韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2008. 08. 제 47권, 제 3호, 373-386

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
\August. 2008, Vol. 47, No. 3, 373-386

확률 영역에서의 독립성, 그 직관적 개념과 형식적 정의의 갈등

조 차 미 (전남대학교 대학원)
박 종 률 (전남대학교)

Ⅰ. 서 론

직관은 형식이라는 틀을 빌려 세상에 자신을 드러내며 형식은 직관의 영역을 넓혀 더 복잡한 구조까지도 추론할 수 있도록 한다. 이런 직관과 형식의 반복적인 재생과 확장은 수학이라는 학문에서 두드러지게 나타난다. 수학에서의 직관적 개념은 문자와 기호의 약속을 통해 전개되는 형식적인 구조를 이루어내며 형식적 구조는 예상치 못한 영역까지 직관의 범위를 넓혀 준다. 수학의 이러한 성질은 수학을 발전시키는 원동력이다. 대부분의 직관과 형식은 일반적인 개념의 체계를 확립하는 데 있어서 예외 없는 일관성을 유지하면서 확장된다. 그러나 확률에서의 독립에 관한 직관적 개념과 형식적 정의[1]는 문제의 유형과 상황에 따라 적용형태에 차이가 있다. 또한 형식적 정의에 의한 독립성의 판단에서 직관을 유도하는 과정은 원시적인 직관에 의해 독립을 인정하는 과정과는 연결되지 않는 괴리가 있다. 현 교육과정에서 독립성에 대한 설명이 어떤 과정으로 이루어지고 있으며 이러한 괴리를 와해하기 위해서는 독립의 개념이 어떻게 전개되어야 하는지에 관한 연구가 필요하다.

확률에서의 독립성의 개념은 자생적 관념인 용어의 일상적인 의미를 토대로 이루어진다. 독립성은 "두 사건 중 한 사건이 다른 사건에 영향을 준다고 판단할 이유가 없다면 두 사건은 독립이다"와 같이 매우 직관적인 개념으로부터 출발하였다. 이 개념의 확률적인 표현이 형식적인 정의인 곱의 법칙(multiplication rule)이다.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Kolmogorov에 의한 공리론적 확률의 기초에 의해 통계적 독립성이 곱셈법칙으로 정의되면서 정의(definition)와 개념(concept)의 도치가 일어났으며, 이러한 새로운 정의는 직관적인 판단을 배제시키는 개념의 확장을 불러왔다는 비판을 받았다(von Mises, 1928/1952)[2]. 즉, 어떤 사건들이 통계적으로 독립이나 직관적으로 독립이 아니며 이와 반대로 직관적으로 독립이나 통계적으로 그렇지 않는 경우가 있다는 것이다(Batanero, Henry, & Parzysz, 2005).

독립성의 개념을 '영향의 유무'로 해석하는 것은 주관적 또는 경험적으로 확실해 보이는 직관에 의존한 결과이다. 이러한 직관적 개념은 '주사위 두 개를 동시에 던지거나 동전과 주사위를 던지는 시행에서 발생하는 사건'에 적용된다. 그러나 이러한 직관은 '주사위 한 개를 던져 2의 배수 눈이 나올 사건과 3의 배수 눈이 나올 사건'이 독립임을 설명하지 못하며 이는 형식적 정의인 곱의 법칙으로만이 가능하다. 본 논문은 이러한 독립성의 직관적 개념(intuitive concept)과 형식적 정의(formal definition)의 갈등에 대한 분석과 독립성의 지도방법에 대한 연구이다. 또한 직관에 의존한 이해로부터 발생하는 오개념의 분석과 이런 오개념을 극복할 형식적인 방법에 의존한 사고의 일관성 있는 전개를 위한 교육내용의 재구성의 필요성을 주장하였다.

Ⅱ. 독립성에 관한 이해

독립성을 설명할 때 지도상의 주안점으로 제시하고 있는 두 가지는 다음과 같다(확률과 통계 교사용 지도

* 2008년 7월 투고, 2008년 8월 심사 완료.
* ZDM분류 : K54
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 독립, 직관적 개념, 형식적 정의, 곱셈정리

1) Carmen Batanero, Michel Henry, Bernard Parzysz(2005)의 논문의 intuitive concept와 formal definition을 번역한 표현임

2) Carmen Batanero, Michel Henry, Bernard Parzysz(2005)의 원문(p. 28)에 인용된 것을 재인용함

서, 2003, p.114).

• 일상용어로서의 독립과 통계적 독립의 차이를 이해하게 한다.

• 실생활의 예를 통하여 독립의 뜻을 알게 한다. 실생활의 예로는 주사위나 동전을 동시에 던지는 경우, 복원 추출이나 비복원 추출의 경우 등이 있다. 실생활의 예는 일상용어로서의 독립의 의미가 자연스러운 예들이며 직관적인 독립의 뜻을 받아들이기에 쉽다. 그러나 또 한 가지 주안점으로 일상용어로서의 독립과 통계적 독립의 차이에 대한 이해를 요구한다. 이는 '주사위를 한 번 던질 때, 2의 배수의 눈이 나오는 사건과 3의 배수의 눈이 나오는 사건이 독립이다'와 같이 직관적으로 받아들여지지 않는 경우와 같이 통계적으로는 독립이나 일상용어로서의 독립이 적용되지 않는 경우에 생기는 혼란을 막기 위해서이다. 이와 같이 일상용어로서의 독립 즉, 직관적인 개념의 이해가 어려운 경우의 통계적 독립의 예는 통계적 독립의 의미가 직관적인 독립의 개념보다 더욱 확장된 개념임을 암시하고 있다. 일상용어로서의 독립은 직관적 개념(intuitive concept)을 바탕으로 이루어지는 경우의 예이나 통계적 독립은 직관적 개념으로부터 발달하여 형식적 정의(formal definition)를 만족시키는 경우까지 포함한다.

1. 독립성의 직관적 개념(intuitive concept)과 형식적 정의(formal definition)

독립성의 직관적 개념(intuitive concept)은 '두 사건의 영향의 유무'를 통해 따지는 직관에 의존한 개념으로 이는 독립성의 역사적 발생의 원인이다. 확률의 개념은 독립성이 너무나 자연스러운 기억력이 없는 주사위나 동전과 같은 확률 게임에 관한 연구로부터 시작되었다. 18세기 중반에 이르러서야 독립의 개념은 주목이 되었고 그 체계가 명백해 졌다. 이 체계는 집합기호를 도입한 곱셈정리로 정의되는 것을 말하며, 이를 독립성의 형식적 정의(formal definition)라 하겠다.

즉, 원시적인 직관에 의존한 독립성의 자생적 발생은 집합기호 도입을 통해 형식적 정의로 체계화되었고 이것이 곱의 법칙으로 표현되는 독립성의 형식적 정의를 완성시켰다.

독립성을 설명하는 여러 가지 방법은 아래와 같이 크게 두 가지 형태로 나뉜다.

<표 1> 직관적 개념과 형식적 정의

직관적 개념	▸사건 B가 사건 A에 영향을 주지 않을 때 사건 A와 사건 B는 독립이다. ▸사건 B가 일어날 확률이 사건 A가 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때 사건 A와 사건 B는 독립이다.
형식적 정의	▸ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ $(P(A)\neq 0, P(B)\neq 0)$일 때 사건 A와 사건 B는 독립이다. ▸ $P(A\vert B)=P(A)$(단, $P(B)\neq 0$)일 때 사건 A와 사건 B는 독립이다.

이런 맥락에서 교육과정에서의 지도방법의 접근은 두 가지 방향에서 가능하다. 직관적 접근과 형식 연역적 접근이 바로 그것이다. 전자는 직관적 개념에서 형식적 정의로 전개하는 방법을 말하며, 후자는 형식적 정의가 설명된 후에 직관적 개념을 연결하는 방법이다. 그러나 독립성의 설명에서 두 가지 방법은 모두 문제점을 안고 있다. 직관적 개념이 먼저 강조되는 직관적 접근은 직관이 성립하지 않는 경우의 예와 부딪혔을 때 혼란을 피하기가 어려우며, 곱의 법칙이 먼저 제시되는 형식적 접근은 계산 패턴 체계로서의 확률을 가르친다는 여러 비판[3)]을 받고 있다. 그럼에도 불구하고 현 교육과정은 대부분 형식적 정의로 시작하여 직관적인 독립성이 확보되는 특별한 경우(두 개의 주사위와 같은)의 예를 제시하면서 언어적인 해석과 연결시켜 직관을 형성하도록 구성되어있다. 이는 독립성의 역사 발생적인 순서와 역행하고 있다고 할 수 있다. 그러나 이러한 두 가지 접근 방법의 우수성을 따지거나 역사 발생적 메카니즘 도입의 적합성을 따지는 것 보다 우선되어야 하는 것은 독립성에서 초래

3) Freudenthal(1973)은 현재의 확률교육은 현실과 단절된 추상체계로서의 확률, 수량적인 자료로 가득한 계산 패턴 체계로서의 확률을 가르치고 있다고 비판하였으며, 집합론적인 배경과 조합론적 논의를 중심으로 확률 이론을 전개한다는 것 또한 비판하였다. Steinbring(1991)도 확률 교육의 근본 문제가 '공식과 계산 기술의 지나친 강조'에서 비롯된다고 생각하였다. 조합론이나 집합론적 논의는 확률 개념을 정당화하기 위하여 도입되지만, 확률적인 모델의 표현과 실제 상황에서의 확률적 해석을 방해한다. 조합론과 집합론적 논의에서 등장하는 수학적인 공식과 계산 기술은 확률 모델의 이해와 적용을 간과하게 한다(이정연, 2006, 재인용).

된 갈등에 대한 명확한 분석이다. 갈등의 분석이 선행된 후에 접근방법에 관한 논의가 이루어져야 할 것으로 본다.

2. 두 가지 문제 유형

직관적 개념(intuitive concept)과 형식적 정의(formal definition) 사이의 갈등은 개념(concept)과 정의(definition) 자체가 만들어내는 것이 아니라 그러한 개념과 정의가 적용되는 다양한 문제 상황에서 발생한다. 다음의 표는 그러한 갈등을 내포하는 문제들을 크게 두 가지 유형으로 구분하여 직관적 개념과 형식적 정의의 적용형태를 비교하였다.

<표 2> 문제 유형에 따른 직관과 형식의 비교

	유형❶	유형❷
문	한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B	한 개의 주사위를 잇달아 던져 첫 번째 눈이 소수의 눈이 나올 사건이 A, 두 번째 눈이 5이상의 눈이 나올 사건이 B
직	직관에 의해 판단 불가능 ⇒'소수의 눈과 5이상의 눈이 어떤 영향이 있는가?'의 직관적 접근이 오히려 장애가 됨	직관(원시적 직관)에 의해 판단 가능 ⇒주사위는 기억력이 없다? Yes!
형	형식적 정의에 의해 증명 $P(A)P(B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ $\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$	형식적 정의에 의해 증명[4] $P(A)P(B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ $P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ $\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$

Beth와 Piaget(1966, p.194)는 직관적 수용과 매우 유사한 뜻으로 '자명성(self-evidence)'를 사용했다.

Reuchlin(1973)은 형식적 추론과 구별되는 '자연적 사고'는 신속성(immediacy), 구체성, 즉각적이고 총체적인 평가를 위한 능력을 수행한다고 하였다. 한 개의 주사위를 잇달아 던질 때(두 주사위를 굴릴 때) 첫 번째 눈과 두 번째 눈에 관계되는 사건의 독립성에 관한 직관은 Piaget가 사용한 자명성에 의해 증명을 필요로 하지 않으며 그 직관은 Reuchlin의 자연적 사고와 일치한다.

Piaget의 자명성과 Reuchlin의 자연적사고와 일치하는 직관에 의해 유형❷의 독립성은 형식적 증명이 필요하다는 느낌 없이 즉각적이고 당연한 것으로 받아들여진다. Fischbein(1987)은 이러한 자명성을 직관의 첫 번째 특징으로 세운다. 이와는 대조적으로 유형❶의 독립성은 자명하지 않으며, 형식적 증명 이후에도 유형❶에서 자명하게 받아들여지는 직관은 성립하지 않는다.

3. 직관과 직관모델

독립의 개념은 동시에(잇달아) 던져지는 두 주사위 또는 동전과 주사위라는 감각적이고 행동적인 대체물로 직관적 모델을 형성한다. 독립의 직관과 직관적 모델을 연결은 사실상 의도적이며 전략적인 형태로 구성되며 이러한 전략은 절반의 성공과 절반의 실패를 낳는다.

이러한 직관적 모델은 독립성과 관계된 문제, 특히 결과가 신속히 나타나지 않는 추론의 여유가 주어지는 상황에서 암묵적이고 자동적으로 생산되며 빈번히 직관적 구조의 구성을 결정하여 기대와 다른 결과에 부딪혔을 때 갈등을 유발시키는 원인이 된다. 예를 들어 '세 사건이 각각 쌍으로 독립이면 세 사건이 독립'일 것이라는 기대는 두 주사위를 확장시킨 세 주사위의 직관모델로 인한 것이며 반례의 형식적 증명[5]을 통해서만 주사위의 직관모델의 적용이 잘못된 것임을 알게 한다. 즉, 두 주사위의 눈에서 발생하는 사건의 원시적인 직관은 독립성의 전체적 개념을 설명하기에는 제한된 직관이다.

그럼에도 불구하고 독립성에 대한 원시적 직관과 두 주사위의 직관모델은 직관의 또 다른 특징인 강건성[6]에

4) 모든 교과서가 유형❷의 독립성 증명을 다음과 같이 하고 있으나 본 논문에서의 말미에 이와 같은 풀이가 형식적 직관의 일관성을 헤치는 요인이며 공리적 확률체계로서 사건의 의미를 제대로 반영하지 못한 계산 방식이며 이로 인해 발생하는 순환 모순적인 증명과정도 찾아내었다.

5) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, $P(B\cap C)=P(B)P(C)$,
$P(C\cap A)=P(C)P(A)$이면
$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$
표본공간$S=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ $P(X=s_i)=1/4(i=1,2,3,4)$
$A=\{s_1, s_2\}, B=\{s_1, s_3\}, C=\{s_1, s_4\}$이면
$A\cap B=A\cap C=B\cap C=A\cap B\cap C=\{s_1\}$
그래서 $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$이고
$P(A\cap B)=P(B\cap C)=P(C\cap A)=P(A\cap B\cap C)=1/4$
즉, 쌍으로 독립인 세 사건이 모두 독립은 아니다 (Kolomogorov, 47p).

의해 형식적 증명이나 반례의 존재에도 불구하고 주관적인 신념을 유지해가며 이에 관한 갈등은 쉽게 해결되지 않는다. 이러한 갈등을 조금이나마 와해하기 위해 원시적 직관이 침투되지 않는 유형●의 독립사건 안에서 직관의 의미를 구성하려는 노력이 있다.

4. 논리 형식적 직관

크로체(B. Croce)의 철학에서 직관은 항상 미감(美感)과 결합되어 있다. 이것은 직관이 가지각색의 겉모양에서의 "통일성"과 항상 결합되어 있기 때문이다(Wild, 1938, pp.39-49). 화가 또는 시인과 같이 수학자의 양식은 반드시 아름다워야 하며, 색 또는 말과 같이 생각들은 반드시 조화로운 방법으로 서로 어울려야 한다(G.h. Hardy, 1940). 흔히 수학이 갖는 심미적 요소는 바로 이러한 조화와 안정성이 주는 아름다움에 있다고 할 수 있다. 그러나 독립성은 위의 표에서와 같이 문제 유형에 따라 직관이 적용되는 경우(유형●)와 적용되지 않는 경우(유형●)의 분리로 인하여 수학에서 예외 없이 인정되어야 하는 일관적인 패턴에 어긋남으로서 조화로움과 통일감으로부터 오는 편안함과 안정성을 깨뜨린다.

이정연(2005, p.55)은 Freudenthal이 제시한 비형식적인 '사고방식'으로서의 조건부 확률의 개념 지도에 관한 연구를 하였다. 그는 비형식적 도입을 통한 사건의 관련성에 대한 인식의 지도가 필요하다고 하였다. 또한 그는 독립성의 곱의 법칙의 정의보다 조건부 확률의 표현 ($P(A|B)=P(A)$(단, $P(B)\neq 0$))을 통한 정의가 독립의 개념에 관한 직관을 형성하는 데 타당하다고 했다. 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률이 사건 A가 일어날 확률과 같을 때 사건 A와 사건 B는 독립이다. 즉, 사건 A가 일어날 확률은 사건 B의 발생에 영향을 받지 않는다. 그러나 이렇게 형성된 직관은 직관의 특징인 자명성[7]에 의한 것이 아니다. 다시 말해서 두 주사위를 던지거나 동전과 주사위를 던지는 문제의 원시적인 직관으로 해결되는 문제와는 너무나 분명한 차이가 있다는 것이다. 이러한 직관은 원시적 직관이 형성되지 못하는 유형●에서의 직관적 이해의 부재가 주는 불안감을 없애기 위한 인위적인 조작에 의해 형성된 직관이다. 이는 형식적 정의의 증명과정 없이 절대로 성립될 수 없기 때문이다. 조건부 확률의 상대적 빈도에 대한 엄밀하고 형식적인 과정을 통해 세우는 직관이기에 본 논문에서는 이를 '논리 형식적 직관'이라고 하겠다. 이러한 논리 형식적 직관은 형식적이고 논리적인 기초를 바탕으로 한 확신이다. Kant(1980, p.268)는 직관은 단순히 대상을 직접 파악하게 해 주는 기능으로, 그것은 우리가 개념적 지식을 성취하게 해주는 '이해'의 기능과 구별된다고 하였다. '논리 형식적 직관'은 원시적 직관과는 거리가 먼 '형식적 정의'가 바탕이 된 '논리적 이해'에 가까운 정신적 전략으로 볼 수 있다.

"사실 그것은 정신 습관이 아닐 뿐만 아니라, 내재적인 확신의 느낌을 동반하는 인지 유형의 하나이다. 수를 곱하거나 나누는 알고리즘 또한 학습될 수 있고, 마침내 정신적 습관이 될 수도 있다. 그러나 이것은 직관이라고 하는 내재적 명증을 갖지는 못한다. 일반적으로 말해서, 논리적 사고의 공리는 그러한 근본적 신념에 근거한다고 말하면 무난할 것이다. 이것은 논리적 직관이라는 영역을 구성한다."(Fischbein, 1987)

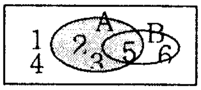
논리 형식적 직관은 유형●의 문제에서 독립성을 이해하는 정신적 훈련과 습관이 될 수도 있다. 그러나 이것은 내재적 명증이 확실한 원시적 직관과는 다르다.

<표 3> 원시적 직관 대 논리 형식적 직관

	유형●	유형●
문제	한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5 이상의 눈이 나올 사건이 B	한 개의 주사위를 잇달아 던져 첫 번째 눈이 소수의 눈이 나올 사건이 A, 두 번째 눈이 5이상의 눈이 나올 사건이 B
직관	직관으로 판단 불가능	직관에 의해 판단 가능
형식	형식적 증명	형식적 증명

6) Fischbein(1987)은 직관의 여러 특징들 중에 한 가지로 강건성을 들고 있다. 일단 형성된 직관은 매우 강건하여 교사의 형식적 지도가 학생의 직관적 배경에 거의 영향을 미치지 않는다는 것이다.

7)Fischbein(1987)은 직관의 첫 번째 특징으로 '자명성'을 꼽고 있다.

논리 형식적 직관	조건부 확률 개념 이용  <그림 1> 유형❶ 형식적 직관 세우기 $P(A)=\frac{n(\{2,3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}=\frac{1}{2}$ $P(A\mid B)=\frac{n(\{5\})}{n(\{5,6\})}=\frac{1}{2}$ 소수의 눈이 나올 사건의 확률이 5이상의 눈 중에서 소수의 눈이 나올 확률과 일치하므로 사건 B의 발생이 사건 A의 확률에 영향을 미치지 않는다는 형식적 직관을 세울 수 있다.	

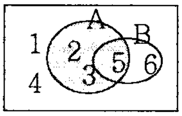
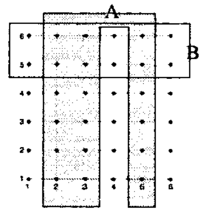
5. 전체적 아이디어

"아무리 복잡한 수학적 주장이라고 해도 내게는 유일한 것으로 나타나야 한다. 나는 그것을 하나의 전체적 아이디어로 파악하지 못하는 한 내가 그것을 이해했다고 느끼지 않는다."(Hadamard, 1949, p.65)

논리 형식적 직관을 아무리 강조하더라도 그것이 원시적 직관이 될 수 없음을 강조하였다. 즉, 원시적 직관은 독립성을 파악할 수 있는 하나의 전체적 아이디어는 아니다. 그렇다면 논리 형식적 직관은 원시적 직관이 해내지 못한 전체적 아이디어의 역할을 해 낼 수 있는 직관이 될 수 있을까?

원시적 직관에 의해 독립이 명확한 유형❷에서는 원시적 직관에 의해 독립성의 증명을 형식적으로 할 필요가 없지만, 일관성 확보의 요구에 따라 유형❶과 유사한 패턴으로 형식적 증명을 위해 다음과 같이 벤다이어그램으로 나타낼 수 있다.

<표 4> 전체적 아이디어로서의 논리 형식적 직관

	유형❶	유형❷
문제	한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B	한 개의 주사위를 잇달아 던져 첫 번째 눈이 소수의 눈이 나올 사건이 A, 두 번째 눈이 5이상의 눈이 나올 사건이 B
직관	직관으로 판단 불가능	직관에 의해 판단 가능
형식	형식적 증명	형식적 증명
논리 형식적 직관	조건부 확률 개념 이용  <그림 1> 유형❶ 형식적 직관 세우기	조건부 확률 개념 이용  <그림 2> 유형❷ 형식적 직관 적용

논리 형식적 직관의 목표는 독립에 관한 기본적 아이디어를 전체적, 구조화된 시각으로 요약함에 있다. 경험적 직관 대신에 형식적 직관을 통한 연역적 점검 과정은 독립에 관한 일관성이 확보되도록 하는 과정이다.

유형❶의 형식적 직관을 유형❷에서도 같은 방식으로 적용되는 과정이 복잡하더라도 일회적으로나마 제시된다면 독립에 관한 기본적 아이디어를 전체적, 구조화된 시각으로 요약할 수 있는 기회가 될 것이다.

Fischbein(1987)은 사람들이 개념과 형식적 연산에 어떤 특유한 행동적 요구를 충족시킬 수 있는 해석을 지정하는 경향이 있다고 했다. 첫째, 그러한 해석은 전체적이고, 직접 표상 가능해야 한다. 둘째, 비록 외관상 정적이기는 하지만, 이 해석은 각각의 표상에 행동적 의미를 주기 위하여 구성적 활동을 시사해야 한다. 셋째, 그 해석은 주어진 특정한 표상을 능가해야 한다. 사람들은 유일한, 제한된, 그리고 불완전한 표상을 통하여 구성의 일반적 원리를 이해하고, 전 과정에 연결되는 결과를 기대하게 한다고 하였다.

Fischbein의 '해석'의 의미를 독립성에서 직관적 개념과 형식적 정의를 연결하고자 하는 '논리 형식적 직관'에 비추어 볼 수 있다. 논리 형식적 직관은 첫째, 전체적으로 포괄할 수 있는 구조이며, 둘째, 형식적 정의를 통해 의미를 부여하기 구성적 활동이며, 셋째, 두 주사위 또는 동전과 주사위로 대표되는 독립성의 특정한 표상을 능가한다.

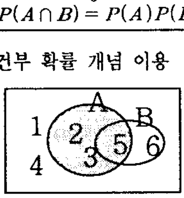
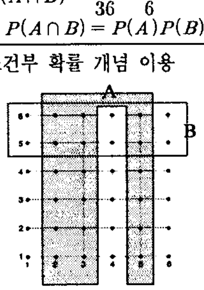
논리 형식적 직관을 위한 벤다이어그램의 구성은 형식적 정의의 증명과정에 세심한 주의를 요구한다. 이에 관해서는 다음 장에서 논의된다.

III. 독립성의 증명

1. 형식적 증명의 오해

II장에서는 독립성의 논리 형식적 직관이 독립성의 문제에서 예외 없이 적용될 수 있는 전체적인 아이디어라 하였다. 그러나 실은 유형●과 유형●에서 논리 형식적 직관의 일관적 적용을 통한 전체적 아이디어로서의 확인이 필요한 것인지 의문스럽게 생각할 수도 있다. 왜냐하면 이미 유형●과 유형●에서 형식적 정의에 의한 증명에서 일관성을 유지하고 있으며 이것이 독립성을 나타내는 전체적 아이디어로서 예외 없이 적용되기 때문이다. 그렇다면 유형●의 형식적 정의에 의한 증명이 과연 두 유형의 적용에 일관성을 가지고 있는가와 논리 형식적 직관을 위한 그림의 의미를 어떤 식으로 반영하고 있는가를 살펴보자.

<표 5> 형식적 증명의 오해

	유형●	유형●
문제	한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B	한 개의 주사위를 잇달아 던져 첫 번째 눈이 소수의 눈이 나올 사건이 A, 두 번째 눈이 5이상의 눈이 나올 사건이 B
직관	직관에 의해 판단 불가능	직관(원시적 직관)에 의해 판단 가능
형식	형식적 증명 $P(A)P(B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ $\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$	형식적 증명 $P(A)P(B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$ $P(A\cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ $\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$
논리 형식적 직관	조건부 확률 개념 이용  <그림 1> 유형● 형식적 직관 세우기	조건부 확률 개념 이용  <그림 2> 유형● 형식적 직관 적용

아래는 독립성을 증명하는 방법에 관한 어느 교사와의 대화이다.

연구자 : 한 개의 주사위를 잇달아 던져 첫 번째 눈이 소수가 나오는 사건과 두 번째 눈이 5이상의 눈이 나오는 사건의 독립성을 어떻게 설명해야 하죠?

교 사 : 직관적으로 당연하지 않나? 첫 번째 눈에서 소수가 나오는 사건이 3/6이고 두 번째 눈에서 5이상의 눈이 나오는 사건이 2/6, 두 사건이 동시에 일어날 사건이 6/36이니까 독립이 맞는데?

연구자 : 소수가 나오는 사건이 어떻게 되죠?

교 사 : 소수는 {1, 2, 3, 4, 5, 6}에서 {2, 3, 5}이고...5 이상은 {1, 2, 3, 4, 5, 6}에서 {5, 6}이니까...

연구자 : 그렇다면 동시에 일어날 사건의 연결을 표현하는 교집합의 기호로 사건집합이 연결되나요?

교 사 : 아...그게 아니고....

이 단계에서 교사는 첫 번째 눈에서 소수가 나오는 사건의 계산인 3/6이 단순히 {1, 2, 3, 4, 5, 6}의 부분 집합인 {2, 3, 5}으로 판단되어서는 안 된다는 것을 파악한다. 실제 교집합으로 연결된 곱사건의 증명과정에서 3/6은 표본공간을 어떻게 보느냐에 초점을 맞추고 있느냐를 명확히 드러낼 필요가 있는 계산단계이다. 즉, 표본공간이 두 시행을 각각 나누어 두 표본공간으로 하느냐 아니면 두시행의 적집합으로 표현된 전체공간을 한 표본공간으로 보느냐의 차이가 유형●의 독립성을 어떻게 증명해야 유형●과의 일관성을 제공할 수 있는가의 열쇠이다.

2. 증명의 순환모순

유형●는 대부분 그 독립성에 대한 형식적인 증명은 다루지 않고 독립성에 대한 암묵적인 가정에 의해 사건의 확률을 구하는 문제를 다루도록 하고 있다. 간혹 유형●의 독립성에 대한 형식적 증명이 시도되기는 하나 이는 독립성을 암묵적으로 가정한 상태에서 독립성을 증명하는 순환모순을 야기하는 경우를 발생시킨다. 아래의 예는 독립(서로 영향을 미치지 않을 때)을 가정하여 곱셈정리를 설명하고 있는 [8-나]와 이 곱셈정리를 이용해 독립을 증명하고 있는 [수I]의 순환모순을 지적한다.

<표 6> 곱셈정리와 독립성의 순환 모순

8-나	사건 A와 사건 B가 서로 영향을 끼치지 않는 경우, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면, 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률은 다음과 같다. (사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률)=p×q (강행고 외, 2001)
수 I	조건부확률 $P(B\|A)$와 $P(B)$가 같은 경우에 대하여 알아보자. 이를테면, 한 개의 동전을 두 번 던지는 시행에서, 첫 번째에 앞면이 나오는 사건을 A, 두 번째에 앞면이 나오는 사건을 B라고 하면, $P(B\|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/2\times 1/2}{1/2}=\frac{1}{2}=P(B)$ 이다. 곧, 사건 A의 발생 여부가 사건 B가 일어날 확률에 영향을 주지 않는다. (임재훈 외, 2002, p.264)

[8-나]에서 동시에 일어날 확률에 대한 정의인 곱셈정리는 '서로 영향을 끼치지 않는 경우'라는 조건으로 시작한다. 이는 직관적으로 판단이 가능한 독립인 두 사건을 가정하고 있다. 그런데 [수I]에서는 두 사건의 독립성을 증명하는 과정 안에 독립성을 가정하여 세운 곱셈정리가 사용되고 있다. 즉, $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/2\times 1/2}{1/2}$에서 $P(A\cap B)=1/2\times 1/2$은 두 사건이 독립이라는 전제하에 계산되는 곱셈정리이며 이를 이용하여 독립임을 증명하고 있는 것은 순환모순이다. $P(A\cap B)$는 한 개의 동전을 두 번 던져 생기는 표본공간({(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)})의 부분집합인 사건({(H, H)})을 나타내는 1/4로 계산되어야 한다. 이것이 표본공간과 집합의 기호$A\cap B$의 개념을 정확하게 드러내고 있는 방법이다. 표본공간이 명확히 드러날 때 그 부분집합으로서의 사건이 본연의 실체를 드러내며 이는 집합기호 사용에 대한 정당성을 확보하기 위한 전제가 된다. 우정호(1998, p. 466)는 지도과정에서 실험(시행)의 독립성과 같은 상황의 확률적인 특성은 처음에 암묵적으로 가정되지만, 암묵적인 가정을 분석하는 것은 구체적인 확률적 사건과 그 수학적 모델 사이의 긴장에 의해 지배되는 확률 개념 발달의 필수적인 요소라고 하였다. 이러한 암묵적 가정에 의해 감추어진 확률적 사건과 수학적 모델 사이의 긴장이 바로 독립성의 직관적 개념과 형식적 정의의 갈등에서도 나타나는 것이다.

3. 명확해진 표본공간과 달라진 사건

Kolomogorov에 의한 공리적 확률은 확률측도를 적용할 전체 표본공간과 그 부분집합들로 이루어진 사건들을 명확히 정의한 후 그 측도를 적용할 수 있다. 명확해진 표본공간은 부분집합으로 정의되는 사건의 정체성에 변화를 준다.

<표 7> 사건의 비교

8-나	사건 A와 사건 B가 서로 영향을 끼치지 않는 경우, 사건 A가 일어날 확률을 p, 사건 B가 일어날 확률을 q라고 하면, 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률은 다음과 같다. (사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 확률)=p×q
수 I	<독립인 사건의 곱셈정리> 두 사건 A와 B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

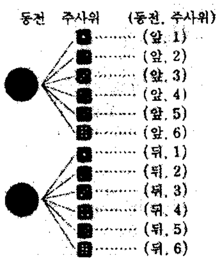
교육과정의 [8-나]에서는 표본공간을 정의하거나 사건을 집합기호로 연결한 표현을 쓰지 않는다. '사건 A와 사건 B가 서로 영향을 끼치지 않는 경우'에 대한 판단은 계산에 의해서가 아닌 원시적 직관에 의해 판단될 수 있는 동전과 주사위를 함께 던지는 시행을 뜻한다. 이는 두 사건 A와 B를 각각의 시행, 즉 주사위를 던지는 시행과 동전을 던지는 시행으로 구분된 표본공간에서의 사건을 구성하고 있으며 이러한 사고는 수형도를 통해 설명되고 있다.

동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던질 때, 일어나는 모든 경우의 수는 오른쪽 그림에서 $2\times 6=12$이다. 그런데 동전의 앞면이 나오는 경우는 1가지이고, 주사위의 짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6의 3가지이다. 그러므로 동전은 앞면이 나오고 주사위는 짝수의 눈이 나오는 경우의 수는 $1\times 3=3$이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{1\times 3}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$이다. 이것은 동전의 앞면이 나올 확률 1/2과 주사위의 짝수의 눈이 나올 확률 3/6의 곱과

같음을 알 수 있다(강행고 외, 2002).

위의 문제는 [수I]의 곱셈정리에서 사건의 독립성을 증명하는 문제로도 아래와 같이 다루어진다.

'동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던질 때 동전의 앞면이 나오는 사건과 주사위의 짝수의 눈이 나오는 사건이 독립임을 증명하여라.'



<그림 3> 수형도

(풀이) 동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 주사위의 짝수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하면

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

한편, 사건 $A \cap B$인 경우는 (H, 2), (H, 4), (H, 6)이므로

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다[8].

앞 절에서 설명한 대로 순환모순은 [8-나]와 [수I]의 달라진 사건의 모습을 변화 없이 받아들이면서 계속적으로 나타나고 있다. 두 사건이 독립이라는 전제하에 계산되는 곱셈정리이며 이를 이용하여 독립임을 증명하고 있는 것은 표본공간과 사건 어느 하나도 제대로 암시하는 계산과정이 아니다.

[수I]의 독립의 증명인 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$에서의 교집합기호로 연결된 사건은 [8-나]에서 바라본 각각 서로 다른 영역에서 발생하는 사건이 아닌 두 시행의 적집합을 전체 표본공간으로 하는 부분집합으로의 사건으로 바라봐야 한다.

[8-나]에서 표본공간의 정의나 사건의 집합기호사용을 통한 구성이 따로 전제 되지 않을 경우는 일상적 확률 사고에서 평범하게 떠오르는 곱사건의 구성형태로 나타나나, [수I]에서 표본공간의 정의와 집합기호 사용을 통한 곱셈정리의 적용을 위한 사건의 구성은 전체 표본공간이 명확히 드러난 확률 공간에서의 부분집합으로서의 사건으로 일상용어로 표현되는 확률상황에서의 사건과 다르다. 이는 집합기호 사용과 표본공간의 정의가 전제된 전개에서는 두 사건에 대한 인식의 수정이 필요함을 의미한다.

4. 올바른 증명

한 개의 동전을 던지는 실험[9]에서 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자. 표본공간은 $\Omega_1 = \{H, T\}$로 주어지고, $P_1(\{H\}) = P_1(\{T\}) = 1/2$의 등확률로 정의되는 확률측도 P_1을 생각할 수 있다. 또한, 한 개의 주사위를 던지는 실험에서 표본공간은 $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$로 주어지고, $P_2(\{j\}) = 1/6(j = 1, 2, \ldots, 6)$로 정의되는 확률측도 P_2를 생각할 수 있다. 이제, 이 두 실험을 동시에 또는 축차적으로 실시하는 실험을 생각하면, 표본공간은 Ω_1과 Ω_2의 카테샨 곱(Cartesian product)인

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2\} \qquad (2)$$

로 나타낼 수 있다. 이 실험에서는 모든 경우의 수가 12가지로서 균등확률 모형을 생각하면

$$P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = 1/12, \quad (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \qquad (3)$$

로 정의되는 확률측도 P를 생각할 수 있다.

식 (3)으로 정의된 P와 각각의 실험에서의 확률측도 P_1, P_2 사이에 어떠한 관계가 있는가를 살펴보자. 첫째로,

$$P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\}),\ \omega_1 \in \Omega_1,\ \omega_2 \in \Omega_2$$

임은 명백하고, 이로부터 Ω_1에서의 사건 A_1과 Ω_2에서의 사건 A_2에 대하여

$$\underline{P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2),\ A_1 \in \Omega_1,\ A_2 \in \Omega_2} \qquad (4)$$

가 성립하는 것을 알 수 있다. 한편, 동전을 던지는 실험에만 관계되는 사건은

$$P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1),\ P(\Omega_1 \times A_2) = P_2(A_2), \qquad (5)$$
$$A_1 \subset \Omega_1,\ A_2 \subset \Omega_2$$

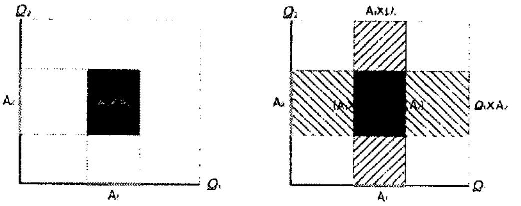
임을 알 수 있다. 즉, 동전을 던지는 실험에만 관계되는 사건의 확률은 그 실험에서의 확률측도 P_1에 의해 결정되는 것이다. 또한, 식 (4)와 (5)로부터

8) 풀이과정의 형식은 교과서(우정호 외, 2002, 268p)에 나온 그대로 적용함

9) 앞에서 사용해오던 '시행'과 같은 의미이나 원문대로 표현함

$$P((A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)) = P(A_1 \times A_2) \quad (6)$$
$$= P_1(A_1)P_2(A_2)$$
$$= P(A_1 \times \Omega_2)P(\Omega_1 \times A_2)$$

가 성립하므로, 사건 $A_1 \times \Omega_2$와 $\Omega_1 \times A_2$ 는 서로 독립이다. 즉, 동전을 던지는 실험에만 관계되는 사건과 주사위를 던지는 실험에만 관계되는 사건은 서로 독립이다. 이는 "동전 던지기와 주사위 던지기는 서로 관계가 없다"는 우리의 직관에 부합하는 것이다(김종우, 김우철, 1987).



<그림 4> 사건의 차이

앞 절의 문제 '동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던질 때 동전의 앞면이 나오는 사건과 주사위의 짝수의 눈이 나오는 사건이 독립임을 증명하여라.'의 두 가지 증명을 비교해 보자.

<표 8> 형식적 증명의 비교

(증명1)	(증명2)
$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ $\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$	$n(S) = 12,\ n(A) = 6,$ $n(B) = 6,\ n(A \cap B) = 3$ 이므로 $P(A)P(B) = \frac{6}{12} \times \frac{6}{12} = \frac{1}{4}$ $P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ $\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$

두 가지 증명은 결과는 같아 보이지만 계산 과정에서 사건의 의미는 다르게 보여 질 수 있다. 동전과 주사위를 던지는 경우 표본공간이 각각 2개, 6개인 근원사건을 갖는 두 시행이 나뉜 표본공간에서 발생하는 사건(곱집합)으로 볼 것인지 아니면 12개의 근원사건을 갖는 하나의 표본공간에서 발생하는 사건(교집합)으로 볼 것인지의 차이가 계산과정에 암시되는 것이다.

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2),\quad A_1 \in \Omega_1,\ A_2 \in \Omega_2 \quad \textbf{(4)}$$
$$P((A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)) = P(A_1 \times A_2)$$
$$= P_1(A_1)P_2(A_2)$$
$$= P(A_1 \times \Omega_2)P(\Omega_1 \times A_2)$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \textbf{(6)}$$

동전을 던지는 실험에만 관계되는 사건과 주사위를 던지는 실험에만 관계되는 사건의 독립성에 관한 직관은 (4)의 식이 당연하게 여겨지는 것을 의미한다. 이는 "$P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\})$, $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$임은 명백하고"에서 이미 밝혔다. 이는 사건을 집합 기호로 연결하지 않는 [8-나]과정에서 배운 곱의 정리의 관점에서 사건을 바라보고 있으며 각 사건이 전체 표본공간의 인식 없이 이루어지는 탓에 독립성의 증명에서 순환 모순이 생기고 독립성의 이해에 직관과 형식의 연결에 어려움이 있는 것이다. 집합기호의 엄밀함을 따지기 위해 (6)을 주목하자.

$A_1 \times \Omega_2 = A$, $\Omega_1 \times A_2 = B$로 치환하면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$이다. (6)은 독립인 두 시행에 각각 관계되는 두 사건의 독립성을 증명하는 과정이다.

대부분의 교과서는 (증명1)의 방법으로 독립성을 증명하고 있다. 그러나 (증명1)은 식(4)의 적용일 뿐이며 정확한 독립성의 증명이라고는 할 수 없다. 시행의 자명한 독립에 의한 곱셈정리의 적용일 뿐이므로, 식(4)의 적용을 통해 독립임을 증명하는 (증명1)은 순환모순이다. 현행 교육과정에서는 '같은 조건에서 반복하는 시행'이라는 조건을 독립시행의 전제 조건으로 하고 있으나, 이 조건은 일반적으로 포함시키지 않는다. 예를 들면, 첫 번째 시행은 주사위를 던지고 두 번째 시행은 동전을 던진다고 할 때, 두 시행은 같은 조건이 아니지만 독립시행으로 보기 때문이다(최봉대, 강옥기 외, 2002, p.338).

(증명1)은 이런 관점에서 직관적인 독립시행에 대한 계산에 불과하다. 이는 자명하기도 하지만 수형도를 통해 [8-나]에서도 이미 알 수 있다. 이와 반대로 (증명2)는 식(6)의 적용이다. 첫 번째 나온 눈이 소수인 사건과 두 번째 눈이 5이상인 사건의 독립성은 시행의 독립에 대한 직관과 일치한다. 유형❷의 독립성을 유형❶과 통일된 형태로 증명하자면 (증명2)와 같이 형식적 정의가 우선되어야 하며 그 이후에 형식적 직관과 원시적 직관이 일치하는 특수한 경우의 사건임에 대한 암시가 이루

어짐이 독립의 일관적인 개념 확립에 바람직하다. 이 방법은 사건의 독립성(independence of events)을 기초로 하여, 시행의 독립성(independence of trials)을 정의하는 것이다. 즉, 2개 이상의 시행이 있고, 그 결과 생기는 임의의 사건들도 독립인 경우, 이들의 시행은 독립이라고 한다.(최기현, 2001)

IV. 독립성에 관한 인지적 갈등

1. 직관적 접근 vs 형식 연역적 접근

원시적 직관이 통하는 사건의 독립성은 시행의 독립성에 의한 직관적 판단으로 결정되며 사건의 독립성에 대한 형식적 증명을 필요로 하지 않는다. 즉, 사건이 예속된 시행의 독립성이 사건의 독립성을 결정한다(유형●).

이러한 독립적인 시행에만 관계되는 사건들인 경우 '어떤 사건이 다른 사건에 영향을 미치지 않는다.'의 의미가 타당하다. 독립성에 대한 역사적 발생이 바로 이러한 독립적인 시행에서부터이다. Kolomogorov 자신은 오히려 독립성의 개념을 소개하는 데 조건부 확률을 사용하지 않았음을 명시하고 있다(Kolomogorov, 1956, p.11). 그는 Definition I에 시행의 독립성을, Definition II에 사건의 독립성을 정의하였다(Kolomogorov. 1956, pp.9-10). 그는 독립성의 의미를 한 수학적인 방식으로 가능한 한 명쾌하게 설명하고자 하였다. 개념의 정의는 그러하되 그의 적용은 대체적으로 조건부확률에 의존한다고 하였다. 그의 전개는 직관적 개념이 적용되는 시행의 독립성에서 형식적 정의가 적용되는 사건의 독립성으로 확장시킨 것이다. 이는 일관적인 설명을 유지하기 위한 형식적 일관성을 우선하는 전개방식과는 다른 접근 방법이다. 시행의 독립성에서 사건의 독립성을 유도하는 것은 직관적 접근이라 할 수 있고 형식적으로 다루는 사건의 독립성에서 시행의 독립성을 유도하는 것은 형식 연역적 접근이라 할 수 있다.

2. 일관성 vs 단순성

표본공간 S에 속하는 두 사건 E, F에 대해, $P(E) \neq 0$ 일 때 E가 주어질 때 F의 조건부 확률은 다음과 같이 정의된다.

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

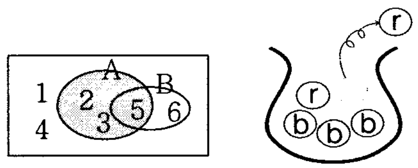
만약 E가 일어났다면 F의 확률은 <u>새로운 표본공간</u> 곧, $S^* = E$에서 고려되어야 한다. 조건부 확률의 정의는 <u>표본공간의 변화</u>는 확률을 변화시킬 수 있다는 사실을 강조하고 있다(우정호, 1998, p.438).

유형●의 문제를 하나 더 첨가하자.

<표 9> 비복원추출 사건

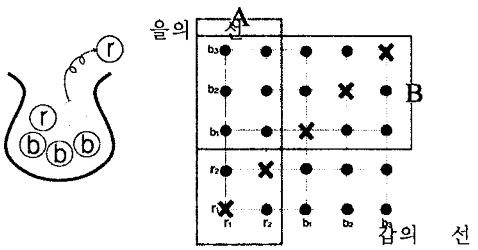
	유형●	유형●
문제	한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B	빨간 공이 2개 파란 공이 3개가 들어있는 주머니에서 갑과 을이 순서대로 비복원 추출한다. 갑이 빨간 공을 꺼낸 사건이 A, 을이 파란 공을 꺼낸 사건이 B

유형●의 조건부확률은 <그림 1>을 떠올리지만 유형●의 조건부확률은 <그림 2>을 떠올린다. <그림 1>은 축소된 표본공간 A에서의 B의 확률 $P(B|A)$이 전체 표본공간에서의 B의 확률 $P(B)$와 일치하므로, 즉, $P(B|A) = P(B)$이므로 독립이다. <그림 2>는 A사건의 발생으로 인해 축소된 표본공간에서의 목적사건 B의 확률을 살피고 있다. 분명히 두 유형의 문제에서 변화된 표본공간의 의미는 같지 않다.



<그림 5> '축소된 표본공간'의 서로 다른 의미

유형●의 조건부 확률에서의 변화된 표본 공간의 축소에도 형식적 일관성을 우선하자면 아래 그림으로 표본공간의 변화를 인식하여야 한다.



<그림 6> 형식적인 축소된 표본공간

복잡하지만 일관성을 유지할 수 있는 좀 더 포괄적인 형식적 구성은 모든 유형의 문제에서 조건부확률과 독립성에 대한 개념과 정의의 일관성은 유지한다고 볼 수 있다. 그러나 집합기호의 논리에 맞춘 일관성을 강조하다 보면 단순히 적용해도 될 일상생활에서의 확률이 복잡한 구조로 확대된 공간에서 파악해야 한다.

그림의 방법은 일상적인 문제 상황에서의 확률적인 판단과정의 기술이라고 보기에는 어렵다. 여전히 직관적인 개념과 형식적인 정의 사이에 인지적 갈등은 독립성이라는 한 가지 주제의 접근방식이 유형●과 같이 형식적으로는 타당하나 직관적으로 수용하기 어렵거나, 유형●, ●과 같이 직관적으로는 판단하기가 수월하나 형식적으로 구성하기에 복잡한 경우의 대립에 의해 계속적으로 발생한다.

독립, 종속에 대한 복잡한 형식적 증명과정은 집합기호가 확률의 내용을 표현하는데 있어서 엄밀한 것인가와 교사와 학생들이 집합의 기호와 확률의 언어를 어떠한 관점으로 연결해야 하는지에 관한 의문을 갖게 한다.

풀리지 않는 딜레마는 자연발생적인 독립의 직관적 개념이 왜 이렇게 확장되어버렸는가와 또한 형식적 엄밀함과 일관성을 유지하기 위해 발생적 순서와 역행하는 전개되는 과정이 올바른 것인가에 관한 것이다. 자연발생적 독립의 개념을 강조하려다 보면 집합기호의 사용에 대한 정당성을 잃게 되며 집합기호로 표현된 엄밀한 형식적 정의는 단순한 곱사건의 독립성을 더욱 복잡하고 확장된 구조 안에서 바라보도록 하는 어려움이 있다. 동시에 일어나는 시행(독립시행안의 각 사건)의 독립의 개념은 집합기호가 도입되기 전에 일상적으로 너무나 자연스러운 것이었다. 이것이 공리적 확률 체계의 표본공간, 사건, 측도 등의 지나친 형식적 적용으로 인해 <그림4>에서와 같이 집합기호로는 서로 다르게 표현되지만 같은 영역을 의미하고 있는 특수한 상황이 만들어졌으며 이는 확률이라는 특별한 측도에서만 일어나는 일치이며 이것이 직관으로부터 출발한 시행의 독립성이 사건의 독립성에까지 영향을 미친 결과로 이러한 혼란을 초래한 것이 아닐까 추측해본다.

V. 결 론

위의 연구 결과를 토대로 다음과 같은 몇 가지 결론을 내고자 한다. 첫째, 현행 교육과정에서 독립성에 관한 지도가 혼란을 일으키지 않기 위해서는 집합기호의 도입으로 인한 사건의 정체성의 변화를 명확히 반영하여야 한다. 사건의 용어는 [8-나]와 [수I]의 경우의 수에서도 나오고 있으나 사건의 정의는 [수I]의 확률에서 처음 나타난다. 사건과 표본공간을 정의하는 것은 확률을 집합기호로 표기하면서 이전에 바라보던 사건과 다른 모습으로 변하는 사건을 인식하게 한다. 즉, 직관적 접근 방법으로 인한 독립성의 자생적 발생의 배경과 함께 시작하되 집합기호로 표현되는 공리적 확률에 의한 독립성의 증명과정에서 사건의 변화를 인식하게 하며 이것이 형식적 접근 방법으로 자연스럽게 연결되는 과정을 통해 직관이 형성되지 않는 경우까지 확장된 문제를 자연스럽게 포함하는 형태의 접근방법이 타당하다고 본다.

둘째, 독립성의 증명을 시각화할 필요가 있다. 위에서 강조한 사건의 변화를 가장 쉽게 보여 줄 수 있는 것은 표본공간 전체를 모두 나타내고 그 부분집합으로서의 사건을 벤다이어그램으로 표현하는 방법이다. 이는 직관이 너무나 당연한 유형●에서 불필요한 조작처럼 보일 수 있으나 유형●의 이해에 일관적이며 긍정적인 영향을 줄 것이다. 그러나 지나치게 복잡한 형태의 종속관계의 시행에서 일어나는 사건이나 3차원으로 표현되는 표본공간의 시각화는 더욱 혼란만 일으킬 수 있으므로 적당한 표본공간에서의 두 사건의 독립이 유형●의 이해가 자연스럽게 연결될 수 있도록 일회적으로나마 제시함이 바람직하다. 표본공간이나 사건의 정의가 함께 제시되며 [8-나]

에서 두 시행에 각각 따로 예속된 사건을 따로 구분하여 보던 습관을 바꿀 수 있는 기회로 인해 집합 기호의 도입과 함께 사건을 형식적으로 다루는 과정을 통해 독립성의 전체적 아이디어를 얻게 되며 특별한 경우에 대한 혼란을 막을 것이다.

셋째, 위의 두 가지 결론은 자칫 독립성을 형식적으로만 다루도록 하고 있는 것 같아 보일 수도 있다. 그러나 이는 본 논문의 의도가 아니다. 위의 적용은 독립성의 전체적 아이디어를 통합하는 것에 목적이 있으며 위에서 제시한 방법 이전에 항상 독립성의 역사 발생적 메카니즘을 유지하는 형태의 전개가 우선되어야 하는 것에 동의한다. 그러나 주의할 것은 동전과 주사위는 독립성을 파악하는 데 역사 발생적 메카니즘을 형성하는 중요한 직관모델임을 확실하나 그것이 전체에 적용되지 못함을 확률측도에서의 특별한 구조의 파악을 통해 이루어져야 한다. 이에 독립성의 전개과정을 다음과 같은 순서로 구성할 것을 제안한다.

1단계 : 유형●와 같이 독립의 의미가 자연스러운 예를 제시하여 독립의 직관형성

2단계 : 두 사건을 모두 포함하는 하나의 표본공간을 시각화하여 하나의 측도에 의한 두 사건의 형식적 곱셈정리 구성

3단계 ; 유형●과 같이 직관이 자연스럽지 못한 예에서도 곱셈정리 적용

4단계 : 유형●에서도 확률의 상대적 비에 의한 형식 논리적 직관을 세우도록 지도

현행 교과서는 2단계가 빠져 있거나 사건을 정확히 바라 볼 수 있도록 제시하고 있지 않다.

예를 들어 간단히 두 주사위를 던져 첫 번째 눈이 1 이 나올 사건을 A, 두 번째 눈이 6 이 나올 사건을 B 라고 할 때 사건 A와 사건 B의 독립성은 직관적 접근이 가능하다. 이것은 시행의 독립성을 먼저 파악하는 직관적 접근 방법이다.

이를 좌표계에서 적집합의 전체 표본 안에서 사건 A 와 B를 벤다이어그램으로 표현하여 곱의 법칙을 유도한 후 유형●과 같은 사건의 독립성까지 모두 포괄하는 독립성의 개념을 확립하고 형식 논리적 직관을 형성할 수 있다.

2 단계는 형식 논리적 직관에 앞서 더 강하게 전체적 아이디어로서의 독립성을 제시할 수 있는 과정이다. 학생들에게 전체적 아이디어로서의 독립성에 대한 혼란을 가져오지 않게 하기 위해서는 표본공간과 사건을 정확하게 표현하여야 하며 이를 시각화하여 보여주는 것이 필요할 것으로 본다.

본 연구결과를 토대로 시행의 독립성의 출발이 사건의 독립성을 확립시키며 그것이 다시 시행의 독립성을 정의하는 기초가 될 수 있는 순환적인 구조를 쉽게 파악할 수 있는 많은 교수모델이 연구되기를 기대한다.

참 고 문 헌

강행고 외 8인 (2001). <u>중학교 수학 8-나</u>. (주)중앙교육진흥연구소.

김원경 외 7인 (2003), <u>고등학교 확률과 통계</u>. 교육인적자원부.

김원경 외 7인 (2003), <u>고등학교 확률과 통계 교사용 지도서</u>. 교육인적자원부.

김종우, 김우철 (1987). <u>확률론 입문</u>. 영지문화사.

우정호 (1998). <u>학교수학의 교육적 기초</u>. 서울: 서울대학교 출판부.

이정연 (2006). <u>조건부확률 개념의 이해에 관한 연구</u>. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

임재훈 외 9인 (2002). <u>고등학교 수학I</u>. (주)두산.

최기현 (2001). <u>확률론의 이해</u>. 자유아카데미

Beth, E. W. and Piaget, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*, Reidel, Dordrecht.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B.(2005). The Nature Of Chance And Probability. In G. A. Jones(Ed.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Springer, New York.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics* : an educational approach, Reidel, Dordrecht.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht-Holland: D Reidel Publishing Company.

Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology*, University of Alberta Mathematical Sciences Society.

Hadamard, J. (1949). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press, Princeton.

Kant, I. (1980), *Critique of Pure Reason*(Translated by N. K. Smith), The Macmillan Press Ltd., London.

Kolomogorov. A. N. (1956). *Theory of Probability* (Trnaslation edited by Vathan Morrison). Chelsea Publishing Company, New York.

Reuchlin, M. (1973). 'Formalisation et realisation dans la pansee naturelle: une hypothese', *Journal de Psychologie Mormale et Pathologique* 4, pp.379-408

Steinbring. H., (1991). The Theoretical Nature of Probability in the Classroom. In R. Kapadia and M. Borovenik (Eds.), *Chance Encounters : Probability in Education* (pp.135-167). London: Kluwer Acadeie Publisher.

Wild, K. W. (1938), *Intuition*, Cambridge, At the University Press.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J., & Green D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), pp.151-169

Independence in probability, The conflicts between its intuitive concept and formal definition

Cho, Chami
Dept. of Mathematics Education, Chonnam University Graduate School
E-mail: chami622@hanmail.net

Park, Jongyoull
Dept. of Mathematics Education, Chonnam University
E-mail: parkjy@chonnam.ac.kr

In highschool probability education, this study analyzed conflicts between intuitive concept and formal definition which originates from the process of establishing the concept of statistical independence. In judging independence, completely different types of problems requiring their own approach was analyzed by dividing them into two types. By doing so, this study researched a way to view independence as an overall idea. That is purposed to suggest a solution to a conflicts between intuitive concept and formal definition and to help not to judge independence out of wrong intuition. This study also suggests that calculation process which leads to precise perception of sample space and event be provided when we prove independence by expressing events with assembly symbols.

* ZDM Classification : K54
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90
* Key Words : Independence, Intuitive concept, Formal definition, multiplication rule