

독일 통일 이후 동·서독 중등학교 수학교육의 현황과 수학교과서의 비교 분석 및 이의 활용 방안 연구

정 환 옥 (한신대학교)

I. 머리말

남북이 분단 된지 60년이란 긴 시간이 흐른 지금, 사회 전반에 걸쳐 남·북한 간에 상호 이질화 현상이 심각하게 나타나고 있으며, 이는 곧 -비록 언제 맞게 될지는 모르지만- 통일이 되는 때에는 이로 인한 혼란이 엄청날 것임은 자명하다고 하겠다. 이러한 문제는 수학교육 분야에서도 예외는 아니어서, 수학교육의 목표, 교육제도나 교수방법, 수업용 교과서 또는 부교재, 학습용 기자재의 활용도 등 교육의 제반 영역에서 남·북한 사이에 심각한 차이를 보이고 있는데, 특히 교수학습과정에서 수업 내용의 범위 및 순서를 결정짓는 교육과정의 설정이나 교수활동 전반에 핵심적 영향을 미치는 남·북한 간의 교과서의 현격한 차이는 그 무엇보다도 우선적으로 극복해야할 과제임에 틀림이 없다.

과거 분단국이었던 독일은 약 18년 전 통일을 이루었고, 지금은 통일 이후의 제반 문제들이 상당부분 해결되었거나 또는 현재 해결 과정에 있음을 우리는 잘 알고 있다. 이는 곧, 이미 통일을 이룬 독일이 아직도 분단국으로 남아있는 우리에게 좋은 모델이 될 수 있다는 것이다. 특히 수학교육분야에서 볼 때, 교육 목표 및 방법의 차이, 교사들의 교육이념 및 교육철학적 차이, 교과서 및 부교재의 내용 및 난이도의 격차 등 수학교육 전반의 문제들을 극복함에 있어서

- 과거 통일 이전의 동·서독에서는 통일에 대비하여 어떤 준비를 해 왔으며,
- 준비한 내용들이 실제 적용하는 과정에서 어떤 문제점들이 나타났는가?
- 또 그들은 그러한 문제점들에 대하여 어떻게 대처하고 해결하였는가?

등의 통일 이후의 제반 문제들을 심도 있게 비교 분석하는 것은 우리에게 매우 절실한 과제가 아닐 수 없다.

1990년 독일은 통일을 이룬 이후 수학교육을 비롯한 교육 영역 전반에 걸쳐 분단 이전의 상황은 물론, 통일 과정에서 현재에 이르기까지의 제반 사항에 대하여 지속적인 연구를 계속하고 있다. 물론 이러한 통일 이후에 대한 연구 분석은 비단 교육 영역뿐 아니라 사회 전반에 걸쳐 계속되고 있는데, 이러한 연구는 단지 지난 과거에 대한 역사적 고찰의 차원을 넘어서서, 현재까지도 남아 있는 동·서독 간의 통일 후유증을 해결하는데 중요한 밑거름의 역할을 하고 있는 것이다.

반면에 우리 남·북한의 현실은 어떠한가? 우리 한국의 경우만 보더라도 이러한 독일에서 발표되어지는 각종 교육관련 연구물들이 우리 수학교육학계에 보고되거나 우리 미래의 문제와 비교 되어지는 것은 차차하고 지금껏 별다른 관심조차도 갖고 있지 않았던 것이 사실이다.

<그림 1>에서 보듯이, 수학교육에 대하여 옛 동·서독간의 비교연구(단지 독일 내에서)나 한국과 북한과의 비교 연구는 그런대로 활발하게 진행되고 있는 반면, 동독과 북한과의 비교는 둘째치고라도 한국과 서독(통일 독일) 사이의 비교 연구조차 현재까지 단 2편의 논문뿐으로 매우 부진한 실정이라 아니할 수 없다.

* 2008년 7월 투고, 2008년 8월 심사 완료.

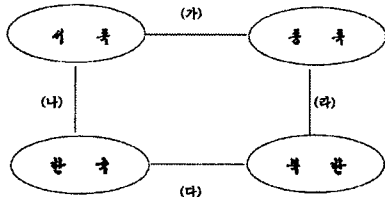
* "이 논문은 2007년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임"

(KRF-2007-013-C00001)

* JDM분류 : D13, B73

* MSC2000분류 : 97B70, 97D10, 97U20

* 주제어 : 동독의 수학교육, 동서독 수학교과서 비교, 동서독과 남북한의 수학교과서



- (가) 현재 독일 내에서 연구가 진행되고 있음 [(Bruder 2003), (Griesel, 2003) 의 여러 편.]
- (나) 논문 (노정학·양춘우·정환옥, 2003) 등 2편.
- (다) 논문 (박경미, 1995), (김삼태·1999) 의 여러 편.
- (라) 전무함.

<그림 1> 동·서독 및 남·북한 관련 논문

본 연구는 이 절실한 과제를 해결하기 위한 첫 시발점으로 다음의 네 가지 핵심주제에 초점을 맞추어 비교 분석하였다.

- 옛 동독의 교육체계 및 교육과정, 수학교육의 목표 및 수학교육과정 등 교육 전반에 대한 현황 및 내용 분석¹⁾,
- 독일통일 이전의 통합 준비과정, 통합정책의 성격, 통일조약 등 통일 전후의 교육영역 통합 과정,
- 남·북한 및 동·서독 사이의 수학교과서에 대한 비교 및 앞으로의 연구과제,
- 동·서독 사이의 수학교과서에 대한 심층 비교 분석.

특히 본 연구의 핵심과제 중 하나인 교과서에 대한 비교 연구는, 학교 교육과정의 지표이자 제반 학습활동의 방향 설정에 필수적 도구가 되는 양독 수학교과서의 대수영역에 대하여, 학습내용의 범위와 조직, 특히 단원별로 이슈가 될 수 있는 핵심적 내용에 대한 양국 사이의 접근 및 해결 방법 등에 초점을 맞추어 비교 분석하였다. 한편 이러한 쟁점사항들은 남한이나 북한 교과서에서는 동·서독의 경우와 비교할 때 어떤 차이점이 있으며, 또 이를 어떤 방식으로 유도 해결하는지에 대해 함께 비교 연구하였다.

참고로 본 논문을 이해하는데 감안되어야 할 몇 가지 사항을 부연하면 다음과 같다.

1) 이에 상응하는 옛 서독의 대한 제반 자료는 -통일이 된 이후에도 큰 변화가 없는 관계로- 현 독일에 대한 비교연구 논문 (노정학·양춘우·정환옥, 2003)을 참고하기 바란다.

첫째, 우리는 교과 내용을 비교 분석(단원 VI)하는 과정에서 -다른 여타 비교논문과 마찬가지로- 단지 동·서독 수학교과서의 내용이나 유도과정, 방법 등의 차이점에 대한 심층 분석에 초점을 맞추었을 뿐, 그의 장단점에 대하여는 가급적 언급을 피하였다. 그 이유는 수학교육학적 이론이나 또는 수학교육학자의 개인적 지론에 따라 판단이 다를 수 있는 점과, 다른 한편으로 이 차이에 대한 분석들은 현재 연구가 진행 중이거나 또는 우리가 앞으로 연구해야 할 과제이기 때문이다.

둘째, 동·서독과 남·북한 사이에는 역사적 또는 지역적인 차원에서 현격한 차이를 내포하고 있는 것이 현실이며, 따라서 우리가 동·서독 문제에 대한 연구결과를 남·북한의 문제에 직접 적용시키기 위해서는 이러한 양국 간의 역사 및 지역적 차이가 충분히 감안되어야 할 것이다.

셋째로는 분석 주체의 선별 문제이다. 본 논문의 주제가 동·서독 간의 중등학교(7, 8, 9, 10학년) 수학교과서의 비교 분석임을 감안, 양국의 중학교 교과과정에 공통적인 부분, 특히 비교의 초점이 될 수 있는 쟁점부분만을 선별하여 심층적으로 분석하였으며, 그 외의 내용들에 대하여는 제외되었거나 아니면 적어도 가벼운 정도의 수준으로 비교 설명하였다.

II. 연구의 내용 및 방법

1. 연구 대상

연구 대상의 근간이 되는 수학교과서의 경우, 연구의 시기가 독일 통일 전후의 수학교육이라는 시대적 상황을 감안하여, 옛 동독은 물론 서독의 경우 역시 통일 이전 사용되었던 옛 서독 수학교과서를 선택하였다. 현재의 북한과 마찬가지로, 당시 동독의 경우는 전국적으로 통일된 국정 교과서가 사용된데 반하여, 서독의 경우는 특별히 여러 형태의 교과서가 사용되었다. 여기서 우리는 특히 독일 분단의 현실감을 더욱 부각시키기 위하여 서독의 경우는 그 당시 분단의 현상이었던 서베를린주의 수학 검인정 교과서를 선택하였다. 한편 통일 이후의 경우는 통일 직후 양독의 수학자들에 의해 제작된 통합 교과서와 더불어, 독일(특히 옛 동독지역)에서 현재 사용되고 있는 수학교과서를 병행하여 비교 분석하였다.

북한의 경우는 현재의 국정 교과서를 사용한 반면, 한국의 경우는 지금 학교 현장에서 사용되어지고 있는 교과서 중 하나를 선택하여 비교 연구하였다.

(1) 동·서독 수학교과서

- 동독 (통일 전)

Mathematik, Lehrbuch für Klassen 7, 8, 9, 10, Volk und Wissen, Berlin, 1985.

- 서독 (통일 전, 베를린 지역)

Mathematik für die Sekundarstufe I, 7, 8, 9, 10 Schuljahr; H. Schütz & B. Wurl, 저, Schroedel Schulbuchverlag, 1985.

- 독일 통일 직후 (베를린 지역)

Mathematik, Lehrbuch Klasse 7, 8, 9, 10; W. Schulz & W. Stoye 저, Volk und Wissen Verlag, Berlin, 1993.

- 독일 현재 사용 (베를린 및 Meckenburg-Vorpommern주 지역)

Mathematik, Klasse 7, 8, 9, 10, Meckenburg-Vorpommern; W. Schulz & W. Stoye 저 (unter Mitarbeiter von S. Bluhm und U. Ziems), Volk und Wissen Verlag, Berlin, 2006.

(2) 남·북한 수학교과서

- 한국

중학교 수학 7-가, 8-가, 9-가, 박규홍 외 7인, 두레교육(주), 2002.

고등학교 수학 10-가, 박규홍 외 3인, 교학사, 2006.

- 북한

수학, 고등중학교 1, 2, 3, 4, 교육도서출판사, 주체 91 (2002).

참고로 동독의 수학교과서를 더 깊이 있게 이해 분석하기 위하여, 정규 교과서 이외에도 분단 당시의 교사용 교재였던 (Walsch & Weber, 1975), (Bittner & Ilse, 1971)와 그밖에 관련된 논문 (Dieter, 1985), (Weber, 2003) 및 인터넷 사이트 [3], [4] 등을 참조하였다.

2. 연구 내용

금번 방문연구의 주안점은 옛 동독의 교육 및 수학교

육에 대한 전반적인 현황을 파악 분석하는 것과 더불어, 통일 전후 교육영역의 통합 과정, 남·북한 및 동·서독 수학교과서 비교 및 연구 과제, 동·서독 간의 수학교과서 비교 연구 등이다. 이 네 가지 연구 테마에 대한 구체적인 연구 내용을 정리하면 다음과 같다.

(1) 동독의 교육 및 수학교육의 현황

- 통일 이전 동독의 교육체제는 어떠한가, 각 종류의 학교에서는 어떤 교육목표와 특징을 지니고 있었는가?

- 동독의 초중등학교 교육기관이었던 10년 과정의 폴리텍학교(이하 POS)의 7-9학년 교과과정은 구체적으로 어떠한가, 또 어떤 특징을 가지고 있었는가?

- 동독 POS의 수학교육의 목표는 어떠한가?

- 동독 POS 7-10학년의 수학교육과정 및 학년별 교과내용은 어떠한가?

(2) 독일 통일 전후 교육영역의 통합 과정

- 독일 통일 이전, 동독과 서독에서는 통일을 대비하여 교육영역에 대하여 어떤 준비를 했는가?

- 교육영역 통합과정은 어떠한가, 그 내용 및 결과는 어떠한가?

- 교육영역의 통합 정책의 성격은 어떠한가?

- 통일조약 중 교육영역에 나타난 내용은 무엇인가?

- 수학교육 영역, 특히 교과서 통합의 과정은 어떠한가, 그 결과는 어떠한가?

(3) 남·북한 및 동·서독 수학교과서 비교 및 연구 과제

- 통일 이전의 동독, 서독, 남한, 북한 등 4개국의 수학교과서 사이에는 어떤 외형적 또는 내재적 공통점 및 차이점이 있는가?

- 독일(동·서독)과 한국(남·북한) 수학교과서 사이에는 어떤 공통점과 차이점이 있는가?

- 위의 차이점의 원인은 어디에 있으며, 또 어떤 장점과 단점이 있는가?

- 동·서독 수학교과서 사이에 나타난 차이점은 각각 통일 이후 어떤 결과로 통합되었는가?

- 위의 비교 분석에 대한 우리의 과제와 그의 대처 방안은 무엇인가?

(4) 교과서 내용별 심층 비교 분석

- 동·서독 수학교과서의 비교와 남·북한 교과서의 비교에는 어떤 차이점을 발견할 수 있었는가?
- 당시 공산주의 체제였던 구동독과 현재까지도 공산체제를 유지하고 있는 북한 교과서 사이에는 어떤 공통점 및 차이점이 발견되었는가?
- 동·서독 및 남·북한 수학교과서 사이에는 어떤 기호 또는 용어에서 차이를 보이고 있는가?
- 음수의 곱셈이나 무리수의 도입 등의 새로운 수의 체계나 연산을 설명하는 과정에서 나타난 차이점은 무엇인가?
- 동·서독 교과서에서는 방정식과 함수 중 어느 것을 먼저 도입하고 있는가? 또 이의 장단점은 무엇인가?
- 학생들에게 가장 난해하다고 생각되는 근의 존재 여부 또는 근의 개수, 근의 공식 등을 도입 설명하는 과정에서 양국 사이에는 어떤 차이를 보이고 있는가?

3. 연구 절차

본 연구는 다음의 절차에 의해 수행되었다.

(1) 자료 수집 : 동·서독 교과서의 경우는 필자가 2007년에 약 6개월간 독일에 체류하면서 수집하였는데, 특히 당시 동독에서 사용되었던 교과서나 참고서, 당시의 논문 및 보고서, 교사용 교재 등을 구입하는 데는 Berlin-Humboldt 대학의 Schulz 교수, Halle-Wittenberg 대학의 Herget 교수, Dortmund 대학의 Prediger 교수의 도움이 컸다. 한편 북한 교과서의 경우는 통일부 산하의 <북한자료센터>의 협조로 확보할 수 있었다.

(2) 자료의 비교 분석 : 수집된 자료에 대하여 종합적으로 심층 분석하였으며, 특히 다음의 사항에 주안점을 두었다.

- 구동독의 교육체계, 특히 10년제 의무 교육기관이었던 POS 및 우리의 인문계 고등학교와 유사한 EOS의 교육 내용
- 지금까지 발표된 동·서독 및 남·북한 수학교과서 비교 논문에 대한 고찰 및 분석.
- 통일 전후의 교육영역 통합과정
- 통일 직후 <통일조약>에 나타난 교육영역 관련 내용

- 각 단원별 교과내용에 대한 비교 분석
- 용어나 정리를 도입하는 과정에서 나타나는 차이점. (남·북한 교과서의 비교)
- 본 비교논문의 활용 문제, 특히 앞으로의 남·북한 교과서 통합에의 적용 가능성.

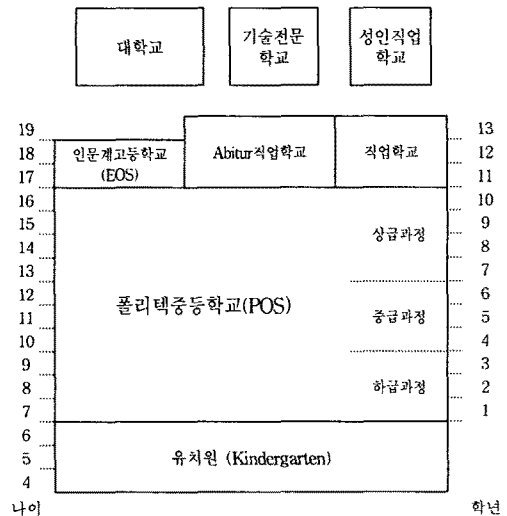
III. 동독의 교육 및 수학교육 현황

1. 동독의 교육체계

① 패전 이후 소련의 지배체제하에 있던 동독은, 1946년에 다음과 같은 단일교육체제를 구축하였다.

- 8년 과정의 초등학교(Grundschule),
- 4년 과정의 중등학교(Oberschule); 대다수는 실업 및 기능교육이며, 단지 일부만 대학입학 자격시험(Abitur) 준비.
- 2-3년 과정의 직업학교(Berufsschule) 또는 4-5년 과정의 대학교육(Universität).

그 이후, 몇 차례의 부분적인 조정을 거쳐 1959년에 아래 표와 같은 교육체계가 완성되어, 1990년 통일이 될 때까지 계속 유지되었다. (이와 관련된 구체적인 내용은 (Birbaum, 2003)이나 인터넷 [3] 참조 바람.)



<그림 2> 동독의 교육체계

[자료 출처 : (Birbaum, 2003)]

② 만 6세가 되면 폴리텍중등학교²⁾(POS로 표기)에서 사실상 우리의 초등학교와 중학교 과정이 합쳐진 10년 과정의 교육을 받았으며, 이 과정은 내부적으로 하급(3년), 중급(3년), 상급과정(4년)으로 구분되어 있었다. POS를 마치면 우리의 고등학교 과정에 준하는 인문계 고등학교³⁾(이하 EOS로 표기), Abitur직업학교⁴⁾ 또는 일반 직업학교(Berufsschule) 등을 이수한 후, 대학 혹은 정식 성인교육(Erwachsenenbildung), 기술전문학교(Ingenieur- und Fachschule) 등의 전문교육을 받게 된다. 특히 1965년 이후, 모든 사람은 10년 과정의 POS를 비롯하여 2년 이상의 인문계 또는 직업관련 학교를 포함, 총 12년 이상의 교육을 의무적으로 받도록 하였다.

③ EOS를 마친 학생은 거의 모두 대학에 진학하며, Abitur직업학교의 경우는 개인별 능력에 따라 대학에 진학하거나 기술전문학교에 입학한다. 직업학교를 마친 학생의 대부분은 성인직업학교에서 전문적인 직업교육을 받게 되지만, 일부는 기술전문학교에 진학하기도 한다. 기술전문학교를 이수한 학생 중 일부는 다시 대학에 진학하는 경우도 있다.

④ 10년 과정의 POS에서는 통일된 교과서는 물론, 교육과정이나 교육내용면에서도 -단지 학년별 개인에 따라 주 2-3시간 정도의 선택의 여지를 두었을 뿐- 사실상 모든 학교가 거의 차이가 없었다. 이는 지역적 특성이나 학력별 수준 차이, 개개인의 관심이나 특성을 전혀 고려하지 않은 거의 일관된 교육이었음을 의미한다.

⑤ POS를 졸업한 학생들 중 가장 우수한 학생들이 진학하는 EOS에서는, 고전언어분야, 현대언어분야, 수학 및 자연과학분야 등 3가지 분야 중 어느 하나를 선택하여 그 분야를 더 심도 있게 공부하도록 하였다. (그런데 실제로는 대다수(약 %정도)의 학생들은 수학 및 자연과학분야를 선택하였다고 함.) 그러나 -우리나라의 영어, 수학, 국어와 유사하게- 어느 분야에서든 수학, 독일어, 외국어(러시아어)는 주요 과목으로 자리매김하고 있었다.

2. 동독의 교과과정

동독의 교과과정 및 교과별 교육과정을 실제로 결정하는 공식적 기구는 APW⁵⁾이었으나, 교육정책에 대한 큰 틀의 방향은 APW뿐 아니라, 대학의 전문교수 및 현직교사, 교육부처의 교육행정가 등으로 구성된 별도의 위원회를 통하여 결정되었다.

<표 1>은 POS의 7-10학년까지의 교과과정을 보여주는데, 특히 주목할 것은 수학(18%)를 비롯한 자연과학(30%)의 비중이 상대적으로 매우 높은 것을 볼 수 있다. 특히 대학진학을 위한 Abitur 시험에서는 문과와 이과를 통틀어 독일어와 수학, 러시아어가 필수이며, 또한 자연과학 중 한 과목 역시 선택필수였다.

<표 1> 동독의 교과과정⁶⁾

(자료 출처 : Internet [2])

과 목	7학년	8학년	9학년	10학년
국어(독일어)	5	5	4	3
러시아어(제1외국어)	3	3	3	3
수학	6	4	5	4
물리	2	2	3	3
천문학				1
화학	2	4	2	2
생물학	1	2	2	2
지리	2	2	1	2
역사	2	2	2	2
사회	1	1	1	2
미술	1	1	1	
음악	1	1	1	1
체육	2	2	2	2
폴리텍교육 ⁷⁾	4	4	5	5
생산성교육 ⁸⁾ (선택)	(2)	(2)	(3)	(3)
계	32(+2)	33(+2)	32(+3)	32(+3)

- 2) 공식 명칭은 'Allgemeinbildende Polytechnische Oberschule' (약칭: POS): 직역하면 '일반교육 폴리텍 중등학교'.
 3) 공식 명칭은 'Erweiterte Oberschule' (약칭: EOS): 직역하면 '확장된 중등학교'이지만, 내용상 우리의 인문계고등학교와 유사함.
 4) 공식 명칭은 'Berufsausbildung mit Abitur'.

- 5) APW(=Akademie der Pädagogischen Wissenschaften: 교육학 아카데미): 우리나라의 교육개발원과 유사하게 교육정책을 입안하는 동독 정부의 연구소. 1970년 이전까지는 DPZI(=Deutsches Pädagogisches Zentralinstitut)라 칭하였음.
 6) 1학년부터 6학년까지의 교과과정은 인터넷 ([1] 또는 [2])에서 볼 수 있음.
 7) 폴리텍교육(Polytechnische Bildung): 칼 맑스의 경제이론을 기반으로 정치, 경제, 사회 등의 전반적인 공산주의 이론 교육.
 8) 7학년부터 제2외국어(대부분 영어 또는 불어를 선택), 9-10학년에서는 수학, 기술, 자연과학, 사회학, 예술 중 한 과목

3. 동독의 수학교육 목표

동독 POS의 수학교육의 목표에 대하여는 (Walsch & Weber, 1989)의 제1장 또는 (Franke, 1988)의 146쪽 이하에 상세히 서술되어 있는데, 이를 요약하면 다음과 같다.

- 수학의 기초적 내용인 정의, 정리, 법칙, 방법, 절차에 대한 견고한 지식을 습득시킴으로, 이를 토대로 수학의 내적 또는 외적인 과제들을 해결할 수 있는 능력을 배양하며,
- 이러한 수학적 지식과 능력을 바탕으로, 삶에서 부딪힐 수 있는 여러 상황에 대한 판단력이나 응용능력, 나아가서는 삶의 가치관이나 철학을 설정하는데 이르기까지 모든 영역에서의 상황에 적절히 대처할 수 있는 능력을 배양한다.

이러한 목표를 실현시키기 위한 실행 원칙으로 다음을 두고 있다.

- 수학교육은 과학적 사고를 토대로 이루어져야 하고,
- 수학교육은 서술능력, 판단력, 증명법, 수학기호 및 용어의 사용과 같은 '수학적' 능력을 배양시키는데 초점을 두어야 하며,
- 수학에서 익혀진 이론이나 지식들은 수학의 내적 및 외적 문제에 적용시키고 활용할 수 있는 능력 배양에 중점을 두어 교육하여야 한다.

4. 동독의 수학과 교육과정(7-10학년)

다음의 내용은 동독 교육부 산하의 중등교육심의위원회⁹⁾에서 공식적으로 발간된 <Lehrplan Mathematik (수학과 교육과정)> (Ministrium für Volksbildung, 1987)에 명시된 폴리텍중등학교(POS) 7-10학년¹⁰⁾의 수학과 교과별 이수 내용이다. 이 책에 명시된 항목별 구체적 교육 내용은 지면관계상 생략한다. (괄호 안에 제시된 숫자는

을 선택하여 심층 공부.

9) Ministerrat der Deutschen Demokratischen Republik, Ministrium für Volksbildung.

10) POS가 10학년 과정인 관계로 10학년을 포함하여 제시하였다.

이수에 필요한 총 시간 수이다.) 참고로 학년별 총 이수 시간에 차이가 있는 것은 <표 1>에서 보듯이 수학 교과목의 학년별 주당 수업시간이 다르기 때문이다. 한 가지 눈에 띄는 것은 학년에 따라 대수 및 기하 영역의 편차가 대단히 심한 것을 볼 수 있다.

7학년 (대수영역 109시간/ 기하영역 71시간)

- (1) 전자계산기; 비례식의 활용 (38시간)
 - 전자계산기의 사용법 및 비례식의 활용 (15)¹¹⁾
 - 퍼센트 계산 (23)
- (2) 유리수 (37시간)
 - 유리수의 정의 (3)
 - 유리수의 크기 비교 (4)
 - 유리수의 덧셈과 뺄셈 (10)
 - 전자계산기를 통한 계산 (3)
 - 근사값과 오차의 기초 (3)
 - 여러 가지 연습문제 (6)
- (3) 방정식 (21시간)
 - 동치인 방정식 (6)
 - 방정식과 부등식의 해법 (15)
- (4) 제곱과 제곱근 (13시간)
 - 제곱 (3)
 - 제곱근 (6)
 - 여러 가지 연습문제 (4)
- (5) 화법기하학 (30시간)
 - 사영의 개념, 사영의 형태, 평면사영 (5)
 - 직교일차사영 (9)
 - 직교이차사영 (11)
 - 여러 가지 연습문제 (5)
- (6) 원 (29시간)
 - 원의 정의, 원에서의 여러 가지 정리 (16)
 - 원에서의 여러 계산 (6)
 - 여러 가지 연습문제 (7)
- (7) 입체기하학 (12시간)
 - 뿔과 기둥 (7)
 - 여러 가지 연습문제 (5)

11) 괄호 안은 시간 수.

8학년 (대수영역 47시간/ 기하영역 73시간)

- (1) 문자식의 계산 (20시간)
 - 문자식 표현의 기초 (5)
 - 문자식의 여러 가지 연산 (15)
- (2) 도형의 답음 (52시간)
 - 도형의 답음 (17)
 - 답은 도형 (14)
 - 피타고라스의 정리 (13)
 - 여러 가지 연습문제 (8)
- (3) 일차함수 (27시간)
 - 함수의 정의 (4)
 - 일차함수 (7)
 - 일차함수의 x 절편; 일차방정식 (3)
 - 일차방정식의 해법 (8)
 - 여러 가지 연습문제 (5)
- (4) 입체도형 (21시간)
 - 복습: 입체도형, 기둥과 뿔 (5)
 - 피라미드 (5)
 - 원뿔 (3)
 - 구 (4)
 - 여러 가지 연습문제 (4)

9학년 (대수영역 130시간/ 기하영역 20시간)

- (1) 문자식의 계산 (45시간)
 - 단항식과 다항식, 분수식의 계산 (12)
 - 다항식의 전개 (15)
 - 지수의 계산; 지수법칙 (18)
- (2) 부등식과 연립방정식 (30시간)
 - 일차부등식 (12)
 - 연립방정식 (13)
 - 여러 가지 연습문제 (5)
- (3) 이차함수; 이차방정식; 지수함수 (55시간)
 - 이차함수 (12)
 - 이차방정식 (23)
 - 지수함수 (10)
 - 여러 가지 연습문제 (10)
- (4) 입체도형의 표현, 입체도형의 계산 (20시간)

- 복습과 보충 (9)
- 여러 도형의 계산 및 표현, 연습문제 (11)

10학년 (대수영역 41시간)

- (1) 삼각함수¹²⁾ (24시간)
 - 함수 $y = \sin x$ (12)
 - 코사인 함수와 탄젠트 함수 (12)
- (2) 삼각함수의 활용 (36시간)
 - 직각삼각형에의 활용 (12)
 - 임의의 사각형에의 활용 (14)
 - 여러 가지 연습문제 (10)
- (3) 문자식의 계산, 방정식과 함수 (30시간)
 - (복습, 체계화 및 보충)
 - 문자식의 계산, 방정식과 부등식 (10)
 - 함수의 활용, 지수함수 (20)
- (4) 여러 가지 연습문제; 총정리 (11시간¹³⁾)

IV. 독일 통일 전후 교육영역의 통합 과정

통일독일은 16개 주(Land)로 나누어진 연방국가로서, 통일조약의 규정에 의해 중등교육과정의 결정권한은 주 정부가 가지고 있으며, 따라서 연방정부내의 교육부(BMBW¹⁴⁾)는 교육과정 결정에 영향력을 행사하지 않는다. 그러나 통일 이후, 교육의 일반체제나 교육기관, 교육과정, 졸업 자격 등을 상호 조정하기 위한 목적으로 구동독을 포함한 각 주들은 '주 교육장관 협의회(KMK¹⁵⁾'라는 자발적인 기구를 조직하여, 분단이후 격리되었던 동·서독 간의 교육영역 전반에 대한 통일화 작업을 수행하였다. 이 기구는 현재까지도 운영되고 있는데, 이 기구를 통하여 각 주의 학교 교육과정에 대한 일반적 지침을 '협약'의 형태로 제시됨으로, 연방정부 전체의 교육의 동질성을 확보해 주고 있다. 참고로 본 연구에서는 단지 교육영역 전반에 대한 통일 전후의 통합 과정에 대

12) 당시 동독에서는 삼각함수를 대수영역으로 포함시켰음.
 13) 총 22시간이나 대수와 기하영역을 총괄한 것이므로, 그의 절반 시간임.
 14) Bundesministeriums für Bildung und Wissenschaft의 약어
 15) Kultusminister Konferenz의 약어

하여만 다루었을 뿐, 구체적인 수학교과서의 통합과정에 대하여는 자료수집의 어려움으로 생략하였다.

1. 통일 직전 교육 통합의 준비 및 과정

통일 직전이었던 1990년 5월 21일, 독일 통일과정에 서 발생하는 제반 교육부문 문제를 신속하게 해결하기 위하여 서독의 연방정부 및 주정부에 의해 <양독 교육 위원회>가 조직되었다. 양측 동수로 구성된 이 위원회는 양국의 교육체제 및 교육과정 통합 문제, 교사의 재교육, 교과서 통합문제 등의 초·중등교육 전반에 대한 의견권, 협력조치권 등이 부여되었다. 이를 위하여 일정기간에 걸쳐 양국의 교육관련 학자들이 서로 상대방 국가를 방문하여, 당시의 교육현실에 대한 자료 수집 및 분석, 나아가서는 그에 대한 대책 등에 대해 집중 연구 검토하였다. 동·서독 교육부장관과 각 주의 고위직 교육관련 공무원이 참석하는 이 위원회에서는, 구동독의 교육 전반에 대한 현황 분석 및 지원방법에 대한 논의가 주를 이루었으며, 특히 당시 서독 교육부장관이었던 Möllemann은 구동독의 장관 Meyer에게 동독 학생들의 영어교육¹⁶⁾의 수준을 향상시키기 위하여 10만 달러의 예산을 지원할 것을 약속하였다. 한편 1990년 6월 21일, 동베를린 의회 회의실에서는 동·서독 교육관련 전문가 300명이 참가하여, 교육통일의 핵심적 역할을 맡게 되는 동독 교사의 자격강화 방안을 논의하였는데, 이 자리에서 당시 서독 교육부장관이었던 Möllemann은 경직된 동독의 노동시장을 감안하여 교사의 면직에 앞서, 계속교육(Weiterbildung)의 중요성을 역설하였다.

<양독 교육부> 산하의 학술위원회(Wissenschaftsrat)에서는 통일에 대비하여 동독에서 사전에 준비해야 할 10가지 항목을 제시하였는데, 그 내용은 다음과 같다.

- 상호교류 및 협력 문제
- 양국의 고등교육기관에 대한 논의
- 동독학생들의 서독으로의 전학 문제
- 교과목의 재편 문제
- 방송통신교육의 확장 문제
- 교사 및 교수 채용 및 양성 문제

16) 당시 동독의 제1외국어는 '러시아어'였으며, 영어는 제2외국어의 한 과목으로 그 비중이 매우 미약하였다.

- 연구비 및 연구조건의 개선 문제
- 서독 학문의 동독으로의 개방 문제
- 동독 학자 및 연구원에 대한 배려 문제
- 동독 학술원을 비롯한 교육관련 연구기관 의 재편성 문제

2. 교육 통합 정책의 성격

서독정부는 독일통일 이후 동·서독 교류의 전반을 주도적으로 이끌었는데, 특히 교육내용상 정치적으로 덜 민감했던 사회, 문화, 예술, 교육 등의 통합을 우선적으로 추진하였다. 한편 정치적으로 민감했던 정치문제나 경제, 국제문제 등에 대하여는 내부적으로 간접적 교육을 통하여 점진적인 방법으로 유도하였는데, 이러한 교육정책은 통일 후 구동독 지역의 국민들에 대한 심리적 동화정책의 토대를 이루는 것이었다.

교육통합의 모습만을 본다면, 대체로는 서독의 것을 그대로 적용시키는 경우가 있는가 하면, 이를 다시 부분적으로 수정해서 적용시킨 경우도 있었다. 이와 같이 서독의 교육제도를 거의 그대로 적용시키는 것이 가능했던 까닭은, 장기간의 분단에도 불구하고 통일조약 이전에 이미 동독 국민들은 서독의 교육제도에 대하여 이미 많은 정보를 가지고 있었다는 점과, 또 이로 인하여 동독의 국민들은 서독의 교육제도로의 변화를 강력히 희망했다는 데 그 원인이 있었다. 그럼에도 불구하고 장기간 분단으로 인해 남아있던 구동독 지역의 주민의식 혼란, 교육시설의 낙후, 마르크스 레닌주의에 치우쳐 있던 교육내용 등, 또 이로 인한 사상의 편향성과 질 문제, 교육종사자들의 이데올로기 의식, 고등교육과 연구개발 환경의 낙후성 등에 오랜 시간과 막대한 예산이 큰 과제로 대두되었다.

3. 통일조약의 교육관련 내용

통일조약의 교육관련 내용은 조약 제8장 문화, 교육, 학문 스포츠 영역의 제37조(초·중등교육)와 제38조(대학 및 학문연구, 교사교육 등)에 명시되어 있다. 그 내용의 핵심은 통일 후에 동독 내에서 발생할 것으로 예상되는 각 교육기관의 졸업자격 및 학위의 인정 문제, 교원

채용을 위한 시험과 그 절차, 견습직의 자격증, 학제 변경으로 발생하는 제 규정의 문제, 대학생들의 전학문제, 대학진학 자격문제 등의 제반 문제에 대하여 명시하고 있다. 특히 '양독 교육위원회'에서는 주로 통일 직후 학생들이 직면할 것으로 예상되는 문제들(졸업자격, 학위 인정문제, 전학, 진학, 직업교육 등)을 해결해 주는데 초점을 맞추었으며, 학교 제도 개혁은 장기적 관점에서 각주가 적절한 방식으로 추진하도록 맡겨 두었다. 이와 같이 학교 제도의 변경에 관한 사항을 통일조약에 명시하지 않고 각 주 단위로 결정토록 한 이유는, 본래 서독에서도 교육에 관한 사항은 연방의 소관이 아니고 주 정부의 소관사항이었기 때문이며, 따라서 통일 후 연방공화국으로 전환된 동독의 경우도 이에 준하여 적용하였기 때문이다. 한편 각급 학교의 졸업자격과 학위, 교원의 신규채용 절차를 통일조약에서 규정한 이유는 이러한 문제들이 학생들에게는 가장 절실하거나 당장 교육체제를 정비하는데 필수적인 사항들이기 때문이다.

통일조약에 대한 구체적인 내용은 그 내용의 방대함 뿐 아니라, 본 연구의 핵심과제도 아닌 관계로 여기서는 생략하겠다. 상세한 내용을 원하는 경우는 (이시우·허경, 1995) 또는 인터넷사이트¹⁷⁾를 참고하기 바란다.

V. 남·북한 및 동·서독 수학교과서 비교 및 연구 과제

1. 남·북한 및 동·서독 수학교과서 비교분석

구동독 수학교과서를 서독의 교과서와 비교하는 과정에서, 북한과 오랜 기간 단절되어왔던 우리에게 상식적으로 잘 납득하기 어려운 두 가지 사항이 발견되었다. 그 중 하나는 수학 용어나 기호상의 차이가 동·서독 교과서 사이에 거의 발견되지 않았다는 것이요, 다른 하나는 동독 교과서에 나타난 예문이나 응용문제에 정치색을 띤 서술들이 거의 없었다는 것이다.

먼저 첫 번째의 경우를 보자. 남·북한의 경우, 예를 들어 비교논문 (김삼태·이식, 1999), (박경미, 1995) 또는 (현진오·강태석, 1999) 등에서 보듯이 수학 용어나 기호의 표현에서 한국과 북한 사이에는 엄청난 차이가

있음을 우리는 잘 알고 있다. 그렇다면 동독과 서독 사이에는 왜 차이가 거의 없는 것인가? 이에 대한 원인으로 우선 생각할 수 있는 것은 학문의 역사의 차이에서 찾을 수 있다. 즉 독일의 경우는 분단되기 이전, 다시 말해서 제2차 세계대전 이전부터 수학의 전 분야에서 이미 상당히 발전되어 있었으며, 따라서 동·서독 간에 용어나 기호상의 차이가 분단이전 이미 대부분 정립되어져 있었던데 반하여, 우리의 경우는 분단되기 이전, 즉 일제시대 까지도 수학의 학문적 수준이 매우 미약했다는 점을 들 수 있을 것이다. 그럼에도 불구하고 45년이란 긴 분단기간 동안 이렇게 거의 완벽하고 통일된 수학용어와 기호를 사용하고 있다는 것은, 분단 상황에서도 동·서독 수학자들 간에 상호 끊임없는 교류를 통하여 수학교육, 특히 수학 용어의 통일에 심혈을 기울여 왔음을 우리는 감지할 수 있었다.

두 번째 포인트 역시 우리가 눈여겨 볼 점이다. 매학년 교과서마다 '경외하는 수령 김일성 대원수님께서는...' 등의 머리말로 시작해서 '위대한 영도자 김정일 원수님께서는...(69쪽, 연습문제 18, 고등중 1)' 또는 '남조선의 애국 적소년¹⁸⁾들이 미제침략자들을 반대하는...(42쪽, 연습문제 5, 고등중 3)' 등 거의 모든 단원의 응용문제에 정치색을 띤 문제들을 상당부분 내포하고 있는 북한의 교과서와는 달리, 동독의 교과서에는 이러한 정치적 용어들이 거의 발견되지 않았다는 사실이다. 이는 곧, 우리의 분단 현실이 과거의 동·서독에 비해 얼마나 더 심각한 한가름 여실히 보여주고 있는 것이다¹⁹⁾.

위의 두 항목 이외에도, 남·북한 교과서에 비하여 동·서독 교과서에서 눈에 띄는 중요한 차이점은, -책의 분량과는 거의 무관하게²⁰⁾- 예제나 문제의 양이 현저하게 많이 제시되어 있으며 또한 난이도 역시 매우 다양하다는 것이다. 더욱이, 제시된 문제들은 대체로 관련된 그

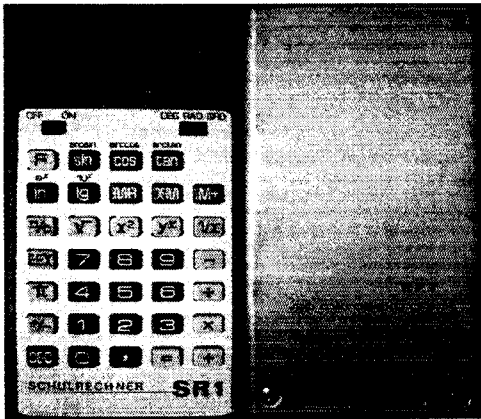
18) '청소년'의 북한 용어

19) 독일 역시 분단 초기에는 동·서독 간의 학문적 교류는 거의 단절되었다. 그러나 70년대 농방정책을 계기로 교류의 분위기가 싹트기 시작하여, 1986년 문화협정(W.T.Z)을 토대로 수학을 비롯한 과학 전반의 교류가 비교적 활발히 진행되었다.

20) 예를 들어 7학년 수학교과서 쪽수의 경우, 한국(288쪽), <7가>와 <7나>의 합), 북한(152쪽), 동독(176쪽), 서독(130쪽)이다. 참고로 북한이나 동·서독의 교과서는 우리와는 달리 대수와 기하부분이 통합되어 있다.

17) 예를 들면 <http://www.buzer.de/gesetz/2318/index.htm>

림이나 사진 등과 더불어 현실 속에서 부딪히는 실제적 문제들이 많았고, 따라서 수치들 역시 실제 측량한 값으로 예상되는 소수나 분수 등의 측정값들이 많이 내포되어 있었다. 이러한 이유 중 하나로는, 동독이나 서독에서는 한국이나 북한과는 달리 일찍부터 전자계산기를 허용하고 있는 것과 무관하지 않을 것으로 예상된다. 실제로 동독의 경우는 1984년 이후로 7학년부터 전국이 통일된 전자계산기 SR1(<그림 3>)를 도입하여 전 교과에서 일괄적으로 사용하여 왔으며, 서독의 경우 역시 대개 7학년 또는 8학년년부터 수업 중 전자계산기의 사용을 공식화하고 있었다.



<그림 3> SR1: 구동독의 통일된 전자계산기

참고로 <표 2>는 남·북한 및 동·서독의 교과서에 나타난 기호 표기의 차이의 일부이다. 앞에서 밝혔듯이, 수학의 용어나 기호 등에서 현저한 차이를 보이고 있는 남·북한과는 달리, 동·서독 교과서에는 거의 차이점을 찾기가 힘들었다. 실제로 용어상에서는 전혀 차이점이 없었으며, 단지 기호 상에서만 극히 부분적인 차이점을 발견할 수 있었다. 특히 이 표에서 주목할 것은, 함수의 표현에서 서독의 경우만 유일하게 y 대신 $f(x)$ 로 표현하고 있음을 볼 수 있는데, 이것은 x 와 y 의 관계를 나타내는 방정식의 개념보다는 오히려 함수의 개념을 강조하고 있음을 엿볼 수 있다.

<표 2> 동·서독 및 남·북한의 기호 비교

내 용	동 독	서 독	한 국	북 한
곱셈 / 나눗셈	· / :	· / :	× / ÷	× / ÷
좌표의 표현	$P(a; b)$	$P(a b)$	$P(a, b)$	$P(a, b)$
정수의 집합	Z	Z	Z	I
순환소수 (0.1232323... 의 경우)	0.123̄	0.123̄	0.123̄	0.1(23)
함수의 표현	$y = \dots$	$f(x) = \dots$	$y = \dots$	$y = \dots$

2. 비교 분석에 대한 앞으로의 연구 과제

옛 동독과 서독의 수학교과서 전반에 대한 비교 연구를 바탕으로 한, 앞으로의 우리의 연구과제는 다음의 두 가지 영역으로 대별(大別)할 수 있겠다. 하나는 위의 1절에서 지적되었던 남·북한과 동·서독 수학교과서 사이의 차이점에 대한 과제이며, 다른 하나는 다음의 단원 VI에서 심층적으로 분석하게 되는 옛 동독과 서독 교과서 사이의 내용이나 유도 및 전개방법에 대한 차이점, 또 이 문제들이 통일 후 단일(공통)교과서로 개편된 과정에 대하여 우리 남·북한의 문제와 관련하여 앞으로의 준비되어야 할 과제를 제시하는 것이다.

(1) 남·북한 및 동·서독 수학교과서

위의 1절에서 명시되었던 남·북한 교과서와 동·서독 교과서 사이에 나타난 핵심적 차이점은 다음의 세 가지였다.

- ① 남·북한 간에 수학 용어 및 기호의 차이.
- ② 북한 교과서의 예제나 연습문제에서 나타 난 정 치색 문제들
- ③ 예제나 문제들의 다양성 및 실용성 문제

우선 ①의 경우를 보자. 우리가 잘 아는 대로, 이러한 남·북한 간의 용어나 기호상의 차이는 비단 수학에서만 아니라, 학문 전 분야, 나아가서는 사회 전반에 걸친 중대한 사안임은 분명한 사실이다. 이는 다시 말해서, 이러

한 문제는 남·북한 상호간에 해결해야 할 매우 광범위하고도 중요한 사안이며, 따라서 이는 정치적 또는 정책적인 차원에서 해결될 문제이지 우리 수학교육에서는 어찌할 도리가 없는 문제로 생각할 수도 있다. 그러나 달리 본다면 과거의 독일의 경우를 거울삼아서, 이러한 국가적인 문제를 역으로 해결할 수도 있는 것이다. 즉 우선은 정치적인 색깔이 거의 없다고 볼 수 있는 수학을 비롯한 기초과학분야로부터 남·북한 간의 학술적 교류를 통하여 한 걸음씩 해결해 나감으로써 전 학문분야, 나아가서는 사회 전 분야의 용어 또는 언어의 통일을 이룰 수 있다는 것이다. 이러한 맥락에서 볼 때, 우리 수학자들의 역할 역시 매우 중대하다고 하겠다.

②의 경우, 남·북한 간의 국가적 체제와 밀접한 연관성을 내포하고 있다는 점에서 ①의 경우와 매우 유사하다. 그러나 이 문제는 ①의 경우와는 달리, 남·북한 학자들의 상호 교류를 통하는 방법보다는 거의 전적으로 정치적으로 해결해야 할 사안으로 사려된다.

이제 마지막으로 ③의 경우를 보자. 이 문제는 남·북한의 방법과 동·서독의 방법 중 어느 것이 더 바람직하다고 판단하는 것은 다소 무리가 따를 수도 있다. 다만 이 문제와 관련하여 차후 검토되어야 할 과제로서 다음의 세 가지 항목이 예상된다.

첫째로는 교과서의 외형적 향상 문제이다. 동·서독 교과서의 경우는 남·북한에 비해 훨씬 양질의 용지로 제작되어 있으며, 따라서 쪽수에 비해 얇은 두께, 원색 컬러의 사용이 남·북한에 비해 월등히 두드러진 차이를 보이고 있다.

둘째로는 우열 학급이나 학교가 거의 없는 평준화 내지는 획일화 교육 문제이다. 남한이나 북한에서는 공허 현재까지도 우열 학생의 구분 없이 평준화에 의한 획일화 교육이 실시되고 있는 반면, 동·서독의 경우는 일찍부터 학교 또는 학급 간의 우수·열등학생들을 구분하여 학생들의 학업수준에 준하여 교육하였다. 이것은 교과서 집필에도 그대로 반영되었는데, 실제로 수학교과서에는 매우 간단하고 쉬운 문제로부터 난해한 문제에 이르기까지 문제를 다양화(물론 이로 인해 문제의 분량도 대단히 많음)함으로써, 교사는 교육받는 학생들 수준에 적합한 문제만을 선별하여 교육할 수 있도록 편집되었던 것이다.

마지막 검토 사항은 전자계산기의 도입 문제이다. 전

술한대로 일찍이 7-8학년부터 전자계산기를 도입하여 교육시키고 있는 동·서독의 경우와는 달리, 아직도 남한이나 북한 공허 교육 현장에서의 전자계산기의 사용을 공식화하지 못하고 있다. 계산기의 사용이 교육 현장에서 정말로 바람직한 것인가의 여부를 떠나, 남·북한 역시 전자계산기의 현장 도입문제를 적극적으로 검토할 필요가 있지 않은가 사려 된다.

(2) 동·서독 수학교과서 비교를 통한 우리의 과제

이 섹션을 서술하기 전에 먼저 명시해 둘 사항은, 본 과제는 아래 단원 VI의 '교과서 내용별 심층 분석'의 핵심내용에 대한 이해를 전제로 한 것이며, 따라서 아래의 본문을 읽기 전에 먼저 그 단원에 나타난 동·서독의 수학교과서 비교 분석을 참조하기 바란다.

수와 문자식 및 그의 연산, 일차방정식과 일차함수, 여러 가지 방정식과 부등식, 이차방정식과 이차함수 등의 대수영역에 대한 동·서독 (나아가서는 남·북한) 수학교과서 비교 과정에서 나타난 중요한 이슈임과 동시에, 앞으로 우리가 지속적으로 연구 검토되어야 할 핵심 사항들을 정리하면 다음과 같다.

① 수의 연산 과정에서의 '대수적 법칙'들에 대한 접근 및 설명의 시기 및 방법 문제.

② 함수와 방정식 중 어느 것을 먼저 도입하는 것이 바람직한가의 문제.

③ 수직선상의 점들의 집합이 실수의 집합과 일대일로 대응한다는 등의 중등과정에서는 증명이 사실상 불가능한 문제에 대한 대안.

④ 정의와 증명의 선명성 문제, 즉 해당학년의 학생들이 이해하기에는 지나치게 난해한 정의나 증명들에 대한 가이드라인 마련.

그밖에도 함수의 표기는 $y = \dots$ 와 $f(x) = \dots$ 중 어느 것이 더 바람직한가의 문제와 근의 공식의 유도과정에서 나타난 동·서독 간의 큰 차이점 등을 들 수 있으나, 위의 핵심 쟁점 네 가지에 대하여만 검토해보자.

먼저 ①의 경우를 보자. VI의 1절에서 밝혔듯이, 한국 교과서에서는 '귀납적 방법' (북한도 유사), 즉 기존의 연산절차를 새로운 수의 체계로 유추함으로써 연산의 확장

을 유도하는 원리를 적용하고 있는 반면, 동·서독에서는 공히 ‘형식불역의 원리’, 즉 기존의 알려진 기본적인 공리 또는 성질들을 먼저 찾은 후에 이를 새로운 수의 체계로 확대 도입하는 방법으로 설명되어 있으며, 특히 구동독의 경우는 구서독에 비해 그 정도가 더 강함을 지적하였다. 한편 통일 후 통합된 교과서 역시 구동독과 유사한 수준의 강도로 강화되었음을 볼 때, 우리도 (남·북한 공히) 점진적으로 ‘귀납적 방법’에서 ‘형식불역’의 방식으로 방향을 전환시킬 필요성이 있지 않다고 생각된다.

②의 경우는 대상 학생의 학력수준에 준하여 선택해야 할 사안이라 판단된다. 이는 곧, 일반적으로 방정식에 비해 함수의 개념이 더 난해하다는 점을 감안할 때, 학력수준이 높은 학생에게는 함수를 먼저 도입한 후에 방정식을 유도하는 것이 바람직한 반면, 수준이 뒤떨어지는 학생들에게는 그 순서를 역으로 지도하는 것이 올바른 방법일 것이다. 그러나 유감스럽게도 지금까지도 오로지 평준화 정책에만 매달려온 남·북한의 현실에서는 평준화의 근본 틀을 깨지 못하는 한, 별다른 선택의 여지가 없을 것이다.

이제 ③의 경우를 보자. VI의 1절의 실수 영역에서 우리는 실수의 ‘완전성(completeness)’의 증명과 관련하여, 구서독에서는 이를 상당히 깊이 있게 수학적으로 증명되어 있는 반면, 구동독(남·북한도 유사)의 경우는 이를 구체적 증명 없이 직관적으로 결과만을 서술하고 있음을 명시하였다. 그렇다면 통일 후의 통합교과서는 어떠한가? 한 마디로 구서독의 증명과정은 큰 내용의 변화 없이 그대로 적용시키고 있다. 이러한 연유는 통일 후, 해당 학생들의 수준에서는 설명하기 매우 난해한 문제일지라도 이를 학생들에게 어떤 방식으로든 납득할 수 있도록 설명 또는 증명이 되어야 한다는 기본 원칙이 설정되어 있었기 때문이다. 이 문제 역시 앞으로의 통일 한국에 대비하여 어떤 선택을 하는 것이 바람직한가는 연구 검토되어야 할 중요한 사안이라 생각된다.

④의 경우는 ③의 경우와 사실상 상당한 연관성이 있다고 생각된다. 즉 통일독일의 경우처럼, 만일 학생들이 이해할 수 있는 수준의 완벽한 증명이나, 아니면 학생들이 납득할 수 있는 정도의 설명이 불가능하다면, 적어도 학생들의 수준에 적합한 어느 정도의 가이드라인을 설정하고, 그 기준에 따라 내용을 선별하여 편집하는 것이

타당하지 않은가 생각된다. 그러나 우리가 그 기준을 어느 수준의 학생에 맞추어야 할 것인가의 문제와 부딪히게 되는데, 이 과제 역시, 남·북한 공히 평준화 정책의 틀을 깨지 못하는 한, 해결하기 어려운 난제 중 하나일 것이다.

VI. 교과서 내용별 심층 분석

1. 수와 문자식 및 그의 연산

(1) 유리수

유리수의 도입, 유리수의 표피 표현, 두 유리수의 크기 비교, 유리수의 소수 및 분수로의 변환 과정, 유리수의 덧셈과 뺄셈 등 유리수 영역의 전반부에서는 동·서독 교과서 사이에 큰 차이를 보이지 않고 있다. 그러나 유리수의 곱셈이나 나눗셈, 특히 음수와 연산에서는 수학 방법론적 차원에서 볼 때, 매우 큰 차이가 발견된다. 그 차이를 한마디로 표현한다면, 동독의 경우는 한국 [(노정학·양춘우·정환옥, 2003) 참조]이나 북한과 유사하게 귀납적 확장을 통한 직관적 방법으로 지도하고 있는 반면, 서독의 경우는 형식불역의 원리, 즉 형식적으로 양수의 연산에서 성립되는 교환법칙, 결합법칙, 배분법칙 등의 대수적 원리들을 음수의 연산까지 확장시켜 설명하고 있다는 것이다 [(우정호, 2001) 또는 (우정호 2002) 참조].

예를 들어 (음수) $\times 0$ 의 경우를 보자. 먼저 동독 교과서에는 (양수) $\times 0=0$ 이 되듯이 다른 임의의 수 a 에 0을 곱하면 언제나 0이 된다. 즉 $a \times 0=0$ 이 성립한다. 따라서 a 가 음수의 경우 역시

$$(\text{음수}) \times 0=0$$

이 성립한다고 설명하고 있다. 그러나 서독 교과서의 설명은 이와는 전혀 다르다. 양수의 집합에서 배분법칙이 성립하듯이 모든 유리수의 집합에서도 이 법칙이 유효하다는 것을 전제한 후, 이를 근거로 다음과 같이 설명하였다. 예를 들어 $(-3) \times 0$ 의 경우를 본다면, $0 \times 0=0$ 이므로

$$[(+3) + (-3)] \times 0=0$$

이다. 배분법칙이 성립하므로

$$(+3) \times 0 + (-3) \times 0 = 0$$

이 되는데, $(+3) \times 0 = 0$ 이므로, $(-3) \times 0 = 0$ 이 성립한다고 서술되어 있다.

(음수)×(음수)의 경우에도 이와 유사한 차이를 보이고 있다. 예를 들어 $(-2) \times (-3)$ 의 경우에 대하여 동독 교과서의 설명을 보자. 앞에서 이미 $(+2) \times (-3) = -6$ 과 $(-2) \times (+3) = -6$ 은 배운 상태이므로, 먼저 $(-2) \times (-3)$ 은 $+6$ 이 되는가 아니면 -6 이 되는가를 묻고, 왜 -6 은 될 수가 없는지를 설명하도록 요구하고 있는 것이다. 반면에 서독 교과서의 경우는 (노정학·양춘우·정환옥, 2003)에서도 제시하였듯이, 배분법칙 및 덧셈에 대한 역원의 존재를 전제한 후, 이 법칙들을 이용하여 $(-2) \times (-3) = +6$ 이 성립됨을 유도하고 있는 것이다. 즉, 형식불역의 원리가 적용된 것이다.

이제 두 유리수의 나눗셈에 대하여 비교해 보자. 나누는 수가 0이 아닌 일반적인 경우에 대한 설명은 동·서독 간에 별 차이를 보이지 않고 있는 반면, 그렇지 않은 경우, 즉 나누는 수가 0인 $b \div 0$ 의 경우에는 설명방법에서 동·서독 간에 약간의 차이를 보이고 있다. 즉, 동독 교과서에는 b 가 0이든 아니든 이에 대하여 어떤 언급조차도 없으나, 서독의 경우에는 다음과 같이 설명하고 있는 것이다. 먼저 $b \neq 0$ 의 경우에는 어떤 수도 0과 곱해질 때 0이 아닌 b 를 얻을 수 없다는 이유로, 반면 $b=0$ 인 경우에는, 어떤 수든 그 수에 0을 곱하면 다시 0이 된다는 이유로 $b \div 0$ 의 경우는 b 가 0이든 아니든 '수가 아니다' (keine Zahl)라고 설명하고 있다²¹⁾.

(2) 수식의 연산

이 영역에서 핵심적으로 제기될 수 있는 것은, 다음에 제시된 두 가지 문제에 대하여 이를 중학교 과정에서는 어느 학년에서 어느 수준까지 도입하는 것이 바람직한 것인가 하는 질문이다.

① 수의 집합 및 그의 연산과 관련된 '대수적 구조'(algebraic structure) 문제.

② 유사 혹은 같은 교과 내용에 대한 학년별 배치 문

제.

먼저 ①의 경우를 보자. 우리는 (노정학·양춘우·정환옥, 2003)에서 분석한대로, 독일(서독의 경우도 유사)의 교과서에는 한국의 교과서에 비해 훨씬 더 대수적으로 설명하고 있음을 명시하였다. 예를 들어 수식의 연산을 설명하는 과정에서, 한국 교과서에는 학생들이 쉽게 이해할 수 있는 용어, 예를 들면 '괄호를 푼다' 혹은 '동류항끼리 정리 한다' 등으로 설명되어 있는 반면, 서독의 경우는 '결합법칙' 혹은 '교환법칙' 등의 대수적 성질을 이용하고 있는 것이다²²⁾. 그렇다면 동독의 경우는 어떠한가? 동독에서는 서독보다 더 나아가서 위의 대수적 성질은 물론, 어느 한 집합과 묶어서 대수적 구조, 예를 들면 -비록 이러한 용어는 사용하지 않았지만- 군(group) 또는 환(ring)의 개념을 주시시키고 있는 것이다.

예를 들면 다음과 같은 정리들이 있다.

[정리] 유리수의 집합에서의 덧셈 연산의 경우, a, b, c 가 유리수이면 다음이 성립한다.

(a) $a + b = b + a$ [교환법칙]

(b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ [결합법칙]

(c) $a + 0 = a$

(d) $-a$ 도 유리수이고,

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \text{이다.}$$

여기에 단혀있는 성질을 언급함으로써, 사실상 유리수의 집합이 가환군의 구조를 가지고 있음을 암시하고 있다. 한편 뺄셈은 덧셈의 역원 $-a$ 를 더한다는 개념, 즉

$$a - b = a + (-b)$$

로 설명하였다.

곱셈에 대하여도 이 정리의 (a), (b)에 상응하는 성질을 만족함과 더불어, 배분법칙, 즉 a, b, c 가 유리수이면,

$$a(b + c) = ab + ac$$

가 성립함을 설명함으로써 유리수의 집합이 환의 구조를

21) 이 부분에 대하여 북한의 교과서 역시 아무런 언급이 없으며, 한국의 경우는 '나눗셈에서는 0으로 나누는 경우는 생각하지 않는다' 정도로 가볍게 넘기고 있다.

22) 북한의 경우 역시 '묶음법칙(결합법칙)' 또는 '바꿈법칙(교환법칙)' 등의 대수적 용어를 도입하여 설명하고 있으나, 그 수준은 한국과 비슷하게 몇 개의 예제 정도로 가볍게 설명되어 있다.

가지고 있음을 사실상 인식시키고 있는 것이다. 나아가서 다음의 정리가 성립함을 밝힘으로, 사실상 체(field)의 개념과 더불어 환의 기본적 성질까지도 주지시키고 있다.

이제 ②의 경우를 보자. 다른 영역에서도 동·서독 및 남·북한 간에 같은 학습내용에 대한 학년별 차이가 일부 있었지만, 이 영역의 경우는 그 정도가 유독 크다는 것이다. 예를 들어 인수분해의 경우를 보면, 북한의 경우는 8학년, 한국은 9학년에서 다루고 있으나 동독이나 서독에서는 10학년에서 처음으로 접하게 된다. 물론 이러한 원인은 인수분해의 난이도 때문이겠으나, 그러한 이유로 인해 동독이나 서독의 9학년 교과서에 있는 이차방정식의 해법에서는 ‘인수분해를 이용한 방법’을 다루지 못하는 단점이 있는 것이다.

다른 하나의 예는 이항정리 문제이다. 이차 전개식인

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

은 남·북한이나 동독 모두 8학년 또는 9학년에서 다루어지며 3차 이상의 이항정리는 10학년 이후에 나타나는 데, 유일하게 서독의 경우는 8학년에서 3차 이항정리 즉,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

뿐만 아니라, 이를 일반화시킨 파스칼의 삼각형까지도 설명되어 있는 것이 이채롭다.

(3) 실수

이 영역에서 우리가 초점을 둔 내용은 다음의 세 가지 문제였다.

① 제곱수가 아닌 양의 유리수 a 에 대하여 \sqrt{a} 가 유리수가 아님을 밝히는 문제

② 실수의 완전성(completeness) 문제

③ 무리수의 근사값을 구하는 문제

먼저 ①의 경우를 보자. (노정학·양춘우·정환욱, 2003)에서 밝혔듯이, \sqrt{a} 를 분수로 표현할 수 없는 이유에 대하여 한국 교과서에는 증명 없이 설명하고 있는데 반하여²³⁾, 독일 교과서에는 구체적인 증명이 제시되어 있다. 그런데 이 증명은 동독 교과서에도 그대로 나타나 있다. 다만 이 증명이, 서독의 경우는 9학년에서 다

루어지고 있는 반면, 동독에서는 이보다 훨씬 빠른 7학년 교과서에 게재되어 있다는 차이 뿐이다.

이제 ②의 경우를 보자. 유리수의 불완전성, 즉 유리수의 집합으로는 수직선상의 모든 점을 채울 수 없다는 것에 대하여는 어느 교과서에도 설명되어 있다. 그렇다면 실수는 완전한가? 즉, 실수의 집합과 수직선상의 모든 점의 집합이 일대일로 대응하고 있는가의 여부를 설명하는 과정에서는 동·서독 간에 약간의 차이를 보이고 있다. 서독의 경우는 임의의 양의 유리수 a 에 대하여, \sqrt{a} 에 대응하는 점이 수직선상에 존재함을 보이는 것으로, 모든 실수는 수직선 위에 있다고 설명하고 있다. 반면 동독의 경우는 증명 없이 단지, 실수의 집합과 수직선상의 모든 점의 집합이 일대일로 대응하고 있다는 결과만을 명시해주고 있다. 참고로 한국이나 북한의 교과서에는 이에 대한 언급이 전혀 없다.

마지막으로 ③의 경우, 즉 무리수의 근사값을 구하는 문제에 대하여 보자. 일반적인 방법, 예를 들어 $\sqrt{2}$ 의 근사값을 구하기 위하여, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ 이므로 $1 < \sqrt{2} < 2$ 이며, 계속해서 $1.4^2 = 1.96$, $1.5^2 = 2.25$ 이므로 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ 를 얻는 등의 절차를 계속함으로써 $\sqrt{2}$ 의 근사값을 추적하는 방법은 동·서독이나 남·북한 어느 교과서이든 모두 제시되어 있다. 또 남·북한 교과서에는 나타나 있지 않은 ‘Heron의 방법’은 동·서독 교과서에는 모두 제시되어 있다. 서독 교과서에는 유일하게 이 두 방법 외에도 ‘이분법(Bisection method)²⁴⁾’이 제시되어 있는데, 특히 이 방법은 제곱근의 근사값을 구하는 알고리즘을 작성하는데 매우 유용하다.

2. 일차방정식과 일차함수

이 영역에서 우선적으로 초점이 되는 것은 방정식과 함수 중 어느 것을 먼저 다루는 것이 바람직한가의 문제이다. 우선 동독의 경우는 남·북한과 마찬가지로 방정식 이후에 함수를 다루고 있는데 반하여, 서독의 경우는 함수가 먼저 다루어진 이후 방정식이 나타나고 있다. 일

23) 북한의 교과서에는 이보다 더 간단히, ‘순환마디를 가지지 않는 무한소수’라고만 명시되어 있다.

24) Intervallhalbierungsverfahren(독)

반적으로, 함수 개념이 방정식을 이해하는 것보다 더 힘들 것이라는 전제 때문에, 동독이나 남·북한에서는 함수보다는 방정식을 먼저 다루고 있는 것으로 추측된다. 그러나 이 경우, 함수와 그의 그래프를 모르는 상황에서는 방정식의 해법에서 가장 핵심이 되는 해의 존재 및 유일성 여부에 대하여 설명해줄 적절한 방도가 없다는 것이다. (실제로 동독이나 남·북한의 경우, 해의 존재 여부 및 유일성 등에 대하여는 전혀 언급이 없거나, 아니면 함수를 다룬 이후 이 문제에 대하여 다시 거론하고 있다.) 반면에 함수를 먼저 다루고 있는 서독에서는 함수의 그래프를 통하여, 어떤 방정식이 해를 갖는지? 또 갖는 경우는 해의 개수는 얼마나 되는가의 문제에 대하여 충분히 검토한 이후에, 일반적인 방정식의 해법에 대하여 설명하고 있다. 둘 중 어느 방법이 더 바람직한 것이냐에 대하여는 좀 더 심도 있는 검토가 필요할 것이다.

(1) 일차방정식

일반적인 방정식의 해법을 설명하기 위하여는 먼저 등식의 성질, 즉 등식의 양변에는 같은 수를 더해도, 빼도, 곱해도, 또 0이 아닌 수로 나누어도 등식은 성립한다는 사실을 설명해야 한다. 이와 관련하여 동독 교과서에는 서독이나 남·북한과는 달리, '동치(equivalent)'라는 용어를 도입하여 이를 훨씬 포괄적인 방법으로 설명하였다. 즉, '해집합이 같은 두 방정식'을 서로 동치라고 정의함으로써, 위의 경우는 동치의 한 예에 불과하게 되며, 따라서 이는 서독이나 남·북한에 비해 매우 폭넓게 설명하고 있는 것이다. 여기서 유의해야 할 사항은 등식의 성질의 경우는 0으로 곱해도 무방하나, 동치조건에서는 0으로 곱하는 경우는 성립하지 않는다는 것을 다음과 같은 예를 통하여 설명하고 있다.

[예] 일차방정식 $6x = 24$ 의 해집합은 4이나, 이 방정식에 0을 곱한 방정식 $6x \cdot 0 = 24 \cdot 0$ 의 해집합은 모든 수 전체의 집합이다. 따라서 두 방정식은 동치가 아니다.

우리가 여기에서 한 가지 주목할 것은, 동독이나 서독의 경우는 남한이나 북한과는 달리, '이항'²⁵⁾이라는 용

25) 북한에서는 '마디 옮기기'라 부른다. 여기서의 '마디'란 우

어를 사용하지 않는다는 것이다. 이는 곧, 모든 과정을 전적으로 대수적 성질, 즉 등식의 성질이나 동치인 방정식 등의 용어만을 사용해서 설명하고 있는 것이다.

(2) 일차함수

이 영역에서 우리가 초점을 둔 것은, 일반적인 일차함수 $f(x) = ax + b$ (단, $a \neq 0$)의 그래프는 항상 직선이 됨을 어떻게 설명하고 있는가 하는 문제이다. 이 문제에 대하여 서독의 경우는, 먼저 몇 개의 예를 통하여 비례함수 $f(x) = ax$ 의 그래프가 원점을 지나는 직선이 됨을 보인 후, 일반적인 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 그래프는 이 비례함수를 y 축으로 b 만큼 평행이동 함으로 얻어진다고 설명하고 있는 반면²⁶⁾, 동독 교과서에는 상당히 구체적으로 설명되어 있기에 이를 여기에 소개하겠다. 먼저 다음의 정리를 보자. (함수 $f(x) = ax + b$ 에서 a 를 기울기라 칭하였다.)

[정리] 기울기 a 를 갖는 일차함수 $y = f(x)$ 는 임의의 서로 다른 두 값 x_1, x_2 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

이 정리의 의미는 이렇하다. 좌변이 주어진 함수의 그래프 위의 두 점 $(x_1, f(x_1))$ 과 $(x_2, f(x_2))$ 사이의 기울기를 나타내고, 이는 곧 이 그래프 위의 임의의 두 점에서의 기울기가 항상 일정(= a)하다는 것을 의미하므로, 따라서 이 그래프는 직선이 된다는 것이다. 이는 일차함수의 그래프는 언제나 직선을 이룬다는 것을 매우 논리적으로 설명하고 있는 것이다. 물론 매우 간단하지만, 이 정리의 증명도 제시되어 있다.

3. 여러 가지 방정식 및 부등식

이 영역에서는 연립방정식의 풀이 방법으로, 서독에서는 단지 가감법만이 설명되어 있는 반면, 동독 교과서에는 한국과 같이 가감법 뿐 아니라 대입법, 등치법까지

리의 '항'에 해당하는 북한의 수학 용어이다.

26) 남한이나 북한의 교과서에도 이와 유사하게 설명되어 있다.

모두 나타나 있는 정도의 약간의 차이를 보일 뿐, 두드러진 큰 차이는 보이지 않는다. 여기서 우리는, 내용의 차이보다는 오히려 어떤 방정식이나 부등식이 중학교 과정에서 다루어지고 있는지, 또 언제 다루어지는지의 여부를 다음의 표로 나타내었다. 한국의 경우와를 대조하기 위하여 남·북한의 경우도 함께 조사하였다.

<표 > 교과내용의 학년별 비교 (7-9학년)

내 용		동독	서독	한국	북한
방정식	연립 이원일차	9	9	8	8
	삼원일차	x	9	x	x
	분수방정식	x	8	x	x
	무리방정식	x	9	x	x
부등식	일차 식1, 미지수1	7,8*	8	8	7
	식2, 미지수1	x	x	8	9
	식1, 미지수2	x	9**	x	x
	분수부등식	x	8	x	x

* 7학년에서는 간단한 도입,

8학년에서는 절대부등식까지

** 영역문제로부터 선형계획법까지

x: 중학교 과정에 없는 내용

4. 이차방정식과 이차함수

일차방정식과 일차함수에서와 마찬가지로, 이 영역에서도 방정식과 함수 중 어느 것을 먼저 다루는 것이 바람직한가의 문제는, 같은 맥락에서 검토되어야 할 것이다. 실제로 한국이나 북한의 경우는 이차방정식을 먼저 다룬 후에 이차함수가 나타나는 반면, 독일의 경우는 동·서독 공히 이차함수 이후에 이차방정식을 배우도록 편집되어 있다. 이에 대한 장단점은 일차방정식과 일차함수에서와 유사하므로 생략한다.

(1) 이차함수

함수를 나타낼 때, 동독에서는 일반적으로 $y = \dots$ 의 형태로 쓰고 있는 반면, 서독에서는 $f(x) = \dots$ 로 표현하고 있음을 이 단원의 서론에서 밝혔는바, 여기서 우리는 동독 및 한국의 방식인 $y = \dots$ 의 형태로 표현하겠다.

이차함수의 그래프를 도입하는 과정에서 나타난 중요한 포인트는, 평행이동의 과정과 그래프의 폭의 크기 중 어느 것을 먼저 도입하여 설명하는 것이 바람직한 것인가의 문제인데, 이 포인트의 경우는 동·서독과 남·북한이 서로 상이하다. 우선 동·서독의 경우를 보자. 이차함수의 가장 기본형인 $y = x^2$ 을 시작으로²⁷⁾, 평행이동을 이용하여 y 축 및 x 축 방향으로 평행이동 시킴으로, 기본형 중 가장 일반적 형태인 $y = x^2 + bx + c$ 를 $y = (x-d)^2 + e$ 의 형태로 변환시키는 과정을 선택하고 있으며, 그래프의 폭(즉, x^2 의 계수가 1이 아닌 경우)에 대한 문제는 차후에 다루어지고 있다. 반면 한국이나 북한의 경우는 $y = x^2$ 을 시작으로, $y = ax^2$, 즉 그래프의 폭의 크기에 대한 문제를 먼저 다룬 후, $y = ax^2 + e$, $y = a(x-d)^2$, $y = a(x-d)^2 + e$ 등 평행이동의 방법을 통하여 일반적인 이차함수에 대하여 다루어지고 있다. 전자의 경우는 학생들에게 이차함수의 그래프를 매우 쉽게 이해시킬 수 있는 장점이 있는 반면, 후자의 경우는 이차함수의 시작부터 $y = a(x-d)^2 + e$ 에 이르기까지 빠른 시간에 도달할 수 있다는 장점이 있다.

그밖에도 다른 영역에서와 마찬가지로 동·서독 교과서 공히 남·북한에 비해서 매우 많은 분량의 문제들이 제시되어 있는데, 특히 서독의 경우는 실제 생활 속에서 나타나고 있는 여러 형태의 최대 최소문제들로부터 시작되는 포물선거울 문제에 이르기까지 상당히 난해하고도 다양한 문제들이 수록되어 있다. 한편 한 가지 특이한 점은, 동독의 경우는 일반적인 완전제곱 형식을 $y = (x-d)^2 + e$ 이 아닌 $y = (x+d)^2 + e$ 로 표현하고 있는 것이다. (이 경우 꼭지점의 좌표는 (d, e) 대신에 $(-d, e)$ 가 되는 단점이 따른다.)

(2) 이차방정식

이 영역에서 고찰되어야 할 내용은 크게 다음의 두 가지 사항이다.

- ① 계산을 통한 이차방정식의 해법
- ② 근의 공식의 유도 문제

먼저 ①의 경우를 보자. 일반적인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 완전제곱형인 $(x+p)^2 = q$ 의 형태로 바꾼 후, q 의 값이 양수, 0, 음수에 따라 두 개의 해

27) 이 그래프를 '정규포물선(Normalparabel)'이라 칭하였다.

$x = -p \pm \sqrt{q}$, 유일한 해 $x = -p$, 또는 해가 존재하지 않는다는 기본적인 방법은 동·서독이나 남·북한 모두 별 차이가 없다. 다만 동·서독 공히 인수분해가 10학년에서 다루어지는 관계로, 남·북한과는 달리 인수분해를 이용한 풀이법은 단지 $c=0$ 인 $ax^2+bx=0$ 의 특별한 형태 이외에는 일체 다루어지지 않는다.

②의 경우, 즉 근의 공식을 유도하는 문제는 동·서독 공히 가장 일반적인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근을 구하는 공식임에도, 공식의 형태에서는 판이하게 다르게 표현되어 있다.

먼저 서독 교과서에 나타난²⁸⁾ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)의 근의 공식을 유도하기 위하여 주어진 방정식의 양변을 a 로 나눈 후, 양변에 $-\frac{c}{a}$ 를 더한다. 계속해서 양변에 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 을 더하여 완전제곱 형태로 바꾸면

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

을 얻는데, 이 식의 양변에 제곱근을 취하면, $\sqrt{a^2} = |a|$ 로부터

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|}$$

가 된다. 먼저 $a > 0$ 인 경우는 $2|a| = 2a$ 이므로

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (*)$$

을 얻는다. 한편 $a < 0$ 인 경우 $2|a| = -2a$ 로부터 위와 동일한 두 해를 얻게 된다.

이제 동독의 경우를 보자. 우선 방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)의 양변을 a 로 나눔으로 정규형인 $x^2+px+q=0$ 로 변환시킨 후에 위와 유사한 완전제곱의 절차를 밟으면, 근의 공식

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (**)$$

이 유도된다. 근의 공식 (**)은 근의 공식 (*)에 비해 실제 수치를 적용할 때에는 다소 복잡한 분수계산이 따른다는 단점은 있으나, 한편으로는 다음과 같은 장점을 지니고 있다.

- 근의 공식이 간편하여 암기하기 쉽다.
- 공식의 유도과정 (**)에 비해 훨씬 간단하다.
- 유도과정에서 절대값이 나타나지 않으며, 따라서 (**)와 같은 두 경우를 분리하여 설명할 필요가 없다.

VII. 맺는말

독일은 통일을 이룬지 이미 18년이란 긴 세월이 흘렀음에도 아직 통일 후유증에서 크게 벗어나지 못하고 있으며, 앞으로도 그 후유증이 얼마나 더 지속 될런지는 아무도 예측할 수 없다. 그렇다면 이런 결과를 초래한 가장 큰 이유는 어디에 있는가? 그 이유는 단 하나, 즉 그들은 사실상 사전 준비가 거의 없는 상태에서 통일을 맞게 되었다는 것이다. 따라서 통일 직전의 독일의 상황과 현재 분단된 남·북한의 상황이 여러 가지 면에서 너무 흡사하다는 현실과 더불어, 사전 충분한 준비의 미비로 인해 그 영향이 이렇게 길도록 미치는 현실을 감안한다면 이제 우리의 결론은 자명하다고 하겠다.

본 연구를 통하여 나타난 남·북한 및 동·서독 수학교과서의 외형적 또는 내재적 차이점과 앞으로 지속적으로 연구 검토 또는 해결되어야 할 과제로서 다음과 같은 사항이 지적되었다. 우선 동·서독 수학교과서를 통하여 비추어본 남·북한 교과서 사이의 문제로는

- 남·북한 간에 나타난 용어나 기호의 차이,
- 북한 교과서의 예제나 연습문제에서 나타난 정칙 색 짙은 문제들,
- 동·서독 교과서에서 보여주고 있는 예제나 문제의 다양성, 실생활과의 밀접성 내지는 실용성 문제 등이었다. 특히 세 번째로 지적된 문제의 경우, 양국 교과서 사이의 장단점 여부를 떠나 수학교육의 내·외적 문제로서 다음 사항이 지적되었다.

28) 이 절차는 남·북한 교과서에서도 비슷한 방법으로 유도되고 있는데, 다만 $a > 0$ 와 $a < 0$ 의 두 경우를 구분하지 않고, 단순히 $2|a| = 2a$ 로 처리하여 유도하였다. (물론 이 경우는 $a > 0$ 라는 전제하에서 가능하다.)

- 교과서의 지질, 컬러 등 외형적 향상 문제,
- 우열반이나 우열학교가 거의 없는 획일화 또는 평준화 교육 문제,
- 전자계산기의 도입 여부 및 시기 문제 등이다.

한편, 동·서독 수학교과서 대수 영역의 비교 중 특히 정의나 정리의 도입 순서 및 방법, 증명 또는 설명 과정 등 각 테마별 비교 분석에서 나타난 차이점 및 이와 관련하여 우리가 앞으로 연구되어야 할 과제로서는

- 교환, 결합, 배분법칙 등 수와 연산에서의 대수적 법칙들에 대한 도입 및 설명의 시기와 방법 문제 (즉, 귀납적 방법과 형식분역의 원리 중 선택 문제),
- 함수와 방정식 중 어느 것을 먼저 도입하는 것이 효과적인가의 문제,
- 중등과정에서는 엄밀한 증명이 사실상 불가능한 문제들에 대한 대처 방안,
- 해당학년 학생들이 이해하기에는 지나치게 난해한 정의나 정리, 또는 증명 문제에 대한 가이드라인 설정 문제 등이 지적되었다.

끝으로 본 연구에 대한 재정적 지원을 해준 학술진흥재단과 독일에 체류하는 동안 옛 동독의 중요한 자료들을 제공해 주신 Berlin Humboldt대학의 Schulz교수를 비롯한 모든 독일의 교수들께 감사의 마음을 표한다.

참 고 문 헌

- 김삼태·이식 (1999), 남·북한 중등학교 수학 교과서의 영역별 내용 비교 분석 -대수, 통계, 해석, 기하 영역을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 38(1), pp.1-14.
- 노정학·양춘우·정환옥 (2003), 한국과 독일의 중등학교 수학교과서 비교 연구 -중학교 대수 영역을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 42(3), pp.275-294.
- 노정학·정환옥 (2005), 한국과 독일의 중등학교 수학교과서 비교 연구 -중학교 기하 영역을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 44(1), pp. 1-14.
- 박경미 (1995), 남·북한 수학 교과서 비교·분석, 대한수학교육학회 논문집 5(1), pp. 101-109.
- 우정호 (2001). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.
- 우정호 (2002). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.
- 현진오·강태석 (1999), 남·북한 수학교과서의 내용체계 및 용어에 대한 비교분석 -북한의 고등중학교 교과서를 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 38(2), pp. 105-128.
- Birnbaum, P. (2003), Schulsystem und Mathematikunterricht der DDR. *Tagungsband von Uni. Magdeburg und Uni. Paderborn (Henning, H. & Bender, P. Ed.)*, pp.13-25.
- Bittner R.; Ilse D; Kubicek S. & Tietz W. (1971). *Kompedium der Mathematik*, Berlin: Volk und Wissen.
- Bruder, R. (2003) Vergleich der grundlegenden Konzeptionen und Arbeitswesen der Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR mit denen der Didaktik der Mathematik in der BRD, *ZDM* 35, pp.162-165.
- Dieter, L. (1985), Gedanken zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts aus der Sicht des strukturellen Arbeitens. *Wissenschaftliche Zeitschriften*, 34, pp.669-675.
- Franke J. (Ed.) (1988). *Allgemeinbildung und Lehrplanwerk*. Berlin: Volk und Wissen,
- Griesel, H. (2003), Vergleich grundlegender Konzeptionen der Mathematik in der BRD und in der DDR. *Tagungsband von Uni. Magdeburg und Uni. Paderborn (Henning, H. und Bender, P. ed.)*, pp.175-182.
- Ministerium für Volksbildung (1987). *Lehrplan der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule*. Mathematik, Klassen 6 bis 8, Klassen 9 und 10. Berlin: Volk und Wissen,
- Walsch, W. & Weber, K. (Eds.) (1975). *Methodik Mathematikunterrichts*. Berlin: Volk und Wissen,

Walsch, W. & Weber, K. (Eds.) (1989). *Mathematikunterricht: Pädagogisches Anliegen - Didaktische Konzeption - Methodische Ideen*. Berlin: Volk und Wissen,

Weber, K. (2003), Mathematikunterricht und mathematikmethodische Forschung in der DDR - wesentliche schul- und wissenschaftspolitische Rahmenbedingungen. *Tagungsband von Uni. Magdeburg und Uni. Paderborn (Hening, H. und Bender, P. ed.)*, pp. 1-12.

Internet

- [1] http://de.wikipedia.org/wiki/Polytechnische_Ober-schule#Unterstufe
- [2] <http://www.hausarbeiten.de/faecher/hausarbeit/pag/6869.html>
- [3] <http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/geschichte/lehrausbildung.pdf#search='Vergleich%20%20Ost%20und%20west%20%20Mathematik'>
- [4] <http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/meg/>

A study on the state of mathematics education and on the comparison of middle school mathematics textbooks before unification and in unified germany

Jung, Hwan-Ok

Department of mathematics, Hanshin university, Osan, Gyeonggi, Korea, 447-791

E-mail: jungok@hs.ac.kr

This study contains three themes as follows concerning the state of mathematics education and the textbooks in east and west germany before unification and in unified germany. The first subject is the investigations of the organization of the school systems and of the syllabus of mathematics in east germany in those days. Second, we analyzed the process of preparation for integration before unification, the nature of integration policies and the convention for the unification. Finally, we compare and analyze the similarities and differences in east and west german mathematics textbooks for middle school students combining those in south and north Korea, and further we suggest tasks to be studied in future research.

* ZDM classification : D13, B73

* 2000 Mathematics Subjects Classification : 97B70, 97D10, 97U20

* Key Words : mathematics education in GDR, comparison of mathematics textbook