

## 난류유동 해석을 위한 $\nu_t - k - \gamma$ 모델의 개발

최원철<sup>†</sup> · 서영민\* · 최상규\*\* · 정명균\*\*\*

(2009년 8월 31일 접수, 2009년 11월 16일 수정, 2009년 11월 17일 심사완료)

### Development of $\nu_t - k - \gamma$ Turbulence Model for Computation of Turbulent Flows

Won Chul Choi, Young Min Seo, Sang Kyu Choi and Myung Kyoon Chung

**Key Words:** Eddy Viscosity(와점성), Intermittency(간헐도), Turbulence Model(난류모델)

#### Abstract

A new eddy viscosity equation was formulated from assumption of turbulence length scale equation and specific dissipation ratio equation. Then, a set of turbulence model equations for the turbulent kinetic energy  $k$ , the viscosity  $\nu_t$ , and the intermittency factor  $\gamma$  is proposed by considering the entrainment effect. Closure coefficients are determined by experimental data and resorting to numerical optimization. Present model has been applied to compute four representative cases of free shear flows and successfully compared with experimental data. In particular, the spreading rate, the centreline mean velocity and the profiles of intermittency are calculated with improved accuracy. Also, the proposed  $\nu_t - k - \gamma$  model was applied to channel flow by considering the wall effect and the results show good agreements with the Direct Numerical Simulation data.

#### 기호설명

$C$	: 난류모델계수
$D, F, G, K, N, W$	: 상사변환함수
$k$	: 난류운동에너지
$\ell$	: 난류길이척도
$P$	: 난류운동에너지 생성량
$R$	: 채널의 반폭
$S_{ij}$	: 평균변형률
$S_k, S_n, S_g$	: 생성 항
$t$	: 시간
$U$	: 유동방향 평균속도

$U_i, u_i$	: 평균속도, 난류속도요동 텐서
$u_\tau$	: 벽면마찰속도
$\frac{u_i u_j}{u_i u_j}$	: 난류전단응력
$x, y$	: 공간좌표

#### 그리스문자

$\alpha, \beta$	: 난류모델계수
$\gamma$	: 간헐계수
$\Gamma$	: 무차원 간헐도 유일 불변량
$\delta$	: 전단층 두께
$\varepsilon$	: 난류소산율
$\eta, \zeta$	: 상사변환좌표
$\theta$	: 운동량 두께
$\kappa$	: Karman 상수
$\nu$	: 동점성계수
$\nu_t, \tilde{\nu}_t$	: 와류점성계수
$\sigma_k, \sigma_n, \sigma_g, \sigma_\ell, \sigma_\omega$	: 난류 Plandtl 수

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : procyon@kaist.ac.kr

TEL : (042)350-3054 FAX : (042)350-3054

\* 두산인프라코어

\*\* 삼성중공업(주) 조선해양연구소

\*\*\* 한국과학기술원 기계공학과

- $\phi$  : 종속변수
- $\chi$  : 회전류팽창(와신장)
- $\Psi$  : 유선함수
- $\omega$  : 난류 비소산율
- $\Omega_{i,j}$  : 평균회전율

아래첨자

- 0 : 중심위치
- $\infty, N$  : 자유류 끝위치, 격자점

### 1. 서 론

난류 유동의 정확한 해석을 위한 직접수치모사법(DNS)은 최근 하드웨어의 발전으로 많이 이용되고 있으나 여전히 고성능의 하드웨어 자원과 시간을 필요로 한다. 따라서 시간평균을 통한 난류 모델(RANS)을 이용하여 난류 유동의 해석이 주로 이루어지고 있으며, 이때 방정식의 수보다 미지수의 수가 많아지는 문제(Closure Problem)가 발생한다. 이를 해결하기 위해 난류 전단 응력(Reynolds stress)을 Boussinesq 와점성 가정으로 정의하고, 와점성(eddy viscosity) 또한 척도 해석 등을 이용한 모델을 통해 정의한다. 일반적으로 난류 모델은 와점성을 정의하는 난류 유동 성분의 지배 방정식의 개수로 분류한다. Baldwin & Barth<sup>(1)</sup>와 Spalart & Allmaras<sup>(2)</sup>는 1방정식 모델로 와점성 방정식을 통해 와점성을 직접적으로 평가하였다. 이 모델은 와점성의 자연 경계 조건을 이용하여 계산이 간단한 장점이 있어 항공분야에서 많이 응용되고 있으나 벽면 거동을 정확하게 모사하지 못하는 한계가 있다. Kim & Chung<sup>(3)</sup>은 이를 보완하기 위하여 대표적인 2방정식 모델인  $k-\omega$  모델<sup>(4)</sup>로부터 와점성 방정식을 유도하여 새로운  $\nu_t - k$  모델을 제안하였다. 그러나 자유전단 유동의 해석 결과에서 벽면 유동의 경우만큼 좋은 결과를 보여주지 못하였다. 경계층 유동의 점성저층과 자유전단유동의 외층 영역에서는 난류 성분과 비난류 성분이 혼합되며 나타나는 간헐적인 유동 특성이 지배적이다. 따라서 이러한 간헐적인 유동 특성을 모사하기 위해서는 추가적인 간헐도 방정식과 새로운 와점성 모델이 필요하다. Cho & Chung<sup>(5)</sup>은 기존의  $k-\varepsilon$  모델에 간헐도 방정식을 추가하여 3방정식 모델을 제안하여 자유전단유동의 퍼짐률과 간헐도 분포를 비교적

정확하게 계산하였다. 그러나 Kim & Chung<sup>(3)</sup>의  $\nu_t - k$  모델과 반대로 벽면 유동의 해석에서는 정확도가 떨어지는 한계가 있어 모든 유동에 적용할 수 있는 보편적인 모델로서의 신뢰도는 다소 부족하다. 따라서 본 연구에서는 와점성을 직접적으로 모형화하는 1방정식 모델의 장점을 살려 벽면에서의 자연경계조건을 이용하고, 난류 길이 척도와 시간 척도의 방정식을 가정하여 와점성 방정식을 새롭게 제안한다. 또한 간헐적인 유동 현상을 고려하기 위해 Cho & Chung<sup>(5)</sup>과 같이 간헐도 방정식을 추가하여 새로운 3방정식 모형으로  $\nu_t - k - \gamma$  모델을 개발하고자 한다. 마지막으로 자유전단유동과 채널 유동의 해석에 모델을 적용하여 보편적인 모델로서의 신뢰도를 평가한다.

### 2. 모델의 개발

와점성의 모형방정식은 직접적인 유도가 어렵기 때문에 차원해석을 통한 척도 성분의 기본적인 방정식으로부터 구성할 수 있다. 비압축성 유동에서 독립변수로서 시간척도와 길이척도의 방정식을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha \frac{P}{\ell^2 \omega} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_\omega \nu_t \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \sigma_d \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{D\ell^2}{Dt} = -C_p \frac{P}{\omega^2} + C_d \omega \ell^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_\ell \nu_t \frac{\partial \ell^2}{\partial x_j} \right] \quad (2)$$

where,  $P = -\frac{\partial U_i}{u_i u_j \partial x_j}$

여기에서  $\ell$ 은 난류 길이척도,  $\omega$ 는 시간의 역수 차원을 갖는 비소산율을 각각 의미한다. 식 (1)의 마지막 항은 교차확산항으로  $k-\omega$  모델<sup>(4)</sup>의  $\omega$  방정식과 같다. 교차확산항은 물리적인 의미를 갖기 어려우나 Wilcox<sup>(4)</sup>는 이를 통해  $k-\omega$  모델의 경계민감도를 줄이고 자유전단유동의 해석 결과를 보다 개선하는데 의미를 두었다. 반면에 난류 길이척도는 순수한 물리량이므로 교차확산항 없이 식 (2)와 같이 구성할 수 있다.

난류 길이 척도와 시간 척도를 통해 상쇄되는 비례상수를 생략하고 난류 운동 에너지와 난류 소산율을  $k = \ell^2 \omega^2$ 와  $\varepsilon = C_\mu \ell^2 \omega^3$ 으로 각각 정의할 수 있다. 또한 와점성은  $\tilde{\nu}_t = \ell^2 \omega$ 으로, 간헐도를 고려한 새로운 와점성은  $\nu_t$ 로 정의한다. 이와 같은

정의로부터 난류운동에너지 방정식과 와점성 방정식은 식 (3)과 식 (4)로 유도할 수 있다.

$$\frac{Dk}{Dt} = \omega^2 \frac{D\ell^2}{Dt} + 2\omega\ell^2 \frac{D\omega}{Dt} \quad (3)$$

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = \omega \frac{D\ell^2}{Dt} + \ell^2 \frac{D\omega}{Dt} \quad (4)$$

### 2.1 난류운동에너지 방정식

식 (3)으로 나타나는 난류운동에너지 방정식에 식 (1)과 식 (2)의 척도 방정식을 대입하면 식 (5)와 같이 정리된다. 식 (6)은 Navier-Stokes 방정식으로부터 유도되는 일반적인 난류운동에너지 방정식으로서 식 (5)와 같아야 하므로 식 (7), 식 (8)과 같은 관계식 및 계수 관계를 얻을 수 있다.

### 2.2 와점성 방정식

난류운동에너지 방정식과 같이 식 (4)에 식 (1)과 식 (2)의 척도 방정식을 대입하고, 앞서 구한 식 (7), 식 (8)의 관계식으로부터 와점성 방정식을 식 (9)와 같이 정리할 수 있다. 이때 각 모델 방정식에서의 난류 Prandtl 수가 같다는  $\sigma_\omega = \sigma_\ell = \sigma_n$ 의 가정으로 난류 운동 에너지의 확산항은 무시할 수 있다.

### 2.3 모델상수

모델상수를 결정하기 위하여 먼저 난류운동에너지의 생성이 발생하지 않는 등방성 감쇠 난류 (isotropic decay turbulence)를 가정할 수 있다. 이때 난류운동에너지와 와점성 방정식은 식 (10)과 같이 나타나며  $k \sim t^{-n}$ 의 감쇠 관계를 만족한다. 이를 통해  $C_{n2} = C_\mu - C_\mu/n$ 의 관계식을 얻을 수 있으며 지수  $n$ 을 Comte-Bellot & Corrsin<sup>(6)</sup>과 같이 실험값으로부터 1.2로 선택하여  $C_{n2} = 0.01$ 로 결정한다.

다음으로 균질성 전단 유동(homogeneous shear flow)를 가정하면 난류운동에너지와 와점성 방정식은 식 (11)과 같다. 이때 난류 시간척도가 일정하므로  $d(k/\tilde{\nu}_t)/dt = 0$  으로부터  $C_{n1} = 1 - (\varepsilon/P)/n$ 을 만족한다. 이때 Tavoularis & Karnik<sup>(7)</sup>은  $P/\varepsilon$ 의 값이 일정한 것을 보였으며, 실험값으로부터  $P/\varepsilon$ 을 2로 평가하여  $C_{n1} = 0.58$ 로 결정할 수 있다.

마지막으로 난류 경계층의 대수역을 고려할 수 있다. 이 영역에서는 Klebanoff의 간헐도식<sup>(4)</sup>에 따라  $\gamma = 1$ 이므로  $\nu_t = \tilde{\nu}_t$ 와 같고, 식 (12)와 같은 관계식이 성립한다. 와점성 방정식에 경계층 근사를 적용하고, 관계식을 대입하면  $\sigma_n = 0.7$ 로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & (2\alpha - C_p)P - (2\beta - C_d) \frac{k^2}{\nu_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (2\sigma_\omega - \sigma_\ell) \nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + (2\sigma_\ell + 4\sigma_\omega) \frac{\nu_t k}{\tilde{\nu}_t^2} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right)^2 \\ & - (4\sigma_\ell + 4\sigma_\omega) \frac{\nu_t}{\tilde{\nu}_t} \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} + 2\sigma_\ell \frac{\nu_t}{k} \left( \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{k}{\tilde{\nu}_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (2\sigma_\ell - 2\sigma_\omega) \nu_t \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{Dk}{Dt} = P - C_\mu \frac{k^2}{\nu_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_k \nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (6)$$

$$(2\sigma_\ell + 4\sigma_\omega) \frac{\nu_t k}{\tilde{\nu}_t^2} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right)^2 - (4\sigma_\ell + 4\sigma_\omega) \frac{\nu_t}{\tilde{\nu}_t} \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} + 2\sigma_\ell \frac{\nu_t}{k} \left( \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{k}{\tilde{\nu}_t} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (2\sigma_\ell - 2\sigma_\omega) \nu_t \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (7)$$

$$2\alpha - C_p = 1, \quad 2\beta - C_d = C_\mu, \quad 2\sigma_\omega - \sigma_\ell = \sigma_k \quad (8)$$

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = C_{n1} \frac{\tilde{\nu}_t}{k} P - C_{n2} k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_n \nu_t \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right] - C_{n3} \frac{\nu_t}{\tilde{\nu}_t} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right)^2 + C_{n4} \frac{\nu_t}{k} \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} - C_{n5} \frac{\nu_t \tilde{\nu}_t}{k^2} \left( \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)^2 \quad (9)$$

$$\text{where, } C_{n1} = 1 - \alpha, \quad C_{n2} = C_\mu - \beta, \quad C_{n3} = 2\sigma_n, \quad C_{n4} = 2\sigma_n(1 + \sigma_d), \quad C_{n5} = 2\sigma_n \sigma_d$$

$$\frac{dk}{dt} = -C_\mu \frac{k^2}{\nu_t}, \quad \frac{d\tilde{\nu}_t}{dt} = -C_{n2} k \quad (10) \quad \frac{dk}{dt} = P - C_\mu \frac{k^2}{\nu_t}, \quad \frac{d\tilde{\nu}_t}{dt} = C_{n1} \frac{\tilde{\nu}_t}{k} P - C_{n2} k \quad (11)$$

$$U = \frac{u_\tau}{\sqrt{C_\mu}} \ln y + C, \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \nu_t = \kappa u_\tau y \quad (12)$$

**Table 1** Closure Coefficients

	$C_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_n$	$C_{n1}$	$C_{n2}$	$C_{n3}$	$C_{n4}$	$C_{n5}$
Present	0.09	0.7	0.7	0.58	0.01	1.4	2.38	0.98

교차확산항은 물리적인 의미부여가 어렵고 위와 같은 결정법으로 그 크기를 평가할 수 없으므로 수치적으로 평가한다. 본 연구에서는 평면제트 유동의 속도장 해석으로부터  $\sigma_d$ 를 0.7로 결정하였다. 최종적으로 본 연구에서 결정한  $\nu_t - k - \gamma$  모델의 종결계수는 Table 1과 같다.

2.4 간헐성 와점성 모델

와점성  $\nu_t$ 는 기본적으로 현상학적인 양으로서 척도해석을 통해  $\nu_t \sim \sqrt{k}l$ 로 평가된다. 그러나 간헐적인 유동 특성을 갖는 영역에서는 난류 유동과 비난류 유동 사이의 평균 속도 차이가 존재하므로 추가적인 속도 척도가 필요하다. Lumley<sup>(8)</sup>는 이러한 속도점프를 간헐도의 구배와 속도점프 스스로에 의해 초래되는 것으로 표현하였다. 본 연구에서는 이를 이용하여 Cho & Chung<sup>(5)</sup>이 새롭게 제안한 식 (13)과 같은 간헐도가 고려된 와점성 관계식을 사용하였다.

$$\nu_t = \left[ 1 + \frac{C_{\mu g}}{C_\mu^2} \gamma^{-3} (1-\gamma) \frac{\tilde{\nu}_t^2}{k} \frac{\partial \gamma}{\partial x_k} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] \tilde{\nu}_t \quad (13)$$

2.5 간헐도 방정식

Dopazo<sup>(9)</sup>는 연속방정식과 간헐도 지시함수의 곱에 앙상블 평균을 취하여 식 (14)와 같은 간헐도 방정식을 유도하였다. 여기서  $D_g$ 는 속도점프로 인해 야기되는 간헐도 수송을 의미하고,  $S_g$ 는 단위체적당 비난류 유체가 난류 유체로 전환되는 평균 변화율을 나타낸다. Cho & Chung<sup>(5)</sup>은 식 (15)와 식 (16)과 같이 Byggstoyl & Kollmann<sup>(10)</sup>의 간헐도 방정식에 외부 유입효과를 추가하였다. 여기서  $\Gamma$ 는 간헐적인 평균속도구배의 상호작용으로 비난류 유동에서 난류 유동으로 유입되는 간헐적인 양을 의미하며 식 (17)과 같다.<sup>(5)</sup> 본 연구에서는 Cho & Chung<sup>(5)</sup>에서 사용한 모델계수를 바탕으로  $C_{g1} = 1.6$ ,  $C_{g2} = 0.15$ 를 그대로 적용하고, 평면제트의 간헐도 분포를 바탕으로  $\sigma_g = 0.7$ ,  $C_{\mu g} = 1.0$ ,  $C_{g3} = 0.36$ 으로 결정하였다.

$$U_j \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} = D_g + S_g \quad (14)$$

$$D_g \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (1-\gamma) \frac{\nu_t}{\sigma_g} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] \quad (15)$$

$$S_g = C_{g1} \gamma (1-\gamma) \frac{P}{k} + C_{g2} \frac{\tilde{\nu}_t}{C_\mu} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right)^2 - C_{g3} \gamma (1-\gamma) \frac{k}{\nu_t} \Gamma \quad (16)$$

$$\Gamma = \frac{1}{C_\mu} \frac{\tilde{\nu}_t^2}{k^{1.5}} \frac{U_i}{(U_k U_k)^{0.5}} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \quad (17)$$

3. 자유전단유동

앞서 제안한  $\nu_t - k - \gamma$  모델 방정식을 자유전단 유동의 해석에 적용하기 위하여 고 Reynolds 수의 얇은 경계층 유동을 가정하여 자유전단유동의 대표적인 유형인 평면 및 원형제트, 평면 혼적류 및 혼합층 유동에 관하여 논한다.

3.1 방정식의 상사변환

자유전단유동의 해석은 난류 척도를 이용한 지배방정식의 상사변환으로 수치해석을 통해 이루어질 수 있다. Table 2는 자유전단유동의 각 유동 특성에 따라 상사좌표  $\eta$ 와 stream function  $\Psi(x, \eta)$ 를 정의하고, 종속변수인  $U(x, y)$ ,  $k(x, y)$ ,  $\tilde{\nu}_t(x, y)$ ,  $\gamma(x, y)$ ,  $\nu_t(x, y)$ 를  $W(\eta)$ ,  $K(\eta)$ ,  $N(x, y)$ ,  $G(\eta)$ ,  $D(\eta)$ 으로 각각 상사 변환하여 나타낸 것이다. 이때 자유전단유동의 경계조건으로 유동의 외측영역에서 난류운동에너지와 와점성 등이 0에 근접하면서 수치적인 불안정을 가져온다. 따라서 Paullay et al.<sup>(11)</sup>은 식 (18)과 같은 적분좌표계를 제안하여 연립된 방정식을 분리하고, 수치적분을 안정적이고 효율적으로 해결하였다.

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = D(\zeta) \quad , \quad \eta = \int_0^\zeta D(\zeta) d\zeta \quad (18)$$

$$\text{where, } D(\zeta) = \left[ 1 + \frac{C_{\mu g}}{C_\mu^2} \frac{N^2}{K} \frac{1-G}{G^3} \left( \frac{1}{D} \frac{dG}{d\zeta} \right)^2 \right] N$$

위와 같은 방법으로 지배방정식을  $(x, y)$ 좌표에서  $(x, \zeta)$ 좌표로 상사변환하면 종속변수  $\phi$ 에 대하여 식 (19)와 같이 일반적인 2차 미분 방정식 형태로 표현할 수 있다. Table 3은 각  $\phi$ 에 해당하는 계수  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $S$ 를 나타낸 것이다.

$$-A\phi - B \frac{d\phi}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \left[ C \frac{d\phi}{d\zeta} \right] + S \quad (19)$$

3.2 평면/원형 제트 및 제트/흔적류 이질성

기존의 난류모델을 통한 자유전단 유동의 해석에서 나타나는 평면/원형 제트의 이질성을 해결하기 위해 Pope<sup>(12)</sup>는 축대칭유동에서만 나타나는 와신장(vortex stretching)을  $\chi \equiv (k/\varepsilon)^3 \Omega_{ij} \Omega_{jk} S_{ki}$  으로 정의하여 원형제트의 해석에서 난류소산방정식의 소멸항에  $C_{\varepsilon 3} \chi \varepsilon^2/k$  항을 추가하였다. 와신장 현상은 큰 와류에서 작은 와류로의 에너지 전달을 촉진시키고 난류 소산 역시 증가시키는 역할을 하며 이 항의 추가로 크게 예측되는 원형 제트의 퍼짐율을 감소시킬 수 있다. 또한 Cho & Chung<sup>(5)</sup>은 제트와 흔적류에서 다르게 나타는 간헐도의

외부 유입 효과( $\Gamma$ )를 난류소산방정식에 고려하여 제트/흔적류 이질성을 해결하였다. 본 연구에서도 Cho & Chung<sup>(5)</sup>이 제안한 난류소산방정식의 형태와 같이 식 (20)으로 정의되는  $\chi$ 와  $\Gamma$ 항을  $\tilde{\nu}_t$  방정식의 흡입(Source)항에 추가하였다.

3.3 경계조건 및 수치계산방법

지배방정식의 각 종속 변수에 대한 경계조건은 Table 4와 같다. 제트의 중심( $\zeta=0$ )에서는 평균 속도에 대한 경계조건( $w_0=1$ )을 제외하고 모든 변수에 대하여 대칭조건을 적용할 수 있다. 자유류 경계( $\zeta \rightarrow \infty$ )에서는 Paullay et al.<sup>(11)</sup>와 같이 모든 변

Table 2 Definitions of similarity variables

	Plane jet	Round jet	Plane wake	Mixing layer
$\eta$	$y/x$	$y/x$	$y/\sqrt{\theta x}$	$y/x$
$\Psi(x, \eta)$	$U_0(x)x F(\eta)$	$U_0(x)x^2 F(\eta)$		$U_M x F(\eta) - U_L x \eta$
$U(x, y)$	$U_0(x) W(\eta)$	$U_0(x) W(\eta)$	$U_\infty - U_{d0}(x) W(\eta)$	$U_M W(\eta) + U_L$
$W(\eta)$	$dF/d\eta$	$dF/\eta d\eta$	$U_{d0}(x) \equiv U_\infty Q \sqrt{\theta/x}$	$dF/d\eta$
$V(x, y)$	$U_0(x)\{\eta W - F/2\}$	$U_0(x)\{\eta W - F/\eta\}$	$\ll U(x, y)$	$U_M(x)\{\eta W - F\}$
$k(x, y)$	$U_0^2(x) K(\eta)$	$U_0^2(x) K(\eta)$	$U_{d0}^2(x) K(\eta)$	$U_M^2(x) K(\eta)$
$\tilde{\nu}_t(x, y)$	$U_0(x)x N(\eta)$	$U_0(x)x N(\eta)$	$U_{d0}(x) \sqrt{\theta x} N(\eta)$	$U_M(x)x N(\eta)$
$\nu_t(\zeta)$	$U_0(x)x D(\eta)$	$U_0(x)x D(\eta)$	$U_{d0}(x) \sqrt{\theta x} D(\eta)$	$U_M(x)x D(\eta)$
$\gamma(x, y)$	$G(\eta)$	$G(\eta)$	$G(\eta)$	$G(\eta)$
	$U_0^2 x \int_0^\infty W^2 d\eta = c$	$U_0^2 x^2 \int_0^\infty \eta W^2 d\eta = c$	$Q \equiv \left[ \int_0^\infty W d\eta \right]^{-1}$	$U_M \equiv U_H - U_L$

Table 3 Coefficients of similarity transformed equations

$\phi$	Plane jet				Round jet			
	A	B	C	S	A	B	C	S
$F(\zeta)$	0	1	0	$-DW$	0	1	0	$-\eta DW$
$W(\zeta)$	$F/2$	1	0	0	$F$	$\eta$	0	0
$K(\zeta)$	$DW$	$F/2$	$\sigma_k$	$DS_k$	$2\eta DW$	$F$	$\eta \sigma_k$	$\eta DS_k$
$N(\zeta)$	$-DW/2$	$F/2$	$\sigma_n$	$DS_n$	0	$F$	$\eta \sigma_n$	$\eta DS_n$
$G(\zeta)$	0	$F/2$	$(1-G)\sigma_g$	$DS_g$	0	$F$	$\eta(1-G)\sigma_g$	$\eta DS_g$
$\phi$	Plane wake				Mixing layer			
	A	B	C	S	A	B	C	S
$F(\zeta)$					0	1	0	$-DW$
$W(\zeta)$	$\eta/(2Q)$	1	0	0	0	$F + \eta U_L/U_M$	1	0
$K(\zeta)$	$D/Q$	$\eta/(2Q)$	$\sigma_k$	$DS_k$	0	$F + \eta U_L/U_M$	$\sigma_k$	$DS_k$
$N(\zeta)$	0	$\eta/(2Q)$	$\sigma_n$	$DS_n$	0	$F + \eta U_L/U_M$	$\sigma_n$	$DS_n$
$G(\zeta)$	0	$\eta/(2Q)$	$(1-G)\sigma_g$	$DS_g$	0	$F + \eta U_L/U_M$	$(1-G)\sigma_g$	$DS_g$
$S_k = P - C_\mu \frac{K^2}{N}, \quad S_g = C_{g1} G(1-G) \frac{P}{K} + C_{g2} N \left( \frac{1}{D} \frac{dG}{d\zeta} \right)^2 - C_{g3} G(1-G) \frac{K}{N} \Gamma$ $S_n = C_{n1} \frac{N}{K} P - (C_{n2} + C_{\varepsilon 3} \chi + C_{\varepsilon 4} \Gamma) K - C_{n3} \frac{N}{D} \left( \frac{1}{N} \frac{dN}{d\zeta} \right)^2 + C_{n4} \frac{1}{DK} \frac{dK}{d\zeta} \frac{dN}{d\zeta} - C_{n5} \frac{N}{D} \left( \frac{1}{K} \frac{dK}{d\zeta} \right)^2$ <p style="text-align: center;">where, <math>\chi = \frac{0.25}{C_\mu^2} \frac{N^3}{K^3} \left( \frac{1}{D} \frac{dW}{d\zeta} \right)^2 \left( W - \frac{F}{\eta} \right), \quad \Gamma = \frac{1}{C_\mu} \frac{N^2}{K^{1.5}} \left( \frac{1}{D^2} \frac{dW}{d\zeta} \frac{dG}{d\zeta} \right)</math> (20)</p> $C_{\varepsilon 3} = 0 \quad (C_{\varepsilon 3} = 0.79 \text{ for a round jet}), \quad C_{\varepsilon 4} = 0.1 \quad (C_{\varepsilon 4} = -0.1 \text{ for a plane wake})$								

**Table 4** Summary of boundary conditions in the  $\zeta$ -coordinate

Plane jet	Round jet	Plane wake	Mixing layer
$\delta_0 = 0$	$\delta_0 = 0$	$\delta_0 = 0$	$\delta = 0$ at $\eta = 0$
$F_0 = 0$	$F_0 = 0$		$F_0 = [\eta W]_0 + U_L/U_H[\eta W - F]_N$
$W_0 = 1$	$W_0 = 1$	$W_0 = 1$	$W_0 = 1 - (1 - W_1)\exp(Q_m^-)$
$W_N = W_{N-1}\exp(Q_p)$	$W_N = W_{N-1}\exp(Q_r)$	$W_N = W_{N-1}\exp(Q_w)$	$W_N = W_{N-1}\exp(Q_m^+)$
$K'_0 = 0$	$K'_0 = 0$	$K'_0 = 0$	$K'_0 = K'_1\exp(Q_m^-/\sigma_k)$
$K'_N = K'_{N-1}\exp(Q_p/\sigma_k)$	$K'_N = K'_{N-1}\exp(Q_r/\sigma_k)$	$K'_N = K'_{N-1}\exp(Q_w/\sigma_k)$	$K'_N = K'_{N-1}\exp(Q_m^+/\sigma_k)$
$N'_0 = 0$	$N'_0 = 0$	$N'_0 = 0$	$M_0 = M_1\exp(Q_m^-/\sigma_n)$
$M_N = M_{N-1}\exp(Q_p/\sigma_n)$	$M_N = M_{N-1}\exp(Q_r/\sigma_n)$	$M_N = M_{N-1}\exp(Q_w/\sigma_n)$	$M_N = M_{N-1}\exp(Q_m^+/\sigma_n)$
$G'_0 = 0$	$G'_0 = 0$	$G'_0 = 0$	$G_0 = G_1\exp(Q_m^-/\sigma_g)$
$G'_N = G'_{N-1}\exp(Q_p/\sigma_g)$	$G'_N = G'_{N-1}\exp(Q_r/\sigma_g)$	$G'_N = G'_{N-1}\exp(Q_w/\sigma_g)$	$G'_N = G'_{N-1}\exp(Q_m^+/\sigma_g)$
$Q_p \equiv F_N(\zeta_{N-1} - \zeta_N)/2$	$Q_r \equiv [F/\eta]_N(\zeta_{N-1} - \zeta_N)$	$Q_w \equiv \eta_N(\zeta_{N-1} - \zeta_N)/(2Q)$	$Q_m^- \equiv [F + \eta U_L/U_M]_0(\zeta_1 - \zeta_0)$ $Q_m^+ \equiv [F + \eta U_L/U_M]_N(\zeta_{N-1} - \zeta_N)$

**Table 5** Spreading rates of the free shear flow

	Exp. <sup>(4)</sup>	Present	$\nu_t - k$	Spalart-Allmars	$k - \varepsilon$	$k - \omega$	$k - \varepsilon - \gamma$
Plane jet	0.1	0.096	0.122	0.156	0.108	0.108	0.1
Round jet	0.086	0.088	0.284	0.246	0.120	0.094	0.086
Plane wake	0.365	0.377	0.421	0.341	0.256	0.326	0.423
Mixing layer	0.115	0.109	0.124	0.108	0.098	0.096	0.118

수에 대하여 경계 직전의 지점의 값으로부터 접근법을 통해 구할 수 있다.

식 (19)로 표현된 지배방정식은 3개의 격자점에 대한 차분법을 통해 대수방정식 형태로 3대각 행렬(TDMA)을 구성하고, Cho & Chung<sup>(5)</sup>의 Fortran code를 수정하여 계산을 수행하였다. 각 변수에 대하여  $|\phi_{new} - \phi_{old}|/|\phi_{new} + \phi_{old}| < 10^{-6}$ 와 같은 근사 상대오차 평균의 수렴판정을 통해 반복 계산을 하였다.

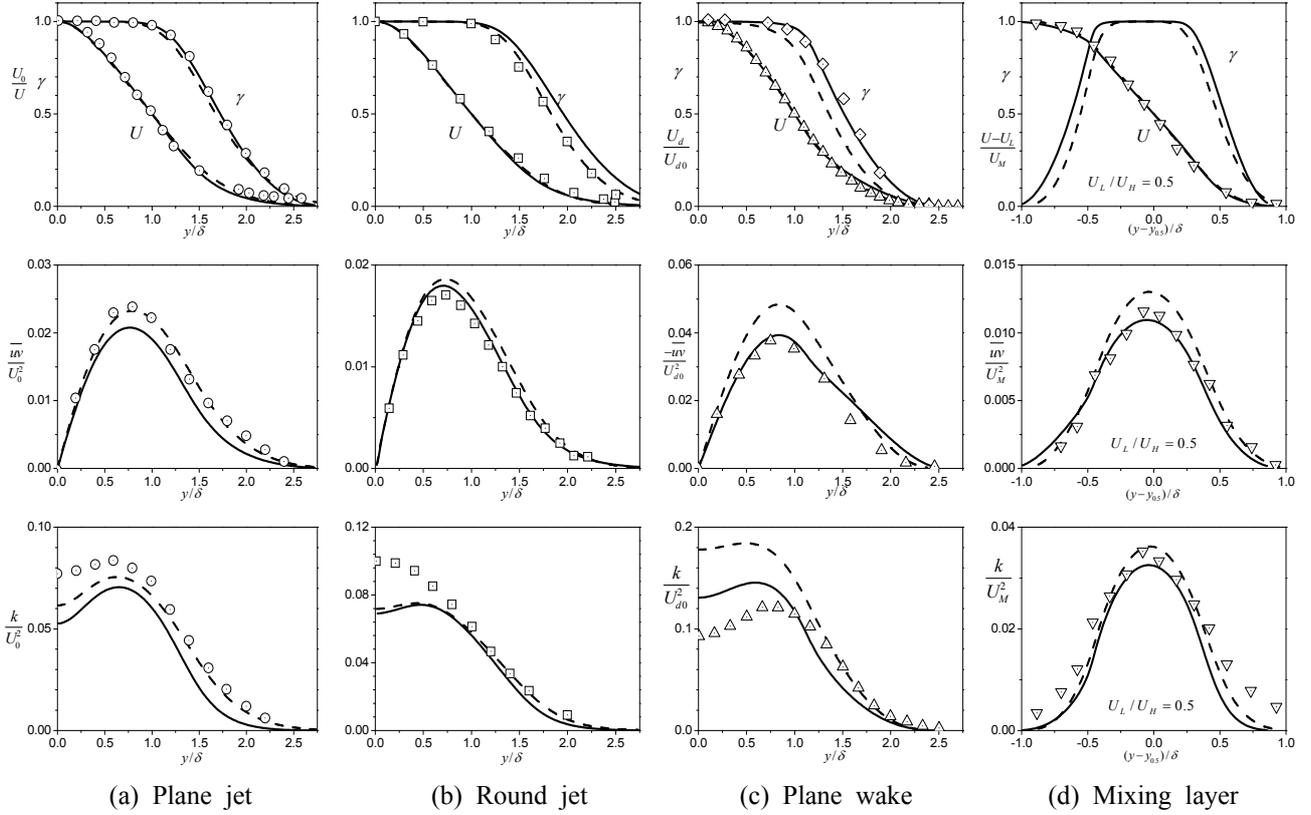
3.5 계산결과

Fig. 2는 자유전단유동의 평균속도 및 간헐도, 난류운동에너지와 난류전단응력 분포를 나타낸 것이다.  $\nu_t - k - \gamma$  모델은  $k - \varepsilon - \gamma$  모델과 같이 실험결과의 경향성을 따라 비교적 정확한 해석 결과를 보여준다. Table 5는 각 난류 모델에 대한 자유전단유동의 퍼짐율을 나타낸 것으로  $\nu_t - k$  모델에 비해 간헐도와 교차확산항을 고려한 본 모델의 결과가 보다 정확한 것을 확인할 수 있다. 특히 혼적류와 혼합류에서는 다른 모델에 비해 상당히 정확한 결과를 보여준다.

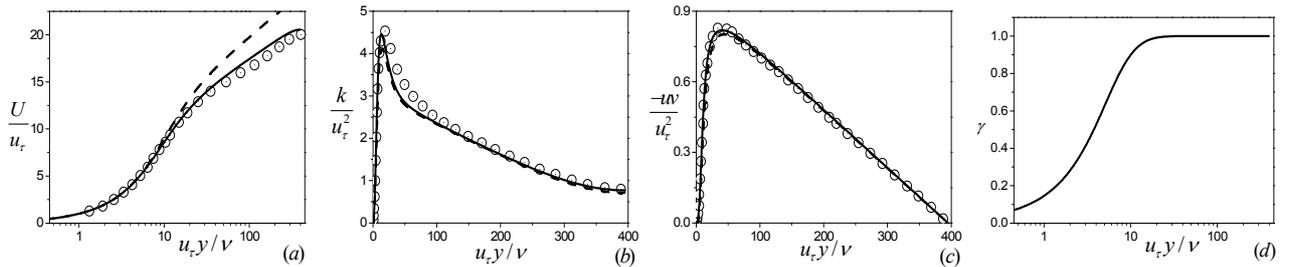
4. 벽면전단유동

경계층유동은 자유전단유동과 달리 강제 벽면에서 유체의 점성에 의한 점착조건으로 발생하는 벽면거동을 고려해야 한다. 난류운동에너지와 난류 소산 및 전단응력의 벽면 접근거동은  $k \sim y^2$ ,  $\varepsilon \sim \varepsilon_w$ ,  $\nu_t \sim y^3$ 와 같으며  $\varepsilon_w$ 은 벽면에서의 소산으로서 Jones & Launder 모델<sup>(13)</sup>로  $2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)^2$ 와 같이 표현할 수 있다. 본 연구에서는 Kim & Chung<sup>(3)</sup>이 제안한 것과 같이 난류운동에너지와 와점성 방정식에  $2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial y)^2$ 와  $8\nu(\partial\sqrt{\nu_t}/\partial y)^2/3$ 을 각각 추가하여 채널 유동 해석에 적용하였다. 또한 저 Reynolds 수 유동을 고려하기 위한 분자점성과 함께 완충층(buffer layer)에서의 정확도를 높이기 위하여 식 (23)과 같은 감쇠함수를 추가하여 난류운동에너지와 와점성 방정식을 식 (21)과 식 (22)로 각각 수정 하였다. 경계조건으로 벽에서의 모든 변수 값을 0으로 하고, 채널의 중앙에는 Neumann 조건을 적용한다.

Fig. 3은  $u_\tau R/\nu = 395$ 에서 채널 유동의 수치해석 결과로서 평균속도, 난류운동에너지, 난류전단응력 및 간헐도 분포를 나타낸다. 벽면전단유동에서는 벽 근처의 점성아층( $u_\tau y/\nu < 10$ )을 제외하고 모든 층에서 완전난류의 성질을 갖기 때문에 채널유동의 해석에서는 간헐도의 영향이 작다. 따라서 간헐도 고려가 없는  $\nu_t - k$  모델<sup>(3)</sup>의 해석결과와 크게 다르지 않다. 또한 벽면에서의 자연경계조건을 그대로 사용하는 본 모델이  $k - \varepsilon - \gamma$  모델에 비해 DNS 데이터<sup>(14)</sup>에 보다 일치한다.



**Fig. 2** The streamwise mean velocity, the intermittency factor, the Reynolds shear and the turbulent kinetic energy profiles for free shear flows. —, present  $\nu_t-k-\gamma$  model; -----,  $k-\varepsilon-\gamma$  model of Cho and Chung<sup>(5)</sup>; ○, data( $Re = 3 \times 10^4$ ) of Gutmark & Wygnanski<sup>(15)</sup>; □, data( $Re = 10^5$ ) of Wygnanski & Fiedler<sup>(16)</sup>; △, solid strip data( $Re_L = 2166$ ) of Wygnanski et al.<sup>(17)</sup>; ◇, data( $Re_d = 2800$ ) of LaRue<sup>(18)</sup>; ▽, data( $Re_{\theta,H} = 890, Re_{\theta,L} = 570$ ) of Mehta & Westphal<sup>(19)</sup>



**Fig. 3** (a) Mean velocity, (b) turbulent kinetic energy, (c) Reynolds stress, and (d) intermittency profiles of channel flow at  $u_\tau R/\nu = 395$ . —, present  $\nu_t-k-\gamma$  model; -----,  $k-\varepsilon-\gamma$  model of Cho and Chung<sup>(3)</sup>; ○, DNS data of Kim et al.<sup>(14)</sup>

$$\frac{Dk}{Dt} = P - C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\nu_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - 2\nu \left( \frac{d\sqrt{k}}{dx_j} \right)^2 \quad (21)$$

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = C_{n1} \frac{\tilde{\nu}_t}{k} P - C_{n2} f_{n1} k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu + \sigma \nu_t \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right] - C_{n3} \frac{\nu_t}{\tilde{\nu}_t} \left( \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right)^2 + C_{n4} \frac{\nu_t}{k} \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} - C_{n5} \frac{\nu_t \tilde{\nu}_t}{k^2} \left( \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)^2 \quad (22)$$

$$f_\mu = 1 - \exp[-(R_y/55)^3], \quad f_{n1} = 1 - \exp[-(R_y/200)^4], \quad f_{n2} = 1 - \exp[-(R_y/100)^4] \quad (23)$$

where,  $R_y = \sqrt{k} y_n / \nu$ ,  $y_n$  is a distance from the wall

5. 결 론

본 연구에서는 속도척도와 길이척도를 통해 와점성방정식을 유도하고, Cho & Chung<sup>(5)</sup>의 간헐도방정식과 함께 새로운  $\nu_t - k - \gamma$  모델을 개발하였다. 등방성 감쇠 난류 및 균질 전단 유동의 가정을 통해 모델계수를 결정하고, 자유전단유동과 채널 유동의 해석에 적용하여 모델을 평가하였다. 기존의  $\nu_t - k$  모델<sup>(3)</sup>과  $k - \varepsilon - \gamma$  모델<sup>(5)</sup>은 벽면 유동과 자유전단유동에만 각각 적합한 결과를 보였다. 그러나 본 연구의  $\nu_t - k - \gamma$  모델은  $\nu_t$ 의 자연경계조건을 적용하고 점성저층과 자유류 근방의 간헐도를 고려하여 채널 유동 및 자유전단유동의 해석에서 전체적으로 적합한 결과를 보여주었다. 이로써 자유전단유동과 벽면전단유동 해석에 이용될 수 있는 3방정식 모델로서 신뢰도를 갖추었다고 할 수 있다.

참고문헌

(1) Baldwin, B. S. and Barth, T. J., 1991, "A One-Equation Turbulence Transport Model for High Reynolds Number Wall-Bounded Flows," *AIAA Paper*, 91-0610.  
 (2) Spalart, P. R. and Allmaras, S. R., 1992, "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows," *AIAA Paper*, 92-439.  
 (3) Kim, S. H. and Chung, M. K., 2001, "New  $\nu_t - k$  Model for Calculation of Wall-Bounded Turbulent Flows," *AIAA J.*, Vol. 39, No. 9, pp. 1803~1805.  
 (4) Wilcox, D. C., 2006, "Turbulence Modeling for CFD Third Edition," DCW industries.  
 (5) Cho, J. R. and Chung, M. K., 1992, "A  $k - \varepsilon - \gamma$  Equation Turbulence Model," *J. Fluid Mech.*, Vol. 237, pp. 301~322.  
 (6) Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., 1966, "The Use of a Contraction to Improve the Isotropy of Grid-Generated Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 25, pp. 657~682.  
 (7) Tavoularis, S. and Karnik, U., 1989, "Further Experiments on the Evolution of Turbulent Stresses and Scales in Uniformly Sheared Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 204, pp. 457~478.

(8) Lumley, J. J., 1980, "Second Order Modeling of Turbulent Flows," *In Prediction methods for Turbulent Flows* (ed. W. Kollmann), Hemisphere, pp. 1~31.  
 (9) Dopazo, C., 1977, "On Conditioned Averages for Intermittent Turbulent Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 81, pp. 433~438.  
 (10) Byggstoyl, S. and Kollmann, W., 1986, "A Closure model for Intermittent Turbulent Flows," *Phys. Fluids*, Vol. 29, No. 5, pp. 1430~1440.  
 (11) Paullay, A. J., Melnik, R. E., Rubel, A., Rudman, S. and Siclari, M. J., 1985, "Similarity Solutions for Plane and Radial Jets using  $k - \varepsilon$  Turbulence Model," *J. Fluids Eng.*, Vol. 107, pp. 79~85.  
 (12) Pope, S. B., 1978, "An Explanation of the Turbulent Round-jet/Plane-jet Anomaly," *AIAA J.*, Vol. 16, pp. 279~281.  
 (13) Jones, W. P. and Launder, B. E., 1972, "The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 301~314.  
 (14) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., 1987, "Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number," *J. Fluid Mech.*, Vol. 177, pp. 133~166.  
 (15) Gutmark, E. and Wygnanski, I., 1976, "The Planar Turbulent Jet," *J. Fluid Mech.*, Vol. 73, pp. 465~495.  
 (16) Wygnanski, I. and Fiedler, H. E., 1969, "Some Measurements in The Self-preserving Jet," *J. Fluid Mech.*, Vol. 38, pp. 577~612.  
 (17) Wygnanski, I., Champagne, F. and Marasali, B., 1986, "On The Large-scale Structures in Two-dimensional, Small-deficit, Turbulent wakes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 168, pp. 31~71.  
 (18) LaRue, J. C., 1974, "Detection of The Turbulent-nonturbulent Interface in Slightly Heated Turbulent Shear Flows," *Phys. Fluids*, Vol. 17, pp. 1513.  
 (19) Mehta, R. D. and Westphal, R. V., 1986, "Near-field Turbulence Properties of Single- and Two-stream Plane Mixing Layer," *Experiments in Fluids*, Vol. 4, pp. 257~266.