韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 22집 제 3호, 2008. 9. 337-347

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 3, Sep. 2008. 337-347

직선의 대수적 표현과 직선성(直線性)으로서의 기울기

도 종 훈 (서원대학교)

도형으로서의 직선을 좌표평면에서 대수적으로 표현하는 과정에서 곧음이라는 직선의 고유한 성질은 삼각형의 닮음에 의해 x값의 변화량에 대한 y값의 변화량의 비가 일정하다는 성질로 구체화되고, 이로부터 기울기의 개념이 자연스럽게 등장한다. 이때 기울기는 좌표평면에서 직선의 직선다움 즉, 직선성(直線性)을 나타내주는 수학적 개념으로 서로 평행인 직선을 구분하지 않을 때 한 직선의 불변량이라 할 수 있고, 직선의 방정식은 일정한 비로서의 기울기가 지닌 성질을 대수적으로 표현한 것이라 할 수 있다. 본 논문에서는 좌표평면에서의 직선 및 직선성(直線性)으로서의 기울기 개념이 학교수학에서 어떻게 다루어지고 있는지 분석하고, 개선 방안에 대하여 논의한다.

Ⅰ. 들어가며

유클리드 원론에서 직선은 점들이 쭉 곧게 놓여 있는 선으로 정의된다(Heath, 1956). 그리고 두 점을 지나는 직선의 존재성과 유일성은 두 점을 잇는 선분이 꼭 하나 존재한다는 첫 번째 공준과 선분을 원하는 만큼 즉, 무한히 연장할 수 있다는 두 번째 공준에 의해 보장된다. 이에 따르면 직선은 두 점을 잇는 곧은 선인 선분을 곧음을 유지하면서 원하는 만큼 연장하여 얻을 수 있는 가상의 대상이라 할 수 있다. 곧은 선으로서의 직선에 대한 이러한 정의는 다분히 직관적인 정의로서, 그 특성인 곧음에 대해서는 여러 가지 해석이 있을 수 있다. 예를 들어 프로클루스는 모든 부분이 다른 모든 부분과 모든 방향으로 똑같이 들어맞는 것으로 직선을 특성화하였고, 아르키메데스는 두 점을 잇는 선들 중 그 길이가 가장 짧음으로 직선을 특성화하였다(Heath, 1956). 우리나라 수학 교육과정에서 직선의 개념은 초등학교 2학년(2-가)의 도형 영역에서 서로 다른 두 점을 잇는 곧은 선인 선분을 연장한 것으로 처음 도입된 후,[1] 중학교 1학년(7-나)의 도형 영역에서 두 점을 잇는 선 중에서 그 길이가 가장 짧은 선으로 선분을 정의하면서 다시 한 번 다루어지는데,[2] 이는 선분(직선)의 특성인 곧

* 2008년 8월 투고, 2008년 9월 심사 완료
* ZDM 분류 : U23
* MSC2000 분류 : 97U20
* 주제어 : 직선, 직선의 방정식, 기울기

1) "두 점을 곧게 이은 선을 선분이라고 합니다. … 선분을 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선을 직선이라고 합니다 (교육인적자원부, 2002, p.33)."

2) "직선 AB에서 두 점 A, B를 포함하여 점 A에서 점 B까지의 부분을 선분 AB라 하고, ... 중략 ... 선분 AB는 두 점 A, B를 잇는 선 중에서 가장 짧은 선으로, 선분 AB의 길이를 두 점 A, B 사이의 거리라 한다.(박윤범

음을 최단거리의 개념으로 해석한 것으로 아르키메데스의 전통을 따른 것이라 할 수 있다.[3)]

17세기 중엽 페르마와 데카르트에 의해 좌표평면이 고안된 이후 그 이전까지 종합적인(synthetic) 방법으로 다루어져 오던 기하학적 대상들과 그들의 성질이 좌표평면을 통해 대수적으로 다루어지게 되었는데(Stillwell, 2005), 직선 역시 예외가 아니었다. 도형으로서의 직선을 좌표평면에서 대수적으로 표현하는 과정에서 곧음이라는 직선의 고유한 성질은 삼각형의 닮음에 의해 x값의 변화량에 대한 y값의 변화량의 비가 일정하다는 성질로 구체화되고, 이로부터 기울기의 개념이 자연스럽게 등장한다. 즉, 기울기는 도형으로서의 직선이 지닌 고유한 수학적 특성으로 서로 평행인 직선을 구분하지 않을 때 한 직선의 불변량이며, 직선의 방정식은 일정한 비로서의 기울기가 지닌 성질을 대수적으로 표현한 것이라 할 수 있다. 우리나라 수학 교육과정에서 좌표평면에서의 직선 및 직선의 기울기 개념은 중학교 2학년 규칙성과 함수 영역에서 일차함수의 그래프를 다룰 때 도입된 후 고등학교 1학년 도형 영역에서 직선의 방정식을 구하는 과정에서 다시 한 번 다루어진다. 그러나 현행 교과서 내용 구성이나 전개에서 직선의 대수적 표현으로서 직선의 방정식과 직선의 고유한 성질인 곧음 즉, 직선성(直線性)으로서의 기울기 개념이 명료하게 드러나 있다고 보기는 어렵다.

이에 본 논문에서는 학교수학에서 좌표평면에서의 직선 및 직선의 기울기 개념이 어떻게 다루어지고 있는지 살펴보고, 이를 직선의 대수적 표현으로서의 직선의 방정식 및 직선의 고유한 성질 즉, 직선성(直線性)으로서의 기울기라는 관점에서 재조명한다. 특히 이와 관련된 교과서 내용의 구성과 전개 방식을 비판적으로 분석하여 이후 교과서 내용 구성과 교수·학습 설계를 위한 몇 가지 제언을 하고자 한다.

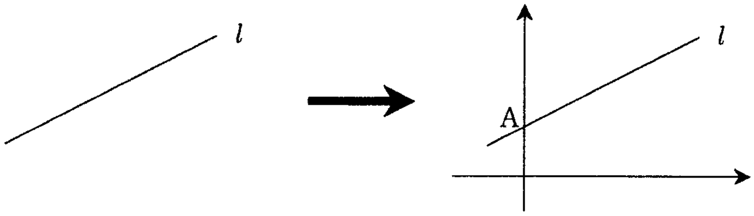
Ⅱ. 직선의 대수적 표현으로서 직선의 방정식과 기울기

이 장에서는 직선이라고 하는 도형을 좌표평면에서 미지수가 2개인 일차방정식(혹은 일차함수 식)의 형태로 특성화하는 과정을 재현해보고, 이 과정에서 기울기 개념이 어떻게 등장하고 어떤 의미를 지니는지 살펴본다.

평면 위에 직선 l이 있다고 하자. 이 평면에 직교좌표계를 도입하면, 직선 l은 y축과 한 점에서 만나거나 y축과 평행(혹은 일치)하게 된다. 한 점에서 만나는 경우를 살펴보자. 직선 l이 y축과 만나는 점을 $A(0,n)$이라 하자(그림 1).

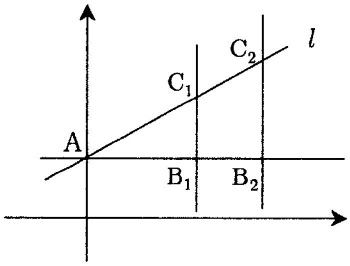
외, 2001)."

3) 플라톤(B.C.427-347년 경)을 포함한 많은 학자들이 여러 가지 해석을 시도했는데, 모든 사람을 납득시킬만한 설명을 발견할 수 없었다. 이후 반세기가 지나서 Archimedes(B.C.287-212)는 직선을 "두 점을 연결하는 최단의 선"이라고 정의했는데, 이 정의에는 선의 길이라는 개념이 필요하다(Kobayashi, 2002).



<그림 1> 직선이 놓인 평면에 직교좌표계 도입

직선 l 위의 임의의 서로 다른 두 점을 각각 C_1, C_2 라고 하고, 이들 각 점을 지나면서 y 축과 평행인 직선이 점 A를 지나면서 x 축과 평행인 직선과 만나는 점을 각각 B_1, B_2 라고 하자. 평행선의 성질에 의해 $\triangle AB_1C_1$, $\triangle AB_2C_2$ 는 대응하는 세 내각의 크기가 서로 같아 닮음(AA)이고, 따라서 두 삼각형의 대응변의 길이의 비는 서로 같다. 즉, $\overline{B_1C_1} / \overline{AB_1} = \overline{B_2C_2} / \overline{AB_2}$ 이다(그림 2).



<그림 2> 주어진 직선의 일부분을 대응변으로 갖는 닮은 두 삼각형

이를 좌표를 이용하여 대수적으로 나타내어 보면, y 축 위의 점 $A(0,n)$ 를 지나는 한 직선에서 $\frac{y-n}{x-0}$ 의 값 즉, $(0,n)$ 와 직선 위의 임의의 점 (x,y), $x \neq 0$ 에 대한 $\frac{y\text{값의 증가량}}{x\text{값의 증가량}}$ 의 값은 삼각형의 닮음에 의해 점의 위치에 상관없이 일정하다. 그러므로 $\frac{y-n}{x-0}$ 에 하나의 값 m_l 을 줄 수가 있고, 이 값 m_l 을 직선 l 의 기울기라고 부르기로 한다. 결국 직선 위의 임의의 점 (x,y), $x \neq 0$ 에 대하여 $\frac{y-n}{x-0} = m_l$ 즉, $y = m_l x + n$ 이라는 관계식을 얻게 되는데, 이 식을 직선 l 의 방정식이라고 한다.[4)]

4) 한편, 직선 l 이 y 축과 평행인 경우, 직선 l 은 y 의 값에 상관없이 항상 $x = c$ 이므로, 이를 식으로 나타내면 y 에 관한 항등식 $0 \cdot y + x = c$ 이 된다. 즉, y 축과 평행인 직선 위의 '어떠한 두 점을 잡더라도' 그 두 점 사이에는 x 값의 증가량에 대한 y 값의 증가량의 비의 값을 실수에서 정의할 수 없으며, 이것이 이 직선이 지닌 고유한 성질이라고 할 수 있다.

이처럼 직선을 좌표평면에서 대수적으로 표현하는 과정에서 '곧음'이라는 직선의 고유한 성질은 '삼각형의 닮음'에 의해 x값의 변화량에 대한 y값의 변화량의 비가 '일정'하다는 성질로 구체화된다. 따라서 이 일정한 비에 이름을 줄 수가 있는데 그 이름이 바로 '기울기'이고, 일정한 비로서의 기울기가 지닌 성질을 대수적으로 표현한 식이 바로 '직선의 방정식'인 것이다.

한편, 직선의 방정식 $ax+by+c=0$(혹은 $y=mx+n$)은 좌표평면에서 직선의 대수적 표현일 뿐 아니라 그 자체로 미지수가 2개인 일차방정식이나 일차함수의 식으로서 의미를 지닌다. 이 경우 좌표평면에서의 직선은 이들 대수식의 기하적 표현인 그래프로서 방정식이나 일차함수의 개념 이해를 풍부하게 하는 역할을 한다. 실제로 $y=mx+n$을 만족하는 x, y의 값의 순서쌍 (x,y)을 좌표평면에 점으로 나타내면 이 점들은 모두 한 직선 위에 있음을 간단하게 보일 수 있는데, 여기서도 마찬가지로 'x값의 변화량에 대한 y값의 변화량의 비의 상수성'과 '삼각형의 닮음'의 성질이 핵심적인 역할을 한다.

그렇다면 직선의 대수적 표현으로서의 직선의 방정식 및 직선의 고유한 특성인 곧음을 나타내주는 기울기 개념이 우리나라 수학교과서에 어떻게 반영되어 있고, 이와 관련된 내용이 어떻게 전개되고 있는지 살펴보도록 하자.

Ⅲ. 교과서 내용의 구성과 전개

좌표평면에서의 직선 개념과 관련한 내용은 크게 중학교 2학년의 문자와 식, 중학교 1-2학년의 규칙성과 함수, 그리고 고등학교 1학년 도형의 세 영역에서 다루어진다(표 1).

<표 1> 현행 교과서에 나타난 '좌표평면에서의 직선'에 관한 내용

영역	학년	내용	용어	정당화
문자와 식	중2	미지수가 2개인 일차방정식의 해집합의 기하적 표현(그래프)으로서의 직선	직선의 방정식	직관적 방법
규칙성과 함수	중1, 2	일차함수(의 식)의 기하적 표현(그래프)으로서의 직선 일차함수의 그래프와 연립방정식 좌표평면에서 일차함수의 식 구하기	기울기	직관적 방법
도형	고1	직선의 대수적 표현으로서 직선의 방정식과 그 성질 좌표평면에서 직선의 방정식 구하기 직선과 직선의 위치 관계 점과 직선 사이의 거리		?

중학교 2학년(8-가)의 문자와 식 영역에서는 직선이 미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$의 해에 대한 기하적 표현(그래프)으로 다루어진다. 이때 $ax+by+c=0$의 해집합이 좌표평면에서 직선이 됨을 설명하는 과정은 몇 개의 특수한 방정식의 해 몇 개를 직접 좌표평면에 점으로 나타내

어 본 후 그것이 직선 모양이 됨을 시각적으로 확인함으로써 이루어지고, 일반적인 경우에 대한 보다 엄밀한 정당화 과정은 제시되지 않는다. 여기서 '직선의 방정식'이라는 용어가 처음으로 등장한다. 그러나 이때 정의되는 직선의 방정식 개념은 '임의의 직선에 대한 대수적 표현'이 아니라 미지수가 2개인 일차방정식의 해집합이 좌표평면에서 직선으로 표현된다는 정도의 제한된 의미만을 지님을 다음의 교과서 내용 진술 사례를 통해 알 수 있다.

> 일반적으로 x, y가 모든 수일 때, 일차방정식 $ax+by+c=0\,(a\neq 0,$ 또는 $b\neq 0)$의 해를 좌표평면 위에 나타내면 직선이 된다. 이때, 방정식 $ax+by+c=0$을 직선의 방정식이라고 한다(강행고 외, 2001).

중학교 1학년(7-가)과 2학년(8-가) 규칙성과 함수 영역에서는 정비례 함수와 일차함수의 그래프가 직선이 됨을 미지수가 2개인 일차방정식의 그래프가 직선이 됨을 설명하는 것과 유사한 방식으로 설명한다. 그리고 일차함수의 그래프 즉, 직선의 기울기를 정의하는데, 이때에도 마찬가지로 일차함수의 관계를 나타낸 표와 식에서 몇 개의 예를 통해 x값의 증가량에 대한 y값의 증가량의 비가 일정함을 확인하는 형태로 다루고, 일반적인 경우에 대한 보다 형식적이고 엄밀한 정당화는 제시되지 않는다. 그리고 일차함수의 활용으로 기울기와 y절편이 주어진 직선이나 두 점을 지나는 직선을 그래프로 갖는 일차함수의 식을 구하는 내용이 비교적 자세하게 다루어지는데, 이는 고등학교 1학년(10-나)의 도형 영역에서 직선의 방정식을 다루는 과정에서 거의 똑같이 다시 한 번 다루어진다.

고등학교 1학년(10-나) 도형 영역에서는 여러 가지 직선의 방정식 즉, 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식, 두 점을 지나는 직선의 방정식 등을 다루는데, 이들 내용 및 내용을 다루는 방식은 중학교 2학년(8-가)의 규칙성과 함수 영역에서 다루었던 것과 거의 유사하다. 그리고 직선과 직선의 위치 관계, 점과 직선 사이의 거리 등을 다루는데, 이들 내용은 중학교 1학년 도형 영역에서 종합적인 방법으로 다루었던 내용을 방정식을 이용하여 대수적인 방법으로 다룬 것이라 할 수 있다.

이상에서 살펴본 '좌표평면에서의 직선'과 관련한 현행 교과서의 내용 구성과 전개에서 중학교(문자와식, 규칙성과 함수 영역) 내용과 고등학교(도형 영역) 내용이 상당부분 중복되어 있음을 알 수 있다. 통상적으로 어떤 개념이 서로 다른 내용 영역에서 중복적으로 다루어지는 것은 그 개념이 두 영역에 공통된 개념이긴 하지만 각 영역에서의 역할이 서로 다르기 때문인 경우가 많다. 한편, 어떤 개념이 서로 다른 학년에서 중복적으로 다루어지는 것은 그 개념에 대한 설명이나 정당화 과정을 직관적인 방법에서 보다 엄밀한 방법으로 점진적으로 형식화하기 위해서인 경우가 많다. 이러한 관점에서 현행 교과서 내용을 비판적으로 분석해 보도록 하자.

Ⅳ. 교과서 내용에 대한 비판적 분석

좌표평면에서의 직선 개념은 크게 도형 영역에서 다루는 '도형으로서의 직선'이라는 측면과 규칙성과 함수 및 문자와 식 영역에서 다루는 '일차함수(의 식) 혹은 미지수가 2개인 일차방정식의 기하적

표현인 그래프로서의 직선'이라는 측면으로 구분하여 생각할 수 있다(안숙영, 2006). 도형 영역에서 다루는 직선의 개념은 그야말로 도형으로서의 직선에 초점을 두어 다루어야 하는데, 우리나라의 경우 중학교 과정(1학년 도형 영역)에서는 도형 그 자체의 성질을 종합적인(synthetic) 방법으로 다루고, 고등학교 과정에서는 도형으로서의 직선을 방정식으로 표현하여 대수적으로 다루는데 초점을 둔다. 이는 현행 고등학교 수학과 교육과정 해설서에 제시된 고등학교 1학년 도형 영역의 지도 의의에 부합하는 것이다.

> 중학교 3학년까지 익힌 도형에 관한 여러 성질과 관계를, 고등학교 1학년에서는 데카르트의 해석기하학적인 관점에서 대수적인 방법으로 접근하여 기하학을 새롭게 조명해 보고, 직관적인 사고에서 논리적이고 창조적인 사고로 발전시킨다(교육인적자원부, 1999).

그러므로 고등학교 1학년 도형 영역에서 직선 개념과 관련하여 가장 중요하게 취급되어야 할 질문중 하나는 "좌표평면에서 직선의 대수적 표현인 직선의 방정식을 어떻게 설명하고 정당화하는가?" 이다. 이 질문에 대한 답이 명료하지 않고서는 직선에 관한 여러 가지 성질 즉, 직선과 직선 사이의 위치 관계나 점과 직선 사이의 거리의 개념 등을 대수적 표현의 관점에서 설명하고 정당화하는 것이 그 논리적 기반을 잃게 된다. 앞서 살펴본 바와 같이 방정식 $ax+by+c=0$ (혹은 $y=mx+n$)을 직선의 방정식이라고 부르게 된 이유는 직선을 좌표평면에서 대수적으로 표현하는 과정에서 명백하게 드러나고, 이 과정에서 핵심적인 역할을 하는 것이 바로 기울기 개념이다. 그러나 대부분의 현행 교과서 내용 전개에서 이러한 본질적인 측면이 제대로 드러나 있지는 않은 것으로 보인다.

예를 들어, <그림 3>은 현행 고등학교 1학년 교과서에 제시된 직선의 방정식 유도 과정의 첫 부분을 예시한 것으로, 일차방정식 $y=mx+n$이 기울기가 m인 직선을 나타내므로 이 직선의 대수적 표현은 $y=mx+n$이 됨을 설명하고 있다. 그러나 일차함수(의 식) $y=mx+n$의 그래프가

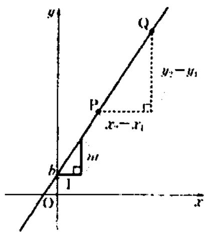
x, y에 대한 일차방정식 $y=mx+b$는 기울기가 m인 직선을 나타낸다.

그러므로 이 직선 위에 있는 서로 다른 임의의 두 점 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$를 잡으면

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m \text{(일정)}$$

을 만족한다.

또, 이 직선이 y축과 만나는 점의 y좌표 b는 이 직선의 y절편을 나타낸다.



기울기가 m이고, y절편이 b인 직선

기울기가 m이고, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$y=mx+b$$

<그림 3> 직선의 방정식 유도 과정(신현성 · 최용준, 2002)

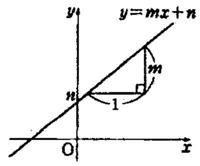
좌표평면에서 직선이 된다는 것은 중학교 2학년 규칙성과 함수 영역에서 이미 (귀납적으로) 다룬 내용으로 여기서 굳이 다룰 필요가 없는 내용이다. 만약 같은 내용을 여기서 반복하여 다루고자 한다면, 중학교 과정에서 점을 찍는 등의 귀납적이고 직관적인 방법으로 일차함수(의 식)의 그래프가 직선임을 설명하였으므로 여기서는 보다 엄밀하고 형식적으로 정당화하는 과정을 다룰 수 있을 것이다.

한편, <그림 4> 역시 현행 고등학교 1학년 교과서에 제시된 직선의 방정식 유도 과정의 첫 부분을 예시한 것인데, 이 경우 기울기가 m 이고 y 절편이 n 인 직선의 방정식이 $y=mx+n$ 임을 (중학교 과정에서 다룬 것으로) 전제하고 있음을 알 수 있다. 그러나 사실 이것 즉, 좌표평면에서 직선이 그와 같은 형태의 방정식으로 표현된다는 것은 이 영역에서 정당화하여야 할 내용으로, 중학교에서는 일차함수(의 식) $y=mx+n$ 의 그래프가 좌표평면에서 직선이 된다는 것을 (귀납적으로) 다루었고, 여기서 다루어야 할 문제는 그 역 즉, 직선을 방정식으로 어떻게 나타낼 것인가이다.[5)]

기울기가 m이고 y절편이 n인 직선의 방정식은

$$y=mx+n$$

이다.

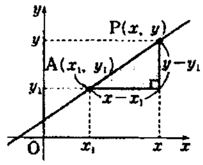


이제, 기울기가 m이고 한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나는 직선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하면

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$\therefore y-y_1=m(x-x_1)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.



<그림 4> 직선의 방정식 유도 과정(김수환 외, 2002)

이처럼 고등학교 1학년 도형 영역에서 직선의 대수적 표현으로서 직선의 방정식이 지닌 본질적인 의미가 드러나지 못하고, 중학교에서 다룬 내용이 별다른 차이 없이 중복적으로 다루어지고 있음을 알 수 있는데, 이와 관련된 문제를 보다 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 앞서 논의한 바와 같이 좌표평면에서의 직선은 도형으로서의 직선이라는 측면 뿐 아니라 미지수가 2개인 일차방정식이나 일차함수(의 식)의 기하적 표현(그래프)으로서의 의미도 함께 지니는데, 이들 두 관점이 교육과정의 서로 다른 내용 영역에서 명료하게 구분되어 취급되고 있지 않다는 점이다. 특히 중학교(규칙성과 함수 및 문자와 식 영역)에서 중점을 두어 다루어야 할 내용은 변화하

5) 물론, 중학교 2학년 규칙성과 함수 영역에서 주어진 직선(예를 들면, 기울기가 m 이고 y 절편이 n 인 직선)을 그래프로 갖는 일차함수의 식을 구하는 내용이 다루어진다. 그러나 이것은 '주어진 직선이 어떤 일차함수의 그래프'라는 전제하에서 그 일차함수의 식을 구하는 것이고, 고등학교 1학년 도형 영역에서 다루어야 할 것은 모든 직선이 미지수가 2개인 일차방정식(혹은 일차함수 식)으로 표현된다는 것을 보이는 것이다.

는 두 양의 변화 비율이 일정한 관계로서의 일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 개념이고, 좌표평면에서의 직선은 이들 개념에 대한 여러 가지 표현 중 하나로서 이들 개념의 이해를 돕는 도구적인 개념으로 다루어지는 것이 바람직하다. 그러므로 중학교 2학년의 규칙성과 함수(혹은 문자와 식) 영역에서는 좌표평면에서 일차함수(의 식) $y=mx+n$ 의 그래프가 직선이 됨을 이해함으로써 일차함수의 개념 이해를 풍부하게 하는 데에 초점을 두고, 고등학교 1학년의 도형 영역에서는 모든 직선은 좌표평면에서 미지수가 2개인 일차방정식의 형태로 표현할 수 있고, 그 역 또한 성립함을 명료하게 이해함으로써 도형을 대수적으로 표현하여 다루는 데에 초점을 두어야 할 것이다. 따라서 현재 중학교 2학년 규칙성과 함수 영역에서 다루어지고 있는 좌표평면에서 일차함수의 식 구하기와 관련된 내용을 고등학교 1학년 도형 영역으로 이동하여 여러 가지 직선의 방정식 구하기 내용과 통합하는 방안을 검토할 필요가 있다. 이는 중학교 2학년의 학습량 감축에도 기여할 수 있을 것이다.

둘째, 좌표평면에서의 직선이 지닌 도형으로서의 직선이라는 측면과 일차함수나 방정식의 그래프로서의 직선이라는 측면이 각 내용 영역에 따라 그 특성이 명료하게 드러나도록 내용을 구성하려면 두 용어 '직선의 방정식'과 '기울기'의 도입 시기의 문제가 자연스럽게 제기된다. 앞서 살펴본 바와 같이 '직선의 방정식'이라는 용어는 직선을 좌표평면에서 대수적으로 표현하는 과정에서 '기울기' 개념과 함께 그 특성 및 도입의 근거가 명료하게 드러나므로, 이들 용어는 직선을 대수적으로 표현하는 과정에 초점을 두는 고등학교 1학년 도형 영역에서 함께 도입되어 다루어지는 것이 바람직하고, 그래야만 그 의미가 제대로 드러날 수 있다. 더구나 '직선이 방정식'이라는 용어는 현행 중학교 2학년 문자와식 영역과 규칙성과 함수 영역의 내용 전개에서 굳이 필요하지 않으며, '일차함수의 식'이라는 표현으로 대체 가능하다. 하나의 대수식 $y=mx+n$ 에 대한 '직선의 방정식'과 '일차함수의 식'이라는 서로 다른 두 표현의 사용은 학생들에게 오히려 혼란을 야기하는 측면이 있다. 한편, 안숙영(2006)은 일차함수의 핵심 개념 즉, 두 양의 변화 비율이 일정함을 나타내는 개념이 기울기이지만, 기울기라는 용어가 실생활에서 비탈면의 경사도를 나타내어 기하적 의미가 강하고, 이로 인해 변화 비율이라는 측면이 퇴색되어 지도되고 있음을 지적한 바 있다. 이러한 관점에서 중학교 2학년 규칙성과 함수 영역에서 '기울기'라는 용어가 굳이 필요한지 검토할 필요가 있으며, 변화 비율의 값의 상수성이라는 의미 이해를 위해서는 '변화율'이나 '비례상수'와 같은 대체 용어의 사용도 검토해 볼 수 있을 것이다.

셋째, 중학교 2학년 규칙성과 함수(혹은 문자와 식) 영역에서 식 $y=mx+n$ 의 그래프가 직선이 됨을 점을 찍는 등의 귀납적이고 직관적인 방법으로 설명하고 있는데, 이는 학생들에게 해당 내용을 보다 쉽고 직관적으로 설명하기 위함이기도 하겠지만, 한편으로는 보다 엄밀한 정당화를 위해서는 삼각형의 닮음에 관한 성질의 이해가 필수적인데 교육과정 상 이 내용은 중학교 2학년 2학기에 학습하는 내용이기 때문이기도 하다. 그런데 문제는 삼각형의 닮음에 관한 성질을 학습하고 난 이후 어디에서도, 특히 고등학교 과정에서도 이에 대한 보다 엄밀하고 형식적인 정당화가 이루어지지 않는다는 점이다. 중학교 과정에서 직관적인 방법으로 다루었다면, 같은 내용이 반복되는 고등학교 과정

에서는 이를 보다 엄밀하게 형식적으로 다룰 필요가 있다. 그래야만 굳이 비슷한 내용을 중학교와 고등학교에서 중복하여 다루는 것이 그 의미를 갖게 된다. 혹은 삼각형의 닮음의 성질을 학습하는 도중이나 학습한 직후에, 그 이전에 학습한 일차함수(혹은 미지수가 2개인 일차방정식)의 그래프가 왜 직선이 되는지를 다시 한 번 확인하는 형태의 보완도 가능할 것이다.

넷째, 위에서 언급한 바대로 식 $y=mx+n$의 그래프가 직선이 됨을 설명하려면 삼각형의 닮음의 성질에 관한 이해가 필수적이라는 관점에서, 현재 일차함수의 그래프(규칙성과 함수 영역)를 먼저 학습하고 삼각형의 닮음(도형 영역)을 나중에 학습하는 형태의 교과서 내용 구성 및 교수·학습 순서를 학생들의 수준 등을 고려하여 상황에 따라서는 삼각형의 닮음이 먼저 오도록 재구성하는 방안을 검토해볼 필요가 있다. 현행 교육과정에 따르면 교육과정에 제시된 내용의 순서가 반드시 교과서 내용이나 교수·학습의 전개 순서와 일치할 필요가 없으며, 따라서 학습 내용 간 연계성 강화 및 내용의 특성, 분량 등을 고려하여 교육과정에 제시된 영역별 내용을 분리하거나 통합하여 내용을 재구성할 수 있다.

V. 나가며

지금까지의 논의를 통해 우리는 직선이 다른 종류의 선과 구분되는 고유한 기하적 특성은 곧음이고, 이를 좌표평면에서 특성화한 개념이 기울기이며, 일정한 비로서의 기울기가 지닌 성질을 대수적으로 표현한 식이 바로 직선의 방정식임을 살펴보았다. 그리고 학교수학에서 좌표평면에서 직선 및 직선의 기울기 개념이 어떻게 다루어지고 있는지 비판적으로 분석하였다.

그 결과 좌표평면에서의 직선 및 직선의 기울기 개념은 중학교 2학년 규칙성과 함수(및 문자와 식) 영역에서 일차함수의 그래프를 다룰 때 도입된 후 고등학교 1학년 도형 영역에서 직선의 방정식을 구하는 과정에서 반복하여 다루어지지만, 현행 교과서 내용 구성이나 전개에서 직선의 대수적 표현으로서의 직선의 방정식 개념 및 직선의 고유한 성질인 곧음 즉, 직선성(直線性)으로서의 기울기 개념이 충분히 반영되어 있지 못하고, 내용 영역 간 및 학년 간의 불필요한 내용 중복, 용어 도입 시기의 적절성, 정당화 방법 등의 측면에서 몇 가지 문제점이 있는 것으로 드러났다. 연구자는 이에 대한 원인이 무엇보다 좌표평면에서의 직선이 지닌 두 측면 즉, 도형으로서의 직선과 일차함수(혹은 미지수가 2개인 일차방정식)의 그래프로서의 직선이라는 측면이 교육과정의 서로 다른 내용 영역에서 명료하게 구분되어 취급되고 있지 않기 때문이고, 따라서 이러한 문제를 해결하기 위해 교과서 내용 구성과 전개에서 다음의 몇 가지를 검토할 필요가 있음을 제안하였다.

첫째, 현재 중학교 2학년 규칙성과 함수 영역에서 다루고 있는 좌표평면에서의 일차함수 식 구하기와 관련된 내용을 고등학교 1학년 도형 영역으로 이동하여 여러 가지 직선의 방정식 구하기 내용과 통합하는 방안을 검토할 필요가 있다.

둘째, '직선의 방정식'과 '기울기'의 개념은 직선을 좌표평면에서 대수적으로 표현하는 과정에서 그

특성 및 도입의 근거가 명료하게 드러나므로, 이들 용어를 직선을 대수적으로 표현하는 과정에 초점을 두는 고등학교 1학년 도형 영역에서 함께 도입하는 방안을 검토할 필요가 있다.

셋째, 중학교 2학년 과정에서는 일차함수의 그래프가 직선이 됨을 점을 찍는 등의 방법을 통해 직관적으로 설명하였지만, 삼각형의 닮음에 관한 성질을 학습하는 도중이나 학습한 직후, 혹은 고등학교 1학년 도형 영역에서 보다 엄밀하고 형식적인 방법으로 다시 한 번 정당화할 필요가 있다.

넷째, 현재 일차함수의 그래프를 먼저 학습하고 삼각형의 닮음을 나중에 학습하는 형태의 교과서 내용 구성 및 교수·학습 순서를 학생들의 수준 등을 고려하여 상황에 따라서는 삼각형의 닮음을 먼저 학습하도록 재구성하는 방안을 검토할 필요가 있다.

참 고 문 헌

강행고·이화영·박진석·이용완·한경연·이준홍·이혜련·송미현·박정숙 (2002). 중학교 수학 8-가. 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

김수환·이강섭·임영훈·왕규채·송교식·이동수·강영길 (2002). 고등학교 수학 10-나. 서울: (주)지학사.

교육인적자원부 (1999). 중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술·가정 -.

교육인적자원부 (2002). 수학 2-가. 서울: 대한교과서주식회사.

박윤범·박혜숙·권혁천·육인선 (2001). 중학교 수학 7-나. 대한교과서(주).

신현성·최용준 (2002). 고등학교 수학 10-나. 서울: (주)천재교육.

안숙영 (2006). 기울기의 개념 분석과 일차함수의 이해를 돕는 기울기 지도. 서울대학교대학원 석사학위논문.

Kobayashi, S.(2002). ユークリッド幾何から現代幾何へ. 원대연 역 (2002). 유클리드 기하에서 현대 기하로. 경기: 청문각.

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol.1*. Dover Publications, Inc.

Stillwell, J. (2005). *The four pillars of geometry*. Springer.

Revisiting Linear Equation and Slope in School Mathematics : an Algebraic Representation and an Invariant of Straight Line

Do, Jonghoon

Seowon University, 241 Musimseoro, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, 361-742, Korea.

E-mai : jhoondo@seowon.ac.kr

'Slope' is an invariant of a straight line and 'Linear Equation' is an algebraic representation of a straight line in the cartesian plane. The concept 'slope' is necessary for algebraically representing a geometrical figure, line. In this article, we investigate how those concepts are dealt with in school mathematics and suggest some improvement methods.

* ZDM Classification : U23

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key Words : straight line, linear equation, slope