

# 그래프의 s-t 절단을 이용한 경로 배정 문제 풀이

## Solving a Path Assignment Problem using s-t Cuts

✉ 김태정<sup>1</sup>

✉ Taejung Kim<sup>1</sup>

1 단국대학교 기계공학과 (Department of Mechanical Engineering, Dankook Univ.)

✉ Corresponding author: taejungkim@dankook.ac.kr, Tel: 031-8005-3499

Manuscript received: 2008.9.11 / Revised: 2008.10.20 / Accepted: 2008.11.18

We introduce a noble method to find a variation of the optimal path problem. The problem is to find the optimal decomposition of an original planar region such that the number of paths in the region is minimized. The paths are required to uniformly cover each subregion and the directions of the paths in each sub-region are required to be either entirely vertical or entirely horizontal. We show how we can transform the path problem into a graph s-t cut problem. We solve the transformed s-t cut problem using the Ford-Fulkerson method and show its performance. The approach can be used in zig-zag milling and layered manufacturing.

Key Words: Toolpaths (공구경로) s-t Cut (s-t 절단) Layered Manufacturing (적층 제조) Graph (그래프)

### 1. 서론

평면 상의 공구 경로 계획은 가공 대상 물체의 황삭(roughing) 계획을 위해 여러 번 시행되어야 한다. 평면 상의 경로로는 경계선에 평행한 오프셋 곡선이나 서로 평행한 직선 경로가 채택된다.<sup>1-3</sup> 이 논문은 후자의 경우를 다룬다. 전체 공정이 각 단면마다 행하는 작업으로 이루어지므로 각 단면에 대한 효율적 경로계획이 필요하다. 적층제조(layered manufacturing)를 위해서도 매층마다 비슷한 계획이 필요하다. 황삭을 위한 공구 경로 생성에 대해서는 다수의 논문이 발표된 바 있으며, Dragomatz<sup>4</sup> 과 Marshall<sup>5</sup>에 체계적으로 정리되어 있다.

공구 경로 생성을 위하여 공구의 반경을 고려하여 절삭대상 지역의 외곽선을 안쪽으로 이동시킨(offset) 지역에 대해 경로를 생성하여야 함은 잘 알려져 있다. 오프셋 곡선의 생성은 CAD/CAM 분야에서 매우 중요한 주제이기는 하지만 이 논문의

주된 관심사는 아니다. 지금부터 주어진 지역이라 함은 원래의 경계의 내측 오프셋곡선으로 둘러싸인 지역을 의미하고 Fig. 1 의 예에서 굵은 선으로 표시되어 있다.

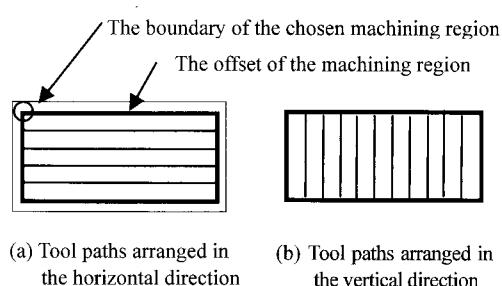


Fig. 1 Tool paths for a rectangular region

공구가 일정속도로 진행하다가 경계에 다다르기 전, 감속하고 경계에서 새로운 경로로 이동한 후, 새 경로에서 다시 가속하기 위해 시간을 소비

하므로, 경로와 경계가 만나는 횟수가 많을수록 경로가 비효율적이 된다. 경계 근처에서 소비하는 시간에 대한 상기 가정의 기술적 타당성은 Sarma<sup>6</sup>에서 검토한 바 있다. 지역 내의 경로의 개수는 경로가 경계와 만나는 횟수의 반이므로, 결국 지역 내의 경로의 개수를 줄이는 문제로 귀착된다. 예를 들어, Fig. 1에 제시한 직사각형 지역에 대한 두 가지 경로 배치법 중, (a)의 경우가 경로의 개수가 적으므로, (b)의 경우보다 효율적이다.

동일한 방향의 경로를 전 지역에 배치하는 경우와 지역을 분할하여 각 지역에 다른 방향의 경로를 배치하는 경우를 Fig. 2와 Fig. 3에서 비교하고 있다.

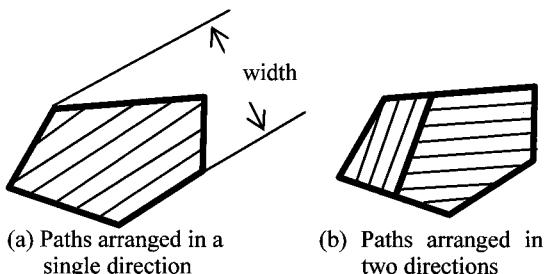


Fig. 2 For a convex region, it is impossible to get a better result by decomposing the region into subregions and imposing parallel paths in each subregion. That is, (a) is better than (b)

불록한(convex) 지역에 대해서는 전 지역에 한 방향의 경로만 선택하는 것으로 충분함을 Fig. 2에 보이고 있다. 즉, 불록한 지역을 분할함으로써 얻는 이득이 없다.<sup>7</sup> 문제의 단순화를 위해 경로가 매우 세밀하게 배열되었다고 가정할 것인데, 이는 Fig. 2에 보인 바와 같이 경로에 수직한 방향으로 측정한 불록한 지역의 폭이 경로의 개수와 비례한다고 가정하는 것과 같다. 폭이 공구 지름의 정수 배가 아닐 수 있으므로 배치되는 경로 한 개의 불확실성으로 인해 염밀히는 비례관계에 약간의 오차가 있으며 경로가 세밀해져서 경로의 개수가 많아지면 그 오차를 무시할 수 있다.

한편, 불록하지 않은 지역에 대해서는 지역을 나누어 각기 다른 방향의 경로를 배정하는 것이 효율적일 수도 있음을 Fig. 3에서 알 수 있다. 그러므로, 일반적인 형상에 대해, 지역을 분할하고 각 지역마다 적절한 방향을 설정하여 전 지역의 경로의 개수를 최소화하는 문제가 현실을 가장 잘

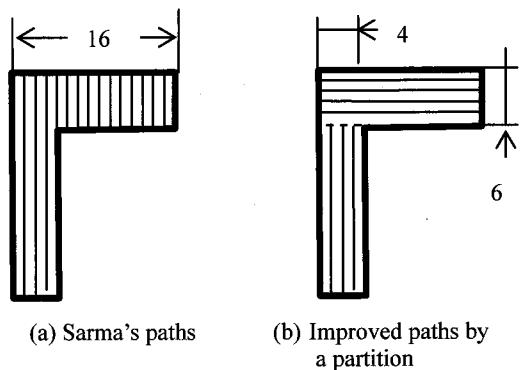


Fig. 3 For a non-convex region, it is possible to get a better result by partitioning the region.

반영한 문제일 것이다. 하지만, 어떻게 지역을 분할할지에 대한 효과적인 해법이 저자가 아는 한 알려진 바 없다. 이와 같이, 어떤 문제의 효과적 해법을 찾지 못한 경우, 주어진 문제에 다소 제한을 가하여 안정적인 해법이 존재하는 표준적인 문제로 변환하는 것이 유용할 수도 있다.

Sarma<sup>6</sup>는 전체 지역에 동일한 방향을 설정한다는 제한조건 하에서, 최적의 방향을 찾는 매우 효율적인 해법을 제시한 바 있다. 하지만, 앞서 언급한 바와 같이, 동일 방향에 대한 제한조건에 의해 분할로 얻을 수 있는 Fig. 3-(b)에서 보인 것과 같은 이득을 놓치는 단점이 있다.

본 논문에서는 경로의 방향이 미리 주어진 두 방향으로 제한된 경우를 다룬다. 이론적으로는 그 두 방향이 평행하지 않기만 하면 되지만, 논의의 편의를 위해 그 두 방향이 서로 수직인 경우로 한정하고자 한다. 이 문제를 가로-세로 경로 배정 문제라 하자. Sarma의 문제는 지역 분할을 허용하지 않지만 무한히 많은 방향 중에서 최적의 경로 방향을 찾는 것을 요구한다. 반면, 가로-세로 경로 배정 문제는 지역 분할을 허용하지만 선택 가능한 방향이 두 개로 제한되어 있다. 가로-세로 경로 배정 문제를 좀 더 명확히 표현하면 다음과 같다.

평면 상에, 서로 수직인 두 방향과 한 지역이 주어져 있다. 주어진 지역을 분할하고 각 지역에 두 방향 중 한 방향으로 정렬된 경로를 등간격으로 배정한다. 이 때, 배정된 경로의 개수가 최소가 되도록 하는 분할과 해당 경로 방향을 찾는다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2 장에서는 그래프의 절단 문제를 소개하고 가로-세로 경로배정 문제를 이산화하여 그래프 절단 문제로 변형하는 방법을 보인다. 3 장에서는 그래프 절단 문제를 다시 최대흐름 문제로 변환한 후 Ford-Fulkerson 의 방법을 사용하여 해결한 결과를 제시한다. 4 장에서 추후 연구 계획을 제시하며 결론을 맺는다.

## 2. 가로-세로 경로 배정 문제와 s-t 절단 문제

본 장에서, 그래프의 절단 문제를 소개하고 가로-세로 경로 배정 문제를 이산화하는 방법과 그래프 절단 문제로 변형하는 방법을 보인다.

### 2.1 최소 s-t 절단 문제

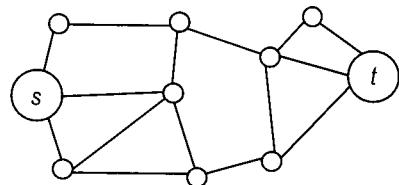
꼭지점(node) 사이에 선분(edge)을 설정하여 꼭지점 간의 연결 관계를 표현한 것을 그래프라 한다.<sup>8,9</sup> 현재 다루는 문제에 대해서는 이와 같은 그래프에 대한 직관적 수준의 이해만으로도 충분하다.

어떤 연결된(connected) 그래프에서 두 꼭지점을 선택하여 각기 s-꼭지점과 t-꼭지점이라 하자. 이와 같이, 특정한 두 꼭지점이 지정된 그래프를 s-t 그래프라 한다. s-t 그래프의 선분을 제거하여, s-꼭지점을 포함하는 연결된 그래프와 t-꼭지점을 포함하는 연결된 그래프로 분할하는 다수의 방법이 존재할 수 있다. 각 분할에 대해 전자에 속하는 꼭지점들의 집합을 S-집합, 후자에 속하는 꼭지점들의 집합을 T-집합이라 하자. 이 분할 방법 중, 제거되는 선분의 개수가 최소가 되는 방법을 찾는 것이 최소 s-t 절단 문제이다.

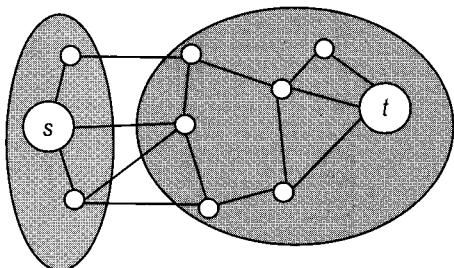
Fig. 4-(a)에 s-t 그래프의 예가 주어져 있다. Fig. 4-(b)와 같이 꼭지점을 분할하여 얻은 두 개의 그래프를 Fig. 4-(c)에 보이고 있다. Fig. 4-(c)의 두 그래프의 꼭지점들이 각기 S-집합과 T-집합을 구성한다. Fig. 4-(b)와 같이 분할할 경우, 4 개의 선분이 절단됨을 알 수 있다. Fig. 4-(d)와 같이 분할한다면 선분 두 개의 절단만으로 충분하고 다른 모든 경우들과 비교하여도 이 경우에 제거되는 선분의 개수가 적음을 알 수 있다. 그러므로, 이 예에서 Fig. 4-(d)의 경우가 최소 s-t 절단을 나타낸다.

### 2.2 문제의 이산화

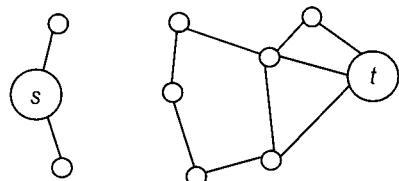
Fig. 5-(a)에 보인 것과 같은 지역을 고려하자.



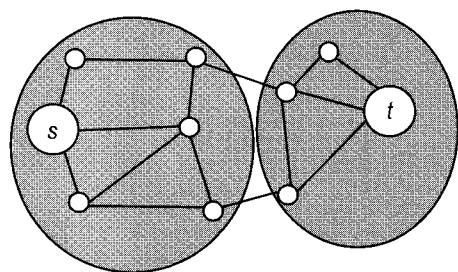
(a) An s-t graph



(b) A cut by which 4 edges are cut



(c) The separated graph by the cut shown in (b)



(d) A cut by which 2 edges are cut

Fig. 4 s-t cuts

주어진 지역을 정사각형 상자로 이루어진 격자에 배치하고 지역의 내측에 포함되는 상자를 모두 골라 격자형의 지역을 형성하자. 생성된 격자형 지역을 Fig. 5-(b)에 보이고 있다. 상자의 크기를 공구의 반지름 이하로 설정하고 주어진 지역의 경계를 따라 한번 가공한다고 가정하면 상기 방법으로 생

성된 격자형 지역에 대해서만 경로를 생성하더라도 전 지역을 절삭할 수 있을 것이다. 앞으로 주어진 지역대신 이와 같이 생성된 격자형 지역의 경로 생성을 다룰 것이다.

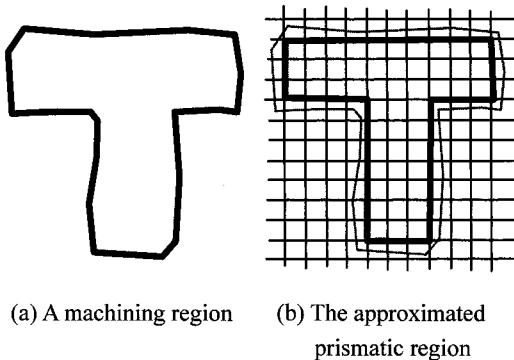


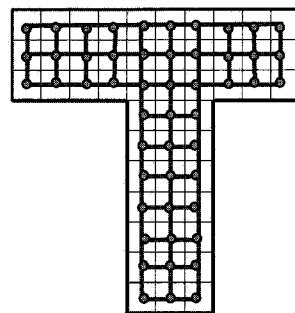
Fig. 5 Constructing the prismatic region

이 때, 격자선을 이루는 두 방향을 각기 가로, 세로 방향이라 칭하자. 1장에서 언급한 대로 가로, 세로 두 방향으로만 경로를 설정할 것이다. 각 상자에 가로, 세로 두 방향의 경로 중 하나를 지정함으로 전 지역에 경로를 설정할 수 있다. 일반성을 잊지 않고, 이웃한 두 상자에 다른 방향의 경로가 설정될 때, 두 상자의 경계에서 소모되는 시간을 단위시간으로 간주할 수 있다. 그렇다면, 주어진 지역의 경계에 인접한 상자에, 경계선에 수직한 경로가 설정될 때, 그 경계에서도 단위시간이 소모된다.

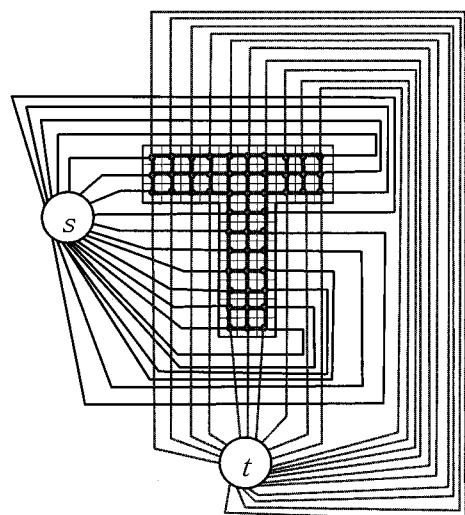
상기 단계에 따라 이산화된 문제에서는 분할된 지역의 경계가 격자선으로 제한된다. 세밀한 격자를 사용할수록 좀더 정밀한 결과를 얻을 수 있을 것이고 공구 반경 이하의 격자면 충분한 정밀도를 가진다. 하지만, 계산 가능한 개수 내의 격자를 설정하는 것이 바람직하다.

### 2.3 s-t 그래프의 구성

격자형 지역 내의 각 상자를 그래프의 꼭지점으로 하고 서로 인접한 상자 사이에 그래프의 선분(edge)을 설정하자. Fig. 5에 주어진 예에 대해 이 과정을 적용하여 생성한 그래프를 Fig. 6-(a)에 보이고 있다. 도식적 표현을 위하여 그래프의 꼭지점을 상자의 중앙에 설정하였으나 그래프는 추상적 연결관계를 나타내는 것이므로 꼭지점의 위치



(a) The adjacency of the boxes



(b) The completed s-t graph

Fig. 6 The s-t graph for the region

는 중요하지 않다.

또, 경계에 위치한 상자 중, 경계선이 세로 방향인 격자에 배정된 꼭지점을 s-꼭지점에 연결하고 경계선이 가로 방향인 꼭지점을 t-꼭지점에 연결한다. 모서리에 있는 격자는 s-꼭지점과 t-꼭지점에 모두 연결한다. 이와 같은 과정을 거쳐 생성한 해당 예에 대한 s-t 그래프를 Fig. 6-(b)에 보이고 있다.

### 2.4 문제의 동등성

최소 s-t 절단 문제를 풀어 S-집합에 포함된 꼭지점에 해당하는 상자에는 세로 방향 경로를, T-집합에 포함된 꼭지점에 해당하는 상자에는 가로 방향 경로를 배정하자.

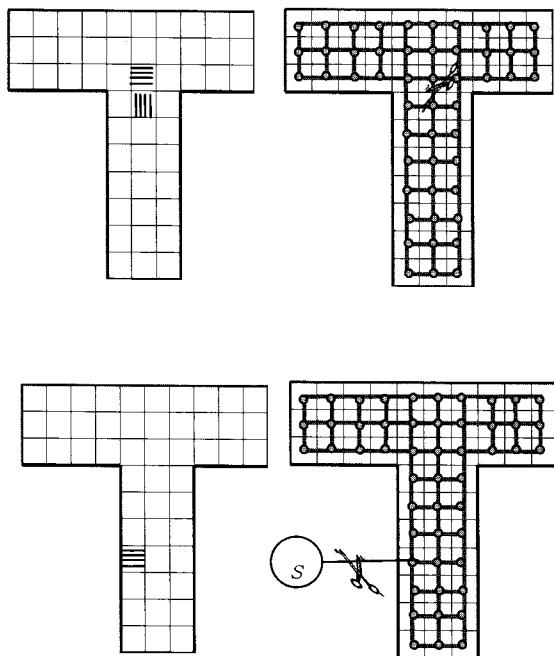


Fig. 7 Equivalence between the time spent by the mismatch of the path direction and the number of cuts

위와 같은 규약으로 경로 방향이 배정될 때, 이웃한 두 상자에 서로 다른 방향이 설정되었다면, 두 상자간 경계선에서 단위 시간이 낭비되는 데, 두 상자에 해당하는 꼭지점을 연결하는 선분이 절단되어 있을 것이므로 그로 인해 절단된 선분의 개수도 하나이다. 한편, 경계에 인접한 격자에 경계선과 수직한 방향이 설정되면 경계에서 단위시간이 낭비되고  $s$  나  $t$ -꼭지점과 연결된 선분이 절단되어 그로 인해 절단된 선분의 개수도 하나이다. 즉, 그래프 선분의 절단과 상자-상자간, 상자-경계간 경로 방향 불일치 사이에 일대일 대응관계를 설정할 수 있고 그 대응 관계를 지킬 때, 소모시간과 절단된 선분의 개수가 일치한다. 마찬가지로 그래프 선분을 절단 없이 유지하는 것과 경로 방향을 일치 시키는 것 사이에도 일대일 대응관계를 설정할 수 있으며, 시간을 소모하지도 선분을 절단하지도 않는다. 그리므로, 앞 절에서 생성된  $s$ - $t$  그래프의 최소절단 문제를 풀어 이산화된 가로-세로 경로 배정 문제를 풀 수 있다. 이 원리를 Fig. 7에 보인다.

### 3. 절단문제의 해법

#### 3.1 네트워크 최대흐름 문제로의 변환

최소  $s$ - $t$  절단 문제는 널리 알려진 문제로 다양한 형식으로 표현된 바 있다.  $s$ - $t$  절단 문제가 네트워크(network)의 최대흐름문제(maximum flow problem)와 밀접한 관계를 가지고 있음이 최대흐름-최소절단의 원리(max-flow min-cut theorem)의 형태로 알려져 있다.<sup>8,9</sup> 최대흐름 문제의 해법들이 다수 개발되어 있으므로, 앞 장에서 구성한  $s$ - $t$  절단 문제를 최대흐름 문제로 변환하여 개발된 알고리즘을 사용하고자 한다.

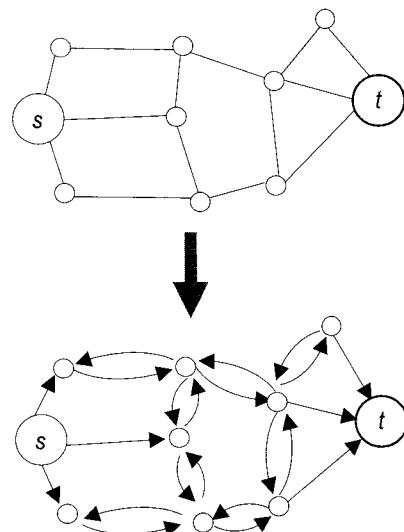


Fig. 8 An  $s$ - $t$  graph and its corresponding network

네트워크(network)는 그래프를 확장한 개념으로, 방향을 가지는 선으로 구성된 그래프의 각 선분에 용량(capacity)이 정해져 있고 각 선분에 음이 아닌 흐름 변수가 배정된다.  $s$ -꼭지점에는 배출되는 선분만이 배정되어야 하고,  $t$ -꼭지점에는 유입되는 선분만 배정되어야 한다. 각 선분의 흐름 변수는 용량보다 작아야 한다. 또,  $s$  와  $t$ -꼭지점을 제외한 각 꼭지점에 연결된 선분들에 배정된 흐름 변수의 합이 0이 되는 보존법칙을 만족하여야 한다. 이 때,  $s$ -꼭지점에 연결된 선분에 배정된 흐름 변수의 합을 네트워크의 흐름양이라 하는데 보존법칙에 의해,  $t$ -꼭지점에 연결된 선분에 배정된 흐름변수의 합과 같다. 최대흐름 문제는 네트워크가 최대 흐름을 갖는 네트워크이다.

름양을 가지도록 각 선분의 흐름변수를 정하는 것이다.

s-t 그래프의 두 꼭지점을 잇는 각 선분을 그 두 꼭지점을 잇는 두 개의 다른 방향의 유향 선분으로 대체하여 네트워크를 구성한다면, 구성된 네트워크의 최대흐름문제를 풀어 주어진 s-t 그래프의 최소절단 문제를 풀 수 있다. 이는 네트워크 최적화 분야에서 널리 알려진 사실이므로, 지면 관계 상 자세한 설명은 생략하고, Fig. 8에 s-t 그래프를 네트워크로 변환한 예를 보이는 것으로 대신 한다. 단, 네트워크의 각 유향선분에는 단위용량을 설정하여야 한다.

### 3.2 Ford-Fulkerson 의 방법 구현 결과

네트워크 최대흐름 문제를 푸는 전통적인 방법인 Ford-Fulkerson<sup>10</sup>의 알고리즘을 상용 소프트웨어인 MATLAB 상에서 구현하여 가로-세로 경로 배정 문제를 해결한 결과를 본 절에 제시한다.

Fig. 9에 격자의 상자 수를 늘려가며 주어진 격자형 지역에 대해 가로-세로 경로 배정을 수행한 결과를 보인다. Fig. 9-(a)는 81 개의 상자를, Fig. 9-(b)는 324 개의 상자를 사용하고 있다. 이와 같은

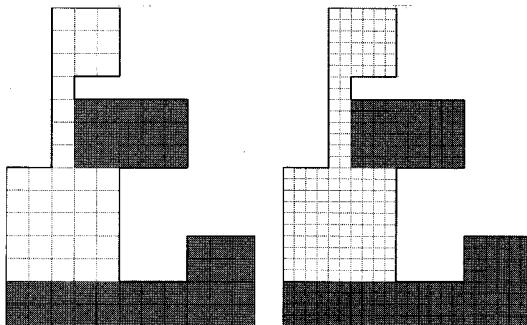


Fig. 9 The optimal regional decomposition

방법으로 상자 수를 늘려가며 상자 수에 따른 실행 시간을 비교하여 Fig. 10에 제시하고 있다. Ford-Fulkerson 알고리즘의 이론적 실행시간이  $O(Ef)$ 로 알려져 있다. 여기서,  $E$ 는 네트워크의 선분의 개수이고  $f$ 는 방향이 절단되는 선분의 개수이다. 위의 예에서 형상을 고정시킨 상태에서 상자의 개수를 증가시키고 있음을 고려하면, 격자간격이 반으로 줄 때, 근사적으로 선분과 상자의 개수가 4 배, 절단되는 선분의 수는 2 배 증가한다. 그러므로, Fig. 10의 그래프에서 실행시간이 상자의

개수의 3/2 승 정도에 비례할 것으로 예측할 수 있다. Fig. 11은 Fig. 10의 결과를 상용로그를 척도로 사용하여 표현한 것인데, 기울기가 대략 3/2 으로 써, 이론적 예측과 매우 정확히 일치함을 알 수 있다.

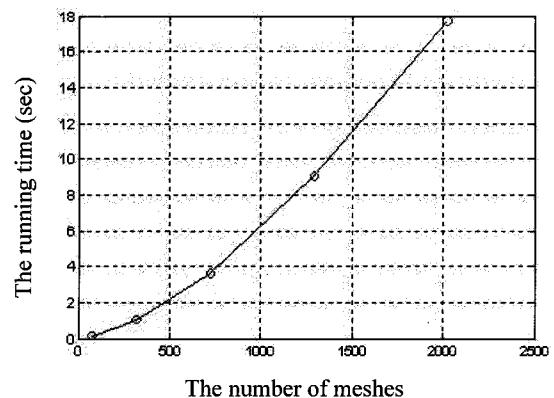


Fig. 10 The tendency of the performance of the implemented algorithm depending on the number of meshes

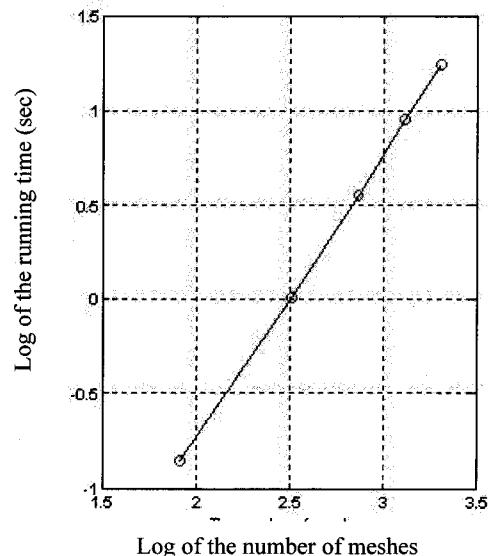


Fig. 11 The tendency of the performance of the implemented algorithm in log-log scale

### 4. 결론

본 연구에서는 등간격으로 배열된 평행한 공구

경로를 생성할 때, 경로 방향이 하나로 제한되는 기존 경로 생성법의 약점을 보완하여 지역을 분할하여 미리 주어진 두 개의 방향 중 하나를 각 지역에 배치하는 방법을 보였다. 주어진 지역을 격자에 배치한 후, 격자를 이루는 상자 사이의 연결 관계를 이용하여 s-t 그래프를 형성하고 조합최적화 분야에서 널리 알려진 최소 s-t 절단문제로 경로 배정 문제를 이산화하는 독창적인 접근법을 시도하였다. 최소 s-t 절단 문제에 대한 전통적 해법인 Ford-Fulkerson 의 방법을 컴퓨터 상에 구현하여 간단한 예에 대해 계산한 결과를 보였다. 실행결과로 미루어 볼 때, 천여 개 정도의 꼭지점을 가지는 지역에 대해서, 이 방법이 실용적인 것으로 판단된다. Ford-Fulkerson 의 기법 외에도 최소 s-t 절단 문제를 선형계획법, 모의 풀림 기법 등을 이용하여 해결할 수 있다. 추후, 다양한 방법을 비교하여 주어진 형태의 그래프에 가장 효율적인 방법을 추구할 예정이다.

## 후기

이 연구는 2008 학년도 단국대학교 대학연구비 지원으로 연구되었음.

## 참고문헌

1. Held, M., "Voronoi diagrams and offset curves of curvilinear polygons," Computer-Aided Design, Vol. 30, No. 4, pp. 287-300, 1998.
2. Kim, H. C. and Yang, M. Y., "An Optimum 2.5D Contour Parallel Tool Path," J. of KSPE, Vol. 23, No. 2, pp. 35-42, 2006.
3. Kim, B. H. and Choi, B. K., "Machining Efficiency Comparison of Direction-parallel Tool Path with Contour-parallel Tool Path," Computer-Aided Design, Vol. 34, No. 2, pp. 88-95, 2002.
4. Dragomatz, D. and Mann, S., "A classified bibliography of literature on NC milling path generation," Computer-Aided Design, Vol. 29, No. 3, pp. 239-247, 1997.
5. Marshall, S. and Griffiths, J. G., "A survey of cutter path construction techniques for milling process," International Journal of Production Research, Vol. 32, Issue 12, pp. 2861-2877, 1994.
6. Sarma, S. E., "The crossing function and its application to zig-zag tool paths," Computer-Aided Design, Vol. 31, No. 14, pp. 881-890, 1999.
7. Bang, T., "A Solution to the Plank Problem," Proceedings of American Mathematical Society, Vol. 2, pp. 990-993, 1951.
8. Kreyszig, E., "Advanced Engineering Mathematics," Jon Wiley & Sons, pp. 1156-1165, 1988.
9. Papadimitriou, C. H. and Steiglitz, K., "Combinatorial Optimization," Dover Publications, Inc., pp. 114-123, 1998.
10. Ford, L. R. and Fulkerson, D. R., "Maximal flow through a network," Canadian Journal of Mathematics, Vol. 8, pp. 399-404, 1956.