 경북대학교 전자공학과(공학석사). 1998년 경북대학교 전자공학과(공학박사). 1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년~2001년 일본 오사카대학 컴퓨터제어기계공학과 객원연구원. 2002년~현재 선문대학교 전자공학부 부교수. 관심분야는 강인제어, 산업응용제어 및 신호처리 등.