韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 22집 제 3호, 2008. 9. 275-288

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 3, Sep. 2008. 275-288

함수 학습에 나타난 수학 학습부진아의 오류에 대한 사례 연구

심 상 길 (단국대학교)
최 재 용 (일신여자상업고등학교)

본 연구는 수학 학습부진아들이 중학교 함수를 재학습하는 과정에서 나타나는 오류를 사례별로 분석하여 그 원인을 수학과 특성, 함수학습에서의 오류 유형 등과 결부시켜 논의를 하였다. 수학 학습부진아들은 일반적으로 학생들이 다 알고 있을 것으로 생각되는 가장 기본적인 내용에서 학습에 문제가 생길 수 있고, 주어진 문제에서 요구하는 풀이나 답이 무엇인지 정확하게 인식하지 못하여 자신에 옳다고 생각하는 부분까지만 풀거나 주어진 문제를 해석하는 데에 있어 자신이 생각하기 편리한대로 해석하여 문제를 해결하지 못하는 경우가 있다. 따라서 교사는 문제를 해결하는 과정에서 문제가 요구하는 것이 무엇인지 학생들에게 질문하고, 문제를 이해하고 계획을 세우는 단계에서 무엇을 구해야하는지 학생 스스로 알 수 있도록 돕고, 학생들이 이해할 수 있는 구체적인 상황이나 현실적인 문제에서 시작하여 그 내용을 이해시킨 후 특수한 예를 통해 일반화할 수 있도록 지도하는 방법 등 수학 학습 개선 방향을 제시할 수 있다.

I. 서 론

학교수학에서는 학생들의 수학적 안목을 고양시키기 위하여 교육과정 상에 일정한 학습 목표를 설정해놓고 있다. 그러나 학생들은 지능, 적성, 학습 능력 등 인지적인 면과 학습에 대한 흥미, 동기, 태도 등 정의적인 면에서 다양한 차이를 보이기 때문에 모든 학생들이 설정된 목표에 도달하지 못하고 있는 실정이다. 이와 같이 설정된 목표에 도달하지 못하는 학생들은 수학을 기피하고 수학을 별도로 학습하지 않아 수학 학습부진아가 된다.

수학 학습부진아는 일반적으로, 지능은 정상이거나 정상에 가까운데 학습 장애 등의 내적인 요인을 포함하여 학습 동기가 부족하거나 배울 기회가 별로 없다든지, 교사의 교수 방식이 자신에 맞지 않거나 공부 방법을 잘 몰라서 학습 결손이 누적되어 성적이 떨어지는 등의 외적인 요인 때문에 자신의 능력에 비해 수학에서의 학업 성취가 현저하게 떨어지는 아동을 포함해서 포괄적인 의미로 사용된다(류성림, 1999, p. 116). 이러한 수학 학습부진아들에게는 일반적인 교육이외에 추가적인 도움이 필요하다.

* 2008년 8월 투고, 2008년 9월 심사 완료
* ZDM 분류 : D73
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 수학 학습부진아, 함수, 오류, 수학 학습 개선

제 7차 교육과정의 구성 방침(교육부, 1998)에서는 교육 내용의 양과 수준을 적정화하고, 심도 있는 학습이 이루어지도록 수준별 교육과정을 도입하고, 학생의 능력, 적성, 진로를 고려하여 교육 내용과 방법을 다양화한다고 고시하고 있다. 또, NCTM(2000)에서는 학교 수학의 원리로 평등을 강조하면서, 수학 공부에 어려움을 느끼는 학생들은 별도의 학습 프로그램이나 친구의 조언, 상급자의 지도와 같은 추가적인 도움을 필요하고, 학교와 학교 체계는 다른 학생들의 학습을 방해하지 않으면서 몇몇 학생들의 특별한 요구가 조화되도록 풀어나가야 한다고 언급하고 있다.

수학 학습부진아들이 중학교에서 배운 수학 내용, 특히 중학교 수학에서 상대적으로 가장 많은 부분을 차지하고 있는 함수를 이해하지 못하고 고등학교에서 함수에 관련된 내용을 배운다면 수학을 공부하는 데 많은 어려움을 겪을 것이다. 따라서 수학 학습부진아들의 함수 학습에 도움을 주기 위해 별도의 학습 프로그램이 필요하다. 이를 위하여 수학 학습부진아에 대한 부진 요인에 대한 연구(김사환, 조정수, 2002; 이상원, 방승진, 2006)와 학습부진아의 수학 기피와 치유 방안(박혜숙 외, 2004) 및 수학 학습부진아를 위한 개별화 교수 방법(류성림, 1999) 등에 대한 연구도 필요하지만 수학 학습부진아들이 함수를 공부하면서 무엇을 알고 있고, 무엇을 모르는지 또는 함수의 세부적인 내용에서 어떠한 어려움을 지니고 있고, 어떠한 오류를 자주 범하고 있는지에 대한 구체적인 연구가 필요하다.

본 연구에서는 수학 학습부진아들의 학습에 도움을 주기 위해 먼저, 수학 학습부진의 원인 중 수학과의 특성(추상성, 형식성, 일반화, 특수화, 계통성, 직관성, 논리성)에서 오는 원인과 수학 학습부진아의 개별화 교수 방법에 대해 살펴보고, 함수에서의 오류 유형에 대해 조사하고, 수학 학습부진아들이 중학교 함수 영역을 다시 학습하는 과정에서 겪는 구체적인 어려움과 오류에 대해 조사하여 수학 학습부진아들의 수학 학습 개선을 위한 방향을 제시하고 시사점을 찾고자 한다.

II. 수학 학습부진의 원인과 함수 학습에서의 오류 모델

학습부진의 원인을 학습자 자신의 능력이나 기능 결함 등의 심리적·발달적 측면에서 분석하려는 입장과 다른 하나는 학습자의 능력이나 기능보다는 학습자의 환경적인 측면에서 분석하려는 입장이 있다(박성익 외, 1984, pp. 23-24). 또, 수학 학습부진의 요인을 크게 두 차원으로 나누고 있는데, 하나는 개인적 측면으로 지적 요인과 정서적 요인이고, 다른 하나는 환경적 측면으로 사회적 요인과 교육적 요인을 포함한다(류성림, 1999).

그러나 여러 교과 중에서 수학과 학습부진 학생이 많다고 하는 것은 일반적인 학습부진의 원인보다는 수학과의 특성(추상성, 형식성, 일반화, 특수화, 계통성, 직관성, 논리성)에서 오는 원인이 더 큰 요인이라고 할 수 있다. 그 내용을 살펴보면 다음과 같다(신성균 외, 1984).

첫째, 위계성이 매우 엄격한 계통성을 지닌 수학교과의 선수학습의 결손에서 오는 학습부진을 생각할 수 있다. 수학에서 구조적이고 논리적인 연계성이 결여되면 그 계통성이 부서지기 때문에 당연

히 학습부진을 초래한다. 둘째, 직관보다 논리의 중요시에서 오는 학습부진을 생각할 수 있다. 구체적인 것과 논리를 연결시켜 주는 교량역이 되는 직관을 등한시하고 논리의 지도에만 주력한다면 개념을 형성해가는 데에는 큰 어려움이 따른다. 셋째, 추상화, 일반화, 특수화하는 습관의 결여에서 오는 학습부진을 생각할 수 있다. 학습에서 이해한 사실을 단순히 그 자체만을 기억하고, 그 자체의 응용에 약간의 활용밖에 못한다면, 그 정도의 개념에 대한 인식 정도로는 활발한 산 개념이라 할 수 없다. 따라서 개념의 추상화, 일반화, 특수화하는 습관의 부족은 학습부진을 초래한다. 끝으로, 추상화, 형식화, 기호화, 일반화, 특수화하는 사고력의 부족에서 오는 학습부진을 생각할 수 있다. 수학에서의 사고과정에는 추상화, 형식화, 기호화, 일반화, 특수화하는 사고력이 있어야 그 대상의 특성에 관련한 암시를 과거의 경험이나 뜻대로 되는 관계적 지식 또는 이론을 유추해 낼 수 있다. 그러나 이러한 사고력이 부족하다면 그 특성에 관한 암시를 유추해낼 수 없기 때문에 학습부진을 초래한다.

개인차가 심한 수학에서는 과목의 특성상 학습 속도, 내용 수준, 장래 직업 등을 고려해 볼 때, 개개학습자의 독특한 요구와 특성을 고려하여 그들의 수학적 능력의 정도와 방법에 맞게 수업을 실천하는 변별적인 수업 방법이 절실히 필요하다고 볼 수 있다. 특히 수학 학습부진아를 위한 개별화 교수를 계획할 때는 다음과 같은 점을 유념해야 할 것이다(류성림, 1999).

첫째, 포괄적인 개별화 학습 프로그램이다. 아동들은 기초적인 사칙연산의 계산 기술, 문제해결, 실생활 수학 문제, 정확한 판단과 어림하기, 결과의 타당성에 대한 대처, 기하, 측정, 도표나 그래프 등을 읽고 해석하기, 추론, 컴퓨터를 이해하고 사용하기 등의 다양한 수학적 기술을 습득해야 한다. 둘째, 오류의 진단과 처방에 의한 지도이다. 아동이 수학문제를 잘못 풀었을 경우에는 어떤 부분이 맞고 틀렸는지를 알려 주어야 한다. 자신의 실수 유형을 보여주면서 알려주는 것은 피드백의 중요한 근거가 된다. 교사는 아동이 자신이 한 것을 스스로 점검하고, 오답을 수정할 수 있도록 지도해야 한다. 셋째, 수학의 실제적인 활용을 강조한다. 수학 문제를 구체적인 자료와 실생활에 적용하게 되면, 수학이 단지 교과목으로 끝나지 않고 실생활에서 필요하다는 사실을 아동은 인식하게 되고, 가정과 학교에서 수학적 기술을 활용할 가능성이 높아진다. 넷째, 수학 학습의 일반화이다. 아동이 일반화, 즉 학습한 것을 다른 영역에 전이하는 능력을 학습하는 것은 필수적이다. 학습한 내용을 다양한 상황에서 활용할 수 있도록 하기 위해서는 여러 가지 자료를 이용해야 한다. 아동이 차츰 익숙해지면 교사의 도움을 체계적으로 줄여가며 스스로 문제해결의 기술을 익히도록 해야 한다. 다섯째, 학생들에게 성공적인 경험의 활동을 제공한다. 학습부진아들은 성공적인 경험을 하는 것이 필요하다. 그들도 정답을 얻을 수 있어야 한다. 학생들이 수학에 관심이 없을 때 가장 좋은 방법 중의 하나는 정답을 얻도록 하는 것이다. 참 성공을 맛본 학생은 정답을 얻게 된 알고리즘을 탐색하게 될 것이다. 성공은 두려움, 적대감, 무관심을 감소시키고, 방어적인 행동을 줄이는 원동력이 된다. 성공은 긍지와 긍정적인 전망을 가져오고, 연속적으로 성취할 수 있는 동기가 된다.

송순희, 오정현(1997)은 중학교 함수 영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구에서, Nisa

Movshovitz Hadar와 Orit Zaslavsky의 연구를 바탕으로 7가지 오류 모델을 제시하고, 그 분류 기준이나 세부 내용을 다음과 같이 정리하였다.

첫째, 오용된 자료 : ① 문제에 주어진 정보로부터 바로 얻을 수 없고, 진술되지도 않은 것을 마치 하나의 주어진 정보처럼 지적하는 경우. ② 답을 구하기 위해 필요한 주어진 자료를 무시하고 임의로 관련이 없는 자료를 보탬으로써 정보의 부족을 보충하는 경우. ③ 문제를 풀기 위해 옮겨 쓰는 과정에서 어떤 세부 항목을 잘못 옮겨 쓰는 경우. 둘째, 잘못 해석된 언어 : ① 문제에서 제시하고 있는 것과는 다른 의미로 해석하여 수학적인 수식이나 용어로 나타내는 경우. ② 그래프 상의 기로를 수학적 용어로 잘못 해석하거나 그 반대의 경우. 셋째, 논리적으로 부적절한 추론 : 일반적으로 귀납 또는 연역적인 추론 도중에 발생하는 불합리한 추론. 넷째, 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련 : 수학 문제풀이 과정 시 필수적인 내용 지식의 결함에서 오는 경우. ① 알고리즘의 무지에서 오는 경우. ② 기초적인 사실의 부족한 숙련에서 오는 경우. ③ 필수적인 개념과 상징의 불충분한 지식에서 오는 경우. 다섯째, 요구되지 않은 해답 : 학생들의 풀이과정 각 단계는 옳지만 제시된 마지막 결과는 문제에서 요구하는 해답이 아닌 경우, 즉 문제의 이해 과정에서 주어진 문제의 마지막 목표가 무엇인지 확인하지 않는데서 생기는 오류. 여섯째, 기술적 오류 : ① 계산상의 오류. ② 도표로부터 자료를 뽑을 때의 오류. ③ 대수 기호를 다룰 때의 오류. ④ 초등학교에서 습득도니 연산 방식에서의 오류. ⑤ +, - 를 잘못 사용하거나 빠트리는 경우. 일곱째, 풀이 과정이 생략된 오류 : ① 풀이 과정이 없이 답만 제시한 경우. ② 현 단계까지의 풀이 과정은 옳으나 다음 단계의 풀이이 과정이 제시되지 않는 경우.

이 연구에서 중학교 학생들은 필수적인 사실이나 개념의 부족한 숙련에서 오는 오류가 가장 많고 기술적인 숙련의 부족에서 오는 오류도 흔히 범하게 되는 오류임을 알 수 있다. 그러나 학년별로 살펴보면 학년이 높아질수록 필수적인 사실, 개념의 부족한 숙련에서 오는 오류는 감소하는 대신 풀이 과정의 생략은 점점 증가함으로 볼 수 있고, 기술적인 오류는 전 학년에 걸쳐 중요한 오류 범주 중의 하나로 자리 잡고 있다. 그러나 이것은 학년이 높아질수록 필수적인 사실, 개념에 대한 습득이 잘 된다기보다는 문제풀이 과정에서 다음 단계가 잘 추론되지 않을 경우 풀이과정을 더 이상 계속하지 않기 때문이라고 지적된다(송순희, 오정현, 1997, p. 16).

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 서울시에 위치한 S여자상업고등학교 1학년 신입생으로, 이 학교에서 실시한 2008학년도 신입생 학력고사(평균 75.6점)에서 하위 25%(60점 이하)에 포함된 학생으로 담임교사와의 상담을 통해 학생들의 성향을 파악하고 학생 상담을 통해 실험에 적극적으로 참여를 원하는 5명의

학생을 대상으로 하였다. 선발된 학생들은 고등학교 1학년이지만 중학교에서 배운 기본적인 수학 개념이 부족하여 고등학교에서 배우는 수학을 이해하기 힘들어 전반적인 수학 학습부진을 보인다. 특별히, 인문계 학생이 아닌 실업계 학생을 선발한 이유는 인문계 학생들에 비해 수학에 대한 부담이 적고 본 연구에서 진행하는 함수에 관한 학습을 따로 하고 있지 않아 본 연구에 적합하기 때문이다.

선발된 학생들의 특성을 알아보기 위해 기초적인 설문과 면담을 실시하였고, 그 학생들의 개인적인 특성을 정리하면 다음과 같다.

학생 A : 초등학교 때까지는 수학 수업이외에 방문 학습지를 하였고, 중학교 때에는 혼자서 문제집과 교과서로 공부하였다. 하루에 30분 이하로 공부를 하고, 수학을 공부하는 데 어려움에 대해 기초가 부족하기 때문이라고 생각한다. 중학교에서 배운 내용 중 가장 어려웠던 단원은 함수와 그래프이며, 함수를 공부하는 데 가장 어려운 점은 함수에서 나오는 용어의 뜻을 잘 모르고 함수에 대한 식의 풀이(인수분해, 방정식의 풀이 등)가 어려워서라고 생각한다.

학생 B : 초등학교, 중학교 때에 학교 수업이외에 따로 학습지나 학원에 다닌 적이 없다. 하루에 30분에서 1시간 정도 공부를 하고, 수학을 공부하는 데 어려움에 대해 기본적인 것은 이해하고 푸는데 응용문제의 이해와 문제인식에 있다고 생각한다. 계산능력 혹은 이해능력이 부족해 수학을 싫어하고, 중학교에서 배운 내용 중 가장 어려웠던 단원은 방정식과 부등식이다. 함수를 공부하는 데 가장 어려운 점은 함수에 대한 문제의 뜻을 이해하기 힘들고 그래프를 보고 함수식을 세우는 것이 어려워서라고 생각한다.

학생 C : 초등학교 때에는 수학 학원을 다녔고, 중학교 때에는 혼자서 문제집과 동영상 강의를 들으며 공부했다. 하루에 30분에서 1시간 정도 공부를 하고, 수학을 공부하는 데 어려움에 대해 원래 공부는 못하는 데 열심히 공부해도 그 성과가 좋지 못하기 때문에 흥미가 떨어져서라서 생각한다. 중학교에서 배운 내용 중 가장 어려웠던 단원은 함수와 그래프이다. 함수를 공부하는 데 가장 어려운 점은 함수에 대한 식의 풀이(인수분해, 방정식의 풀이 등)가 어려워서라고 생각한다.

학생 D : 초등학교 때에는 학교 수업이외에 수학 학습을 한 적이 없고 중학교 때에는 수학 학원을 다녔다. 하루에 30분에서 1시간 정도 공부를 하고, 수학을 공부하는 데 어려움에 대해 초등학교 때 수학 선생님에 대한 거부감 때문에 수학을 멀리하게 되었고, 열심히 공부하지 않다보니 점점 수학이 싫어졌기 때문이라고 생각한다. 중학교에서 배운 내용 중 가장 어려웠던 단원은 정수, 유리수, 실수의 계산이다. 함수를 공부하는 데 가장 어려운 점은 함수에서 나오는 용어의 뜻을 잘 모르고 함수에 대한 식의 풀이(인수분해, 방정식의 풀이 등)가 어려워서라고 생각한다.

학생 E : 초등학교 때에는 방문 학습지를 하였고, 중학교 때에는 수학 학원을 다녔다. 하루에 30분에서 1시간 정도 공부를 하고, 수학을 공부하는 데 어려움에 대해 어려운 응용문제와 문장이 긴 문제가 나오면 개념을 잊기 때문이라고 생각한다. 중학교에서 배운 내용 중 가장 어려웠던 단원은 함수와 그래프이다. 함수를 공부하는 데 가장 어려운 점은 함수에서 나오는 용어의 뜻을 잘 몰라서라

고 생각한다.

2. 연구 방법

본 연구는 수학 학습부진아가 중학교 함수 영역을 다시 학습하는 과정에서 나타난 오류를 분석하는 연구가 수행되었다. 이를 위하여 함수를 학습하는 자연스러운 상황과 개별학습 상황에서 연구 대상들이 어떻게 반응하고, 어떤 현상을 나타내는지를 살펴보면서 함수 학습에서 나타나는 오류와 학습 과정에서의 변화 등을 파악하였다. 또, 자료 수집과 분석을 위하여 수업의 모든 과정을 녹화하고, 수업 중 학생들의 생각이나 문제풀이 과정을 스스로 기록하게 하여 그 내용을 일일이 살펴보고, 각각의 내용에서 유의미한 과정을 선정하고, 선정된 과정들은 과정이 의미하는 바에 따라 조직화하고 주제별로 분류하여 분석하였다.

3. 연구 절차 및 수업 방법

연구 대상들의 특성과 성향을 파악하기 상담 및 설문을 실시하였고, 현행 교과서들에서 다루고 있는 함수부분의 내용을 조사하여 그 중에서 한 교과서로 박두일 외(2002a; 2002b)의 교과서(수학 7-가, 수학 8-가)를 선정하여 교과서 내용을 중심으로 5주에 걸쳐 수업을 실시하였다.

수업을 2008년 3월 둘째 주부터 시작하여 매주 월, 수, 토(학생들이 학교에 등교하지 않는 토요일은 제외) 방과 후에 40분-50분 동안 수업을 실시하였다. 수업 실시 일정은 다음과 같다.

<표 1> 수업 일정

날짜	3월 10일	3월 12일	3월 15일
내용	상담 및 설문	정비례	반비례
날짜	3월 17일	3월 19일	3월 24일
내용	함수	일차함수	일차함수

학생들이 편안하게 대답하고 문제를 풀 수 있도록 교실 환경을 조성하고 교사는 권위적이지 않고 자연스러운 반응을 이끌 수 있도록 하였다. 수업 중 자리 배치는 교사가 학생들의 얼굴을 직접 볼 수 있고, 학생들이 기록한 활동지나 연습지를 직접 볼 수 있도록 배치하여 학생들이 모르는 내용과 문제 풀이 상황을 직접 모니터링 할 수 있도록 하였다.

수업은 기초적인 개념을 설명할 때, 학생 모두를 대상으로 설명하면서 학생들이 교사로부터 들은 내용을 직접 기록할 수 있도록 충분한 시간을 제공하였고, 기초적인 개념을 설명하기 전 그 정의와 관련된 내용을 학생들이 먼저 이야기할 수 있도록 질문을 한 후 교재를 보면서 확인할 수 있도록 지도하였다. 개념에 대한 설명은 학생들이 이해하기 쉽도록 학생들이 알고 있는 쉬운 예로부터 시작하

여 표, 그림, 그래프 등을 이용하여 설명하고, 학생들은 교사로부터 배운 개념을 바로 이해할 수 있도록 표, 그림, 그래프를 그리고, 간단한 예제를 이용하여 개념을 적용할 수 있도록 시간을 충분히 제공하였다.

한 과정이 끝난 후에는 그 과정을 충분히 이해할 수 있도록 교과서에서 제시되고 있는 예제와 문제, 자율 학습 문제를 학생 스스로 풀 수 있는 시간을 주었고, 단원이 끝난 후에는 연습문제를 풀 수 있도록 하였다.

IV. 연구 결과 및 분석

수학 학습부진아들이 함수를 학습 과정에서 보이는 오류와 이를 개선하기 위한 방안을 사례를 통해 살펴보면 다음과 같다.

수학은 위계성이 엄격한 계통성을 지니므로 구조적이고 논리적인 연계성이 결여되면 그 계통성이 부서지기 때문에 학습부진을 초래한다(신성균 외, 1984). 함수 학습에서 중학교 학생들은 필수적인 사실이나 개념의 부족한 숙련에서 오는 오류가 가장 많이 나타난다(송순희, 오정현, 1997). 수학 학습부진아들도 마찬가지로 가장 많은 오류를 보이는 부분이 필수적인 사실이나 개념의 부족이다. [사례 1]은 수학 학습부진아가 함수 학습에서 대수적인 계산을 잘못하여 범한 오류이다.

[사례 1] x절편과 y절편 구하기

예제 2. x절편, y절편을 이용하여 함수 $y=-\frac{3}{2}x+3$의 그래프를 그려라. (박두일 외, 2002b, p. 127)

교사 : y절편은 얼마야?

학생 B : 3

교사 : x절편은 얼마야?

학생 B : y에 0

교사 : 그래 y에 0을 넣어서 해봐.

교사 : 그 다음은 어떻게 해야 돼?

학생 B : $y=-\frac{3}{2}x+3 \quad 0=-\frac{3}{2}x+3$

$\frac{3}{2}x=3 \quad x=-\frac{2}{3}+3$

교사 : 아! 그걸 못하는 구나. x만 남겨놓으려면 어떻게 해야 돼?

교사 : $\frac{3}{2}x=3$까지 구했지. x를 남기려면 먼저 분모의 2부터 없애야지.

학생 B : (양변에 2를 곱한다.)

교사 : 그렇지. 다음에는 3을 없애야지.

학생 B : (양변에 3을 나눈다.)

교사 : 그렇지. 차근차근 절차대로 하면 되는데.

학생 B는 $\frac{3}{2}x=3$을 $\frac{3}{2}+x=3$와 같이 생각하여 $x=-\frac{3}{2}+3$이라고 답하였다. 학생 B의 경우 설문에서 계산 능력이 부족해 수학을 싫어하고 중학교에서 배운 내용 중 가장 어려웠던 단원이 방정식과 부등식이라고 답하였다. 따라서 함수를 학습하는 데에 있어도 방정식의 풀이를 못하여 x절편과 y절편을 구하지 못하고 더 나아가 그래프를 그리지 못한다. 교사는 잘못된 알고리즘을 바로 잡기위해 $\frac{3}{2}$과 x사이에 곱이 있다는 사실을 인식시키고 학생이 이해할 수 있는 수준의 발문을 통해 문제를 다시 풀게 하였다. 이는 류성림(1999)이 제시한 수학 학습부진아를 위한 개별화 교수방법 중 오류의 진단과 처방에 의해 지도한 사례이다.

[사례 1]과 같이 수학 학습부진아들은 일반적으로 학생들이 다 알고 있을 것으로 생각되는 가장 기본적인 내용에서 학습에 문제가 생길 수 있다. 따라서 교사는 문제를 제시하거나 문제해결을 위한 발문을 할 때, 가장 기본적으로 생각되는 부분에서부터 학생들이 알고 있는지를 확인해야 한다.

수학 학습부진아들은 주어진 문제에서 요구하는 풀이나 답이 무엇인지 정확하게 인식하지 못하거나 문제를 해결하는 과정에서 자신에 옳다고 생각하는 부분까지만 푸는 경우가 있다. 이는 송순희, 오정현(1997)이 제시한 요구되지 않은 해답 또는 풀이 과정이 생략된 오류이다. [사례 2]는 문제 풀이 과정에서 학생 C와 학생 D가 보인 사례이다.

[사례 2] 정비례와 반비례의 연습문제 풀이

2. 변수 y 는 x에 정비례하고, $x=2$일 때 $y=-1$이다. 다음 물음에 답하여라. (박두일 외, 2002a, p. 144) (1) x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내어라. 3. 변수 y는 x에 반비례하고, $x=4$일 때 $y=4$이다. 다음 물음에 답하여라. (1) x와 y 사이의 관계를 식으로 나타내어라.

학생 C : 2.(1) $-1=2a$
3.(1) $y=\frac{a}{x}$, $4=\frac{a}{4}$

학생 D : (1) $-1=2x$ $y=\frac{a}{x}$
$x=-\frac{1}{2}$ $4=\frac{a}{4}$ $a=4$

이 문제에서 요구하는 답은 x와 y 사이의 관계식이므로 2번 문제의 답은 $y=-\frac{1}{2}x$이고, 3번 문제의 답은 $y=\frac{16}{x}$이다. 그러나 학생 C와 학생 D는 자신에 옳다고 생각하는 부분까지만 문제를 풀었고, 이 문제가 요구하는 답을 어떻게 나타내어야 되는지에 대해서는 생각하지 못하였다. 또, 학생 D의 경우는 계산을 잘못하여 $4=\frac{a}{4}$의 값을 $a=4$라고 답하였다. 따라서 교사는 문제를 해결하는 과정

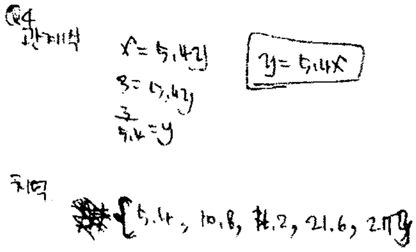
에서 문제가 요구하는 것이 무엇인지 학생들에게 질문하고, 문제를 이해하고 계획을 세우는 단계에서 무엇을 구해야하는지 학생 스스로 알 수 있도록 도와야 한다. 또, 학생들이 찾은 답이 정확한지 검토하게 해야 한다.

수학 학습부진아들은 주어진 문제를 해석하는 데에 있어 자신이 생각하기 편리한대로 해석하여 문제를 잘못 해결하는 경우(송순희, 오정현, 1997)가 있다. 다음은 함수식으로 나타내는 활동에서 나타난 사례이다.

[사례 3] 함수의 관계식과 치역

문제 4. 한 개의 무게가 5.4g인 사탕 x개의 무게는 yg이라고 한다. 다음 물음에 답하여라. (박두일 외, 2002a, p. 143)
(1) x, y 사이의 관계를 식으로 나타내어라.
(2) 정의역이 {1, 2, 3, 4, 5}일 때, 함수의 치역을 구하여라.

교사 : 학생 B는 뭐라고 썼어?
학생 B : $x=5.4y$
교사 : 보통 이런 관계식을 쓸 때, x는 이렇게 많이 써? y는 이렇게 많이 써?
학생 B : y는
교사 : 왜 그렇게 썼지? $x=5.4y$ 같아?
학생 B : (문제를 잘 이해하지 못한다.)
교사 : 무게는 yg이고, 개수는 x개야 그렇지?
교사 : 사탕 3개면 몇 g이야?
교사 : 다시 말하면 x 곱하기 5.4일까? 아니면 사탕의 개수 x가 5.4 곱하기 y일까?
교사 : 전체 무게를 $5.4x$라고 해야 돼? 아니면 사탕 개수가 $5.4y$라고 해야 돼?
학생 B : (망설이며 대답하지 못한다.)
교사 : x가 3개일 때, y값을 구해봐. 써봐 x가 3일 때,
학생 B : ($3=5.4y$ $\quad \frac{3}{5.4}=y$라고 쓴다.)
교사 : 사탕이 3개면 몇 g이야?
학생 B : (웃으면서 대답하지 못한다.)
교사 : 사탕 하나에 5.4g이야 2개면?
학생 B : 10.8g
교사 : 3개면?
학생 B : 16.2g
교사 : 그렇지. 식을 한 번 다시 써봐.
학생 B : (이제야 알았다는 듯이 $y=5.4x$라고 쓴다.)
교사 : 숫자를 넣으면 쉬운데 문자를 넣으면 어렵지?



<그림 1> 학생 B의 풀이

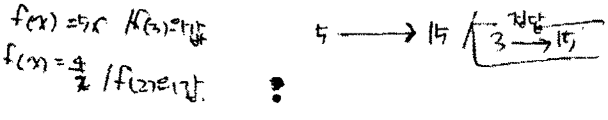
학생 B는 제시된 조건을 이해하지 못하여 $x=5.4y$라고 답하였다. 교사는 문제를 이해할 수 있도록 질문하여 학생이 문제를 이해하게 한 후 특수한 예를 통해 일반화할 수 있도록 지도한 것이다. 이와 같이 수학 학습부진아가 문제에서 요구하는 내용을 전혀 이해하지 못했을 때, 바로 답을 알려주기보다 학생들이 이해할 수 있는 구체적인 상황이나 현실적인 문제에서 시작하여 그 내용을 이해시킨 후 문제로 다시 돌아가서 지도하는 것도 하나의 방법이다. 또, 수학 학습부진아가 이해할 수 있는 현실적인 문제나 쉬운 특수한 예로부터 시작하여 학생들에게 성공적인 경험을 제공함으로써 연속적인 성취할 수 있는 동기를 제공한 것이다(류성림, 1999).

교사는 함수에 대한 학생들의 이해를 돕기 위해 수업에서 도표, 그래프, 대응 관계를 나타내는 그림을 그리는 활동을 자주 활용한다. 이는 수학 학습의 추상화, 일반화, 특수화하는 습관의 결여에서 오는 학습부진(신성균 외, 1984)을 해결하고, 학습한 내용을 다양한 상황에서 활용할 수 있도록 하기 위해서 여러 가지 자료를 이용한 것이다(류성림, 1999). [사례 4]는 학생들이 구한 답을 대응 관계로 나타내는 그림을 그리는 과정에서 나타난 오류이다.

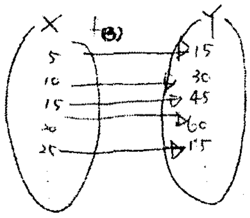
[사례 4] 함수값

문제 2. 다음에서 함수값을 구하여라. (박두일 외, 2002a, 142) (1) 함수 $f(x)=5x$ 에서 $f(3)$의 값

교사 : 함수값을 구하고, 이것을 가지고 앞에서 그렸던 대응 관계를 나타내는 그림을 그릴 수 있겠어?



<그림 2> 학생 B의 답



<그림 3> 학생 E의 답

x가 3일 때 함수값을 구하고 x의 값과 함수값 사이의 대응 관계를 나타내는 그림을 그리는 문제에서 학생 B와 학생 E는 함수값을 구하는 데 있어 5×3이라는 계산을 수행한 후 대응 관계를 나타내는 그림을 그리는 과정에서 5를 x값으로 착각하여 나타난 결과이다. 이는 수학 학습부진아들이 $f(3)$의 의미를 정확히 이해하지 못하고 계산 과정에 치우쳐 나타난 결과이다. 만약 함수값만을 구하고 다음 단계로 넘어갔으면 학생들이 $f(3)$의 의미를 이해하고 있는지를 알 수 없었을 것이다. 함수에 대한 다양한 활동을 통해 학생들이 무엇을 알고 있고, 무엇을 오해하고 있는지를 알 수 있는 계기가 되었다. 이후 교사는 $f(3)$의 의미를 다시 설명하고 x값과 함수값을 다시 쓰게 하여 학생들이 올바르게 쓰도록 하였다.

계획한 수업이 끝난 후 학생들의 변화에 대해 학생 스스로 작성한 설문지에서, 수학 학습부진아들은 함수 학습에서 가장 도움이 되는 부분에 대해 5명 모두 선생님의 자세한 설명이라고 답하였다. 이는 선수학습의 결손과 추상화, 일반화, 특수화하는 습관의 결여 등 수학 학습부진의 원인되는 요인들을 극복하기 위해 무엇보다 선생님의 자세한 설명과 도움이 필요하기 때문이다. 이 설문에서 학생 A가 답한 "중학교과정(기초)을 다시 한 번 배워서 이해하게 되어 매우 좋고 만족한다."와 같이 이미 배운 내용이라도 수학 학습부진아들은 잘 알지 못하거나 이해하지 못하였으므로 다시 설명하거나 중요한 부분을 반복하여 지도하는 것도 좋은 지도방법이다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 수학 학습부진아들이 중학교 함수 영역을 다시 학습하는 과정에서 겪는 구체적인 어려움과 오류에 대해 조사하여 수학 학습부진아들의 수학 학습 개선을 위한 방향을 제시하고 시사점을 찾는 것을 목적으로 한다. 연구대상은 서울시에 소재하고 있는 S여자상업고등학교 1학년 신입생으로 수학에 대해 전반적으로 부진을 보이고, 중학교에서 배운 함수에 대해 이해도가 낮은 학생을 대상으로 하였다. 자료 수집과 분석을 위하여 수업의 모든 과정을 녹화하고, 수업 중 학생들의 생각이나 문제풀이 과정을 스스로 기록하게 하여 그 내용을 일일이 살펴보고, 각각의 내용에서 유의미한 과정을 선정하고, 선정된 과정들은 과정이 의미하는 바에 따라 조직화하고 주제별로 분류하여 분석하였다.

본 연구를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 수학 학습부진아들은 일반적으로 학생들이 다 알고 있을 것으로 생각되는 가장 기본적인 내용에서 학습에 문제가 생길 수 있다. 예를 들어, 일차방정식에서 그 해를 구하지 못하였다. 따라서 수학 학습부진아를 지도할 때, 질문과 관찰을 통해 학생들이 무엇을 알고 있고, 무엇을 모르는지를 파악하고 학생들이 모르는 개념이나 정리를 다시 한 번 지도하고, 학생들의 문제해결 과정에서 오류를 진단하여 학생들이 이해할 수 있는 사실로부터 시작하여 자신의 오류를 인식시키고 학생이 이해할 수 있는 수준의 발문을 통해 지도해야 한다.

둘째, 수학 학습부진아들은 주어진 문제에서 요구하는 풀이나 답이 무엇인지 정확하게 인식하지 못하여 자신에 옳다고 생각하는 부분까지만 풀거나 주어진 문제를 해석하는 데에 있어 자신이 생각하기 편리한대로 해석하여 문제를 해결하지 못하는 경우가 있다. 따라서 교사는 문제를 해결하는 과정에서 문제가 요구하는 것이 무엇인지 학생들에게 질문하고, 문제를 이해하고 계획을 세우는 단계에서 무엇을 구해야하는지 학생 스스로 알 수 있도록 돕고, 학생들이 이해할 수 있는 구체적인 상황이나 현실적인 문제에서 시작하여 그 내용을 이해시킨 후 특수한 예를 통해 일반화할 수 있도록 지도하는 방법도 좋은 방법이다.

셋째, 실험에 참여한 5명의 학생 모두는 교사의 발문보다는 오히려 교사의 자세한 설명이 함수학습에 더 도움이 되었다고 답하였고, 표, 그래프, 함수식 등을 함께 학습함으로써 처음에는 낯설고 어려워했으나 수업이 진행될수록 자연스럽게 활동할 수 있었다. 또, 이러한 다양한 표현이나 활동을 통해 교사는 학생들이 모르고 있는 내용도 발견할 수 있었다. 따라서 수학 학습부진아를 위한 학습에서는 다양한 표현의 수단을 사용하여 활동할 수 있도록 도움을 주어야 한다. 또한 여러 가지 개념이나 원리에 대한 이해가 부족한 학생들에게 그 개념이나 원리를 설명하는 질문보다는 왜 그렇게 되는지 또는 어떻게 그렇게 생각할 수 있는지와 같은 질문을 통해 개념이나 원리를 이해시키고, 중요한 내용은 다시 설명하거나 반복하여 지도하는 것도 좋은 방법이다.

이상의 연구 결과와 결론을 토대로 다음과 같은 점을 제언하고자 한다.

첫째, 수학 학습부진아를 위한 연구에는 아직도 많은 문제가 남아있다. 본 연구에서는 함수라는 특정한 영역과 예를 통한 자세한 설명과 발문을 중심으로 수업을 진행했기 때문에, 다른 영역과 다른 교수 방법에서 어떤 결과가 나오는지에 대해 지속적인 연구가 필요하다.

둘째, 본 연구에서 제시한 수학 학습부진아의 개별적인 학습 상황은 함수 학습에서 나타날 수 있는 상황 중에서 일부분에 지나지 않는다. 따라서 개별적인 학습 상황 이외에 수학 수업 중에 일어날 수 있는 조별 활동이나 집단 활동 중에 발생하는 다양한 현상, 또는 일반 학생들과 함께 학습하면서 발생하는 상황 등에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 1997- 15호 별책 8), 서울: 대한 교과서 주식회사.

김사환 · 조정수 (2002). 일반계 고등학생의 수학 교과에 대한 기본 학습 부진 요인 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **14**, pp.327-348.

류성림 (1999). 수학 학습 부진아의 개별화 교수 방법, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> **3(2)**, pp.115-131.

박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종 (2002a). 중학교 수학 7-가, 서울: 교학연구사.

박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종 (2002b). 중학교 수학 8-가, 서울: 교학연구사.

박성익 · 현주 · 임연기 · 서혜경 (1984). 중학교 학습 부진 학생을 위한 프로그램 개발 연구, 한국교육개발원 연구보고 RR 84-12, 서울: 한국교육개발원.

박혜숙 · 박기양 · 김영국 · 박규홍 · 박윤범 · 권혁천 · 박노경 · 백은정 · 황정연 (2004). 중학교 학습부진아의 수학 기피성향 치유방안, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **43(2)**, pp.115-137.

송순희 · 오정현 (1997). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **36(1)**, pp.11-22.

신성균 · 김영만 · 박성익 · 서혜경 · 임연기 (1984). 중학교 수학과 학습부진아를 위한 보충학습 프로그램 개발 연구, 한국교육개발원 연구보고 TR 84-02, 서울: 한국교육개발원.

이상원 · 방승진 (2006). 수학 교과에 대한 기본 학습 부진 요인 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **20**, pp.249-270.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. Reston*, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

A Case Study on Error of Underachievers in Mathematics in Function Learning

Shim, Sang Kil
Accreditation Center for Educational Development, Dankook University
E-mail : skshim22@dankook.ac.kr

Choi, Jae Yong
Ilshin Girls' Commercial High School
E-mail : ball66119@hanmail.net

The study aims to figure phenomena and changes that underachievers in mathematics show in the process of learning a function. It is necessary to remind basic concepts once again in advance at a time of teaching underachievers in mathematics to check what they have difficulties in learning for further teaching later on. Five participating students said that teachers' detailed explanation was more helpful, and they found it difficult to learn tables, graphs and formulas at first, but as time progressed, they naturally accepted them. In this regard, it is necessary to use various expressions and means to teach underachievers in mathematics.

* ZDM Classification : D73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : underachievers in mathematics, function, error, mathematical learning improvement